VON PYTHAGORAS ZU PASCAL

FÜNF LEHRSTÜCKE DER MATHEMATIK ALS
BILDUNGSPFEILER IM GYMNASIUM

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Erziehungswissenschaften
der Philipps-Universität Marburg/Lahn
vorgelegt von

HANS BRÜNGGER
aus Winterthur (CH)

Marburg/Lahn 2004

Vom Fachbereich
Erziehungswissenschaften
der Philipps-Universität Marburg
als Dissertation angenommen am: 10. August 2004

Abschluss der mündlichen Prüfung am: 20. August 2004

Betreuer: Prof. Dr. Hans Christoph Berg

2. Gutachter: Prof. Dr. Heinz Stübig

Inhaltsverzeichnis: Im Überblick

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Lehrkunst und Mathematik, beide haben mit Kunst und Kultur zu tun. Deshalb soll ein Kunstwerk, das mathematische Ideen aufnimmt, den Rahmen dieser Dissertation bilden. „Zahlreich“ heisst dieses Bild von Ueli Hofer aus Trimstein, Schweiz. Zahlen sind eine zentrale Grundidee der Mathematik und zahlreich sind die Bezüge des Bildes zu den in dieser Arbeit präsentierten Lehrstücken.

In dieser Dissertation werde ich an Hand von fünf als Bildungspfeiler in mein Curriculum des Gymnasiums der Sekundarstufe II integrierten Lehrstücken aufzeigen, wie weit Grundideen der Mathematik und ihre Geschichte durch Lehrstücke im Mathematikunterricht erfahrbar gemacht werden können.

Zahlreich sind die Personen, welche an der Entwicklung und Optimierung der Lehrstücke dieser Dissertation beteiligt sind. Insbesondere bedanke ich mich bei Prof. Dr. H. Ch. Berg, bei dem ich während annähernd zehn Jahren die Prinzipien der Lehrkunst erfahren durfte und mit dem die vorliegenden Lehrstücke in wiederholtem Ringen Gestalt annahmen.
Dankbar bin ich Prof. Dr. Heinz Stübig dafür, dass er bereit ist, sich in diese mathematisch orientierte Dissertation zu vertiefen und die Mühe der Zweitbeurteilung auf sich nimmt.
Ein Dank geht an Dr. Urs Höner, den Rektor des Wirtschaftsgymnasiums Bern-Neufeld, der als Schulleiter die Lehrkunst seit Jahren wohlwollend begleitet. Ohne seine tatkräftige Unterstützung und seine Ermunterungen wären die Lehrstückentwicklung an den Gymnasien Bern-Neufeld und damit auch diese Dissertation nicht möglich geworden.
Ein weiterer Dank geht an meinen Sohn Martin Brüngger, der für die letzten drei der dargestellten Lehrstücke das Titelbild gestaltet hat.
Besonderer Dank gebührt meiner Partnerin Catrin Frey und ihrer Freundin Annette Graeter, die mir immer wieder bei der sprachlichen Formulierung behilflich waren.
Dankbar bin ich auch allen Kolleginnen und Kollegen, welche in den verschiedenen Lehrkunstwerkstätten an den mathematischen Lehrstücken mitgedacht und mitgeformt haben. Nur durch mehrfache Präsentation und Niederschrift sowie durch gemeinsames Ringen mit Fachkollegen und fachfremden Lehrkräften konnten die Lehrstücke ihre heutige Gestalt annehmen.

Bern, Ostern 2004 Hans Brüngger

I. Einleitung und Leitfrage

1. Grundanliegen dieser Arbeit

Lehrplan und Lehrkunst, in welcher Beziehung stehen sie zueinander? Bislang ist es so, dass sich die Lehrkunst nicht um den Lehrplan kümmert und sich der Lehrplan nicht auf die Lehrkunst bezieht. Aber beide, sowohl der Lehrplan wie die Lehrkunst wollen sich im Unterricht konkretisieren. Ist dies gleichzeitig möglich oder führt dies zu Widersprüchen, gibt es ein Einerseits – Anderseits, ein Entweder – Oder? Erlauben die Lehrpläne überhaupt die Inszenierung von Lehrstücken im Unterricht? Sind Lehrstücke in den heutigen Schulen überhaupt fruchtbar zu inszenieren? Gibt es Aspekte des Lehrplans, die sich mit Lehrstücken besonders gut im Unterricht verwirklichen lassen?

Mein Anliegen ist es, auf Grund meiner bald zehnjährigen Erfahrung aufzuzeigen, dass Lehrstücke sehr wohl im Sinne der Lehrpläne im Unterricht ihren Platz haben. An Hand von fünf Lehrstücken, welche fest in mein Unterrichtscurriculum integriert sind, will ich untersuchen, inwieweit gewisse Aspekte des Lehrplans im Unterricht durch Lehrstücke verwirklicht werden können. Grundlage dazu bilden die didaktischen Interpretationen, die Analyse der vertretenen Grundideen, die vielfältigen Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler sowie die Reaktionen einiger Fachkollegen, welche auf meine Anregung hin damit beginnen, Lehrstücke in ihren Unterricht aufzunehmen.

2. Was will die Lehrkunst und was sind Lehrstücke?

Die „Lehrkunstdidaktik“, wie wir sie heute kennen, basiert vorwiegend auf den Arbeiten von Martin Wagenschein, wurde aber von Hans Christoph Berg und Theo Schulze weiterentwickelt und insbesondere um die dramaturgische Dimension erweitert, welche sich auf Gottfried Hausmann abstützt. Im Zentrum stehen Lehrstücke, das sind gemäss der lehrkunstdidaktischen Methodentrias, d. h. nach exemplarisch-genetisch-dramaturgischen Prinzipien, entwickelte Unterrichtseinheiten.

Zum *exemplarischen Lehren* gehört ein zündendes Phänomen, ein herausforderndes Problem, eine packende Fragestellung, welche für den Lernenden nicht zu einfach, aber erreichbar sein muss. Ist das Problem gelungen exponiert, so entwickelt sich von da aus ein Lernprozess nach unten und nach oben. In der Mathematik führt er oft zur Entdeckung oder präziser zur „Wiederentdeckung unter Führung“ (Wagenschein, 1982, S. 107), wie das eindrücklich am Beispiel zum „Satz Euklids über das Nicht-Abbrechen der Primzahlenfolge“ (Wagenschein 1980, S. 228 - 236) beschrieben ist. Das Problem bleibt als Gegenstand, oder eben als „Exemplar“, Zentrum der Unterrichtseinheit, wird von allen Seiten beleuchtet und auf verschiedenste Arten untersucht, bis es möglichst in seiner ganzen Vielfalt klar und verständlich erfasst ist. Dazu gehören auch Querbezüge zu anderen Bereichen des Fachs, aber auch zu anderen Wissensgebieten. In einer thematischen Landkarte lassen sich diese vertikalen und horizontalen Bezüge andeuten. Im Gegensatz zu den anderen Unterrichtsmethoden macht die Lehrkunst Aussagen über den zu behandelnden Inhalt. Dieser soll einen exemplarischen Charakter besitzen, es soll sich um ein Beispiel handeln, „das einen bestimmten Ort in der Geschichte der Menschheit markiert – einen Ort, in dem eine neue Sicht-, Denk- oder Handlungsweise zum Durchbruch gekommen ist.“ (Berg/Schulze 1998, S. 342) Es soll sich um ein Epochen übergreifendes Menschheitsthema, um ein kollektives Lernereignis handeln, das „einen Zugang zu einem weiteren Feld von Erscheinungen oder Problemen eröffnet.“ (ebd. S. 342f)

Die Auseinandersetzung mit diesem Thema erfolgt nach dem Prinzip des *genetischen* Lernens. Es geht „um die Erschliessung von neuen Sichtweisen, Denkformen und Handlungsmöglichkeiten, die in den Inhalten aufgehoben sind.“ (ebd. S. 343). Im Zentrum steht das „Erschliessen“, die aktive Auseinandersetzung mit dem Gegenstand, welche möglichst alle Sinne einschliesst und Zeit lässt, bis der Gegenstand erschlossen ist. Genetisch lehren heisst kulturgenetisch und individualgenetisch lehren: Wir folgen dem Weg des Wissens und dem Weg des Individuums. Oft können wir ein ursprüngliches Phänomen (z. B. eine Primzahltabelle oder eine Paradoxie von Zenon) ins Zentrum setzen und uns so mit den Fragestellungen auseinandersetzen, welche die Menschheit im Wissen weiter brachten. Ist die Problemstellung dem Wissensstand des Individuums angepasst, so kann dieses in der konzentrierten Auseinandersetzung an demselben Gegenstand Lernerfahrungen machen wie die Menschheit zuvor. Zusätzlich kann es zu einer bereichernden Begegnung mit den genialen Meistern kommen, welche uns zu vertieften Einsichten verhelfen.

Dieser so im Unterricht konzentrierte exemplarisch-genetische Prozess unterliegt einer *dramaturgischen* Gestaltung mit einem inneren Handlungszusammenhang und wird dadurch erst zu einem Lehrstück. In einer Ouvertüre wird das Thema exponiert, durch mehrere Akte in logischer Abfolge verläuft das dramatische Ringen um Klärung, ein Hin und Her, ein Auf und Ab. Im Idealfall führt ein Spannungsbogen zu würdigem Höhepunkt und Abschluss. Bei einem guten Lehrstück bewährt sich die Struktur, die durchaus eine gewisse Flexibilität beinhaltet, bei unterschiedlichen Lehrkräften, in verschiedenen Schulstrukturen und Klassen.

Jedes der fünf in dieser Arbeit beschriebenen Lehrstücke wird in einem Kapitel „Didaktische Interpretation“ bezüglich der Methodentrias, also nach exemplarischen, genetischen und dramaturgischen Gesichtspunkten durchleuchtet. Diese Interpretation kann zu einem vertiefteren Verständnis des Lehrstücks beitragen und besondere Stärken oder Schwächen aufzeigen. Insbesondere zeigen die thematischen Landkarten die Positionierung des Lehrstücks innerhalb der Mathematik und da und dort über diese hinaus. Bezüglich der Bildungsdimension einer Unterrichtseinheit spannt die Kategorialbildung von Klafki einen erweiterten Horizont, wie sich in der entsprechenden Darstellung beim Lehrstück zum Satz des Pythagoras (S. 69-71) zeigt.

Die Entwicklung eines Lehrstücks ist ein länger dauernder Prozess (oft rund zwei Jahre) und geschieht im Rahmen einer Lehrkunstwerkstatt. Üblicherweise durchläuft ein Lehrstück acht verschiedene Schritte der Gestaltung. Exemplarisch sind diese am Beispiel des Lehrstücks über die Primzahlen (S. 109-111) beschrieben.

3. Rahmenlehrplan und Schullehrplan

Im Rahmenlehrplan, der seit der letzten grossen Reform von 1994 den schweizerischen Gymnasien einheitlich konzipierte schriftliche Leitvorstellungen vorlegt und als Referenzdokument für die Anerkennung der Maturitätsausweise fungiert, werden die allgemeinen Ziele der Maturitätsbildung in einem Bildungsprofil zusammengefasst, das sich in fünf Kompetenzfelder unterteilt (EDK 1994, S. 10f / siehe Anhang S. 286):

„- Kompetenzen im sozialen, ethischen und politischen Bereich;
- Kompetenzen im intellektuellen, wissenschaftlichen und erkenntnistheoretischen Bereich;
- Kompetenzen im kommunikativen, kulturellen und ästhetischen Bereich;
- Kompetenzen in den Bereichen der Persönlichkeitsentwicklung und der Gesundheit;
- Kompetenzen in den Bereichen der persönlichen Lern- und Arbeitstechniken, der Wissensbeschaffung und der Informationstechnologien.“

Diese „allgemeinen Bildungsziele wurden als Bildungsprofil für Jugendliche konzipiert, die ein Hochschulstudium absolvieren oder eine andere höhere Ausbildung beginnen wollen. … sie sollen … dazu ermutigen, sich auf das Wesentliche zu konzentrieren." (ebd.) Sie bilden das Dach für die Bildungsprofile, welche anschliessend für die einzelnen Unterrichtsfächer formuliert werden. Für den Mathematikunterricht finden wir im Abschnitt „Allgemeine Bildungsziele" (ebd.) unter anderem die folgenden Vorgaben:
„Bei den Lernenden stehen folgende drei Blickrichtungen im Vordergrund:

- der Blick in die Welt der Mathematik hinein als einer eigenständigen Disziplin;
- der Blick aus der Mathematik hinaus in ihre Anwendungen, die Modellbildungen und deren Bezüge auf die uns umgebende Wirklichkeit;
- der Blick in die Ideengeschichte der Mathematik und deren Einbettung in die Kulturgeschichte und die Entwicklung von Wissenschaft und Technik."

Unter den Richtzielen für den Mathematikunterricht werden im Rahmenlehrplan *drei zentrale Grundkenntnisse* aufgeführt: (EDK 1994, S. 99, siehe Anhang S. 287)

„- Die mathematischen Grundbegriffe, Ergebnisse und Arbeitsmethoden der elementaren Algebra, Analysis, Geometrie und Stochastik kennen
- Die wichtigsten Etappen der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik und ihre heutige Bedeutung kennen
- Heuristische, induktive und deduktive Methoden kennen"

Dem Rahmenlehrplan sind alle Schweizerischen Gymnasien unterstellt, so auch die drei in einem Gebäudekomplex im Norden von Bern vereinigten Gymnasien Bern-Neufeld, das Literargymnasium, das Mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasium und das Wirtschaftsgymnasium. Das Wirtschaftsgymnasium, an dem ich seit 20 Jahren Mathematik unterrichte, besitzt zurzeit 12 Klassen mit insgesamt etwa 60 Lehrkräften und 230 Studierenden. Die Schule wirbt in ihrer Informationsbroschüre „Die Maturitätsausbildung" mit folgendem Bildungsziel: „Das Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld vermittelt eine zeitgemässe, den Erkenntnissen moderner Didaktik verpflichtete *ganzheitliche Bildung*. Zwar setzt der Unterricht in Wirtschaft und Recht einen inhaltlichen Schwerpunkt; die ausgeglichene, fachlich anspruchsvolle sprachlich-historische, mathematisch-naturwissenschaftliche und musische Ausbildung gewährleistet jedoch, dass sich die Absolventinnen und Absolventen unserer Schule für die Aufnahme eines Hochschulstudiums irgendeiner Fachrichtung qualifizieren." (Gymnasien Bern-Neufeld 1998)

Dem Rahmenlehrplan untergeordnet ist der Schullehrplan des Wirtschaftsgymnasiums Bern-Neufeld (Wagner 1999, S. 12 / Anhang S. 289). Er stützt sich in seinen Richtzielen für den Mathematikunterricht auf den Rahmenlehrplan ab: „Die Gymnasiastinnen und Gymnasiasten sollen modulare und rein individuelle Problemlösungsstrategien entwickeln und Mathematik als Kulturgut der Vergangenheit und der Gegenwart erleben und erkennen lernen sowie im Mathematikunterricht Vertrauen in ihr eigenes Denken gewinnen."

Im Schullehrplan sind für jedes Unterrichtsfach Grobziele und Themenschwerpunkte festgelegt. Es fällt auf, dass diese für das Fach Mathematik fast ausschliesslich durch stoffliche Inhalte und Details geprägt sind. Einzig bei der Analysis lesen wir einen tiefer greifenden Inhalt: „… die Neuartigkeit und Genialität der Idee des Grenzprozesses erleben" (ebd.). Abgesehen davon ist der Bildungsgedanke gänzlich in die übergeordneten Zeilen delegiert.

4. Mathematikunterricht am Gymnasium

Wie sieht der übliche Mathematikunterricht am Gymnasium aus? Nach meinen Erfahrungen und Beobachtungen orientiert sich die Lehrkraft an den Lerninhalten, schaut, dass sie diese möglichst gut und lebendig ins Schuljahr integriert. Die (mehr oder weniger) verbreiteten Unterrichtsmethoden: Frontalunterricht, entdeckendes Lernen, Lernauftrag, Stationenlernen, Gruppenpuzzle, Werkstattunterricht, Projektunterricht, … verhelfen zwar zu einer variantenreicheren, vielfältigeren und lebendigeren Begegnung mit der Mathematik, aber die dritte Blickrichtung des Rahmenlehrplans (der Blick in die Ideengeschichte der Mathematik und deren Einbettung in die Kulturgeschichte und die Entwicklung von Wissenschaft und Technik) wird meistens nur kurz erwähnt oder bleibt ganz auf der Strecke. Auf Grund meiner langjährigen Erfahrung in der Betreuung von Junglehrern kann ich sagen, dass dieses Verhalten der Lehrkräfte (mindestens im Kanton Bern) einerseits deren eigener Unterrichtserfahrung entspricht und anderseits mit deren Ausbildung zusammenhängt, in welcher ihnen bestenfalls über einige Stationen der mathematischen Entdeckungen und Entwicklungen doziert wurde. Eine Vertiefung, oder gar das Erlebnis einer Wiederentdeckung, fand kaum statt. Es besteht somit bezüglich der dritten Blickrichtung eine grosse Inkongruenz zwischen Rahmenlehrplan einerseits und Unterrichtsrealität andererseits.

Aber erst wer an der Kultur- und Ideengeschichte der Mathematik Teil hatte und ein paar entscheidende Schritte der Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft selbst gegangen ist, kann deren wahre Bedeutung als eigenständige Disziplin wie auch als Teil der gesamten Bildung erfassen.

Der gymnasiale Unterricht der Sekundarstufe II steckt in einer „qualifikatorischen Doppelrolle“ (Leuders 2001, S. 51f):

„– Der Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe muss die Studierfähigkeit auch in naturwissenschaftlichen und technischen Berufen gewährleisten. Er spielt eine zentrale Rolle bei der Rekrutierung des (natur-)wissenschaftlichen Nachwuchses zum Wohle der gesamten Gesellschaft.
– Er muss andererseits allgemein bildend in dem Sinne sein, dass auch Schülerinnen und Schüler, die keine mathematischen Neigungen entwickelt haben, ein angemessenes Bild von der Mathematik aus der Schule mitnehmen, und zwar eines, das nicht durch Leistungsdruck, Überforderung und stoffliche Überfülle gekennzeichnet ist.“

Grundsätzlich sollen in der Schweiz alle Schülerinnen und Schüler mit der Matura für ein Hochschulstudium *irgendeiner* Fachrichtung qualifiziert sein. Die Anforderungen im Grundlagenfach sollten für alle gleich sein. Alle sollten gemäss ihren mathematischen Begabungen gefördert werden. Wer später nichts mehr mit höherer Mathematik zu tun haben wird, sollte wenigstens einigen der fundamentalen, über die Mathematik hinaus relevanten Grundideen, wie im Rahmenlehrplan gefordert, begegnet sein. Dabei soll erfahrbar werden, dass das mathematische Wissen wie dasjenige der anderen Wissenschaften in jahrtausendelangem Ringen der klügsten Köpfe entstanden ist und nie abgeschlossen sein wird. Nur so kann das Gymnasium *allen* Maturandinnen und Maturanden gerecht werden.

5. These und Prüffrage

Unter diesem Gesichtspunkt formuliere ich die folgende *These*:
Lehrstücke, wie sie seit über zehn Jahren in den von Professor Hans Christoph Berg geleiteten Lehrkunstwerkstätten entwickelt werden, sind sehr gut geeignet, die dritte Blickrichtung, also insbesondere den Blick in die Ideengeschichte der Mathematik und deren Einbettung in die Kulturgeschichte (vgl. S. 287), im Unterricht zu realisieren. Damit gelingt es der Lehrkunst-

methode mit ihren Lehrstücken die oben erwähnte Inkongruenz zwischen Rahmenlehrplan und Unterrichtsrealität zu beseitigen. Mit der Realisierung dieser dritten Blickrichtung kann auch erst die Mathematik als eigenständige Disziplin und damit die erste Blickrichtung, aufgeschlossen werden. Gleichzeitig erlaubt sie auch die zweite der im Rahmenlehrplan angesteuerten zentralen Grundkenntnisse – „Die wichtigsten Etappen der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik und ihre heutige Bedeutung kennen“ (vgl. S. 287) – auf lebendige Art zu vermitteln.

Für diese Dissertation ergibt sich die folgende *Prüffrage*:
Inwieweit kann die Lehrkunst mit ihren Lehrstücken den zentralen Punkt der angesprochenen dritten Blickrichtung des Rahmenlehrplans, die Ideengeschichte der Mathematik samt ihrer kulturellen Einbettung, in den Unterricht einbringen?

6. Bildungsrelevante mathematische Grundideen

Aber welches sind die bildungsrelevanten mathematischen Grundideen, insbesondere für die Sekundarstufe II? Auch wenn kein abschliessender Katalog vorliegt, so finden wir doch direkte Hinweise in der didaktischen Literatur, insbesondere bei Wagenschein (1980), Wittenberg (1990) und Heymann (1996). Insgesamt habe ich daraus zehn Grundideen zusammengestellt. Da die Studierenden Grundideen nicht einfach zur Kenntnis nehmen können, sondern diese in der Auseinandersetzung, im intensiven Ringen erfahren müssen, sind die folgenden zehn Grundideen entsprechend formuliert:

[1] *Denkgebäude*
Erfahren, dass Mathematik ein Denkgebäude auf klar definierten Grundlagen ist, bei dem man die Sätze begründen und voneinander ableiten kann, und dass dadurch ein höchstes Mass an Gewissheit erreicht wird.

[2] *Ideenwelt*
Erfahren, dass sich die Mathematik als abstrakte, theoretische Wissenschaft mit den idealen Gegenständen befasst, die als Ideen (Platon) hinter den real existierenden stehen.

[3] *Modellierung*
Erfahren, wie die mathematische Gesetzlichkeit mit der Natur eng korrespondiert und wie deshalb mit geeigneter Modellierung die abstrakte Mathematik über reale Gegenstände und Situationen präzise Aussagen herleiten kann.

[4] *Zahl*
Erfahren, dass Zahlen einerseits abstrakte Gebilde sind mit algebraischen Strukturen und Gesetzmässigkeiten, sowie vielen Geheimnissen, und dass sie anderseits unsere Alltagskultur durchdringen und mitbestimmen.

[5] *Messen*
Erfahren, dass wir erst mit dem Messen von Grössen unsere Welt quantitativ erfassen können, dabei aber an fundamentale Grenzen der Messbarkeit stossen.

[6] *Geometrisieren*
Erfahren, wie beim Geometrisieren, beim Strukturieren des Euklidischen Raumes, einfache Formen und ästhetische Prinzipien allgegenwärtig sind, die sich in arithmetisch-algebraischen und in räumlichen Gesetzmässigkeiten ausdrücken.

[7] *Funktion*
Erfahren, wie kraftvoll eine Formel, eine funktionale Abhängigkeit als kristallisierte Form mathematischer Intelligenz sein kann, um innermathematische Sachverhalte auszudrücken, aber auch um Abhängigkeitsbeziehungen aus unserem Alltag aufzuspüren und zu erfassen.

[8] *Algorithmus*
Erfahren, wie sich ein Algorithmus aufstellen und anwenden lässt, welche Vorteile, aber auch Grenzen ihm im Zusammenhang mit Computern gesetzt sind.

[9] *Unendlichkeit*
Erfahren, wie das „Unendliche" und die „Grenzprozesse" im Grossen wie im Kleinen gedanklich fruchtbar werden, in der Natur an Grenzen stossen und trotzdem die Realität beschreiben helfen.

[10] *Wahrscheinlichkeit*
Erfahren, dass das Mass der Unsicherheit mathematisch fassbar ist und damit das Ungewisse in spezifischer Weise berechenbar wird. (Wahrscheinlichkeitsrechnung)

In der Grundidee *„Denkgebäude"* ([1], s. o.) sind die beiden eng miteinander verbundenen Funktionsziele von Wagenschein (1980, S. 262f) zusammengefasst: „Die Einsicht in das Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten" und „zu erfahren, was es in der Mathematik heisst, einer Sache gewiss zu sein." Die Grundidee *„Ideenwelt"* [2] ist vor allem in der Geometrie zentral. Wittenberg (1990, S. 188) schreibt dazu: „Die Verschiebung unserer Betrachtung von den gezeichneten auf ideale Quadrate erzwingt eine entsprechende Änderung für alle übrigen geometrischen Figuren; das heisst für den gesamten Gegenstand der Geometrie. Es handelt sich hierbei um nichts Geringeres als eine regelrechte wissenschaftliche Revolution". Die Grundideen [3] – [8] habe ich direkt von Heymann (1996, S. 168ff) übernommen, der sich auf verschiedenste frühere Didaktiker beruft. Seiner tabellarischen Übersicht (ebd. S. 169) entstammen zusätzlich die letzten beiden Grundideen, *„Unendlichkeit"* und *„Wahrscheinlichkeit"*, welche auf der Sekundarstufe II ebenfalls thematisiert werden müssen.

Die Überprüfung der Leitfrage wird anhand von Lehrstücken stattfinden, welche sich im Curriculum meines Mathematikunterrichts etabliert haben, denn nur im konkreten Unterrichtsalltag können die leitenden Ideen der Mathematik zum Leben erwachen. In dieser Dissertation werde ich fünf von meinen sechs in den letzten zehn Jahren neu oder wesentlich weiter entwickelten Lehrstücken auf Grund der rund 30 Inszenierungen ausführlich darstellen. Das sechste Lehrstück, die Auseinandersetzung mit Wurzel 2, hat seine optimale Form noch nicht gefunden. Seine Darstellung hätte den Rahmen dieser Dissertation gesprengt und ist deshalb hier nicht ausführlich beschrieben, wird aber im Zusammenhang mit den Grundideen der Mathematik in die Diskussion einbezogen werden.

7. Fünf Lehrstücke der Mathematik

Zur Orientierung stelle ich die fünf in dieser Arbeit ausführlich präsentierten Lehrstücke je in einem kurzen Abschnitt vor:

(1) Quadrate vereinen – Quadrate entzweien (Pythagoras)

Schon Martin Wagenschein (1980, S. 251-267) hat der Umsetzung des Satzes von Pythagoras in den Unterricht im Zusammenhang mit dem exemplarischen Lehren einen längeren Abschnitt gewidmet. Mein Lehrstück umfasst 23 Lektionen auf der Stufe Quarta. In einem intensiven Prozess vereinigen wir die rund zwanzig vorhandenen Einzelquadrate zu einem einzigen Quadrat. Ein buntes Gemeinschaftswerk entsteht und dabei entdecken wir den Satz des Pythagoras. Der gefundene Weg wird genauer analysiert und erhebt sich damit zum Beweis. Da der Satz mit Pythagoras verbunden ist, steht dieser samt seiner Grundthese „Alles ist Zahl" für einen Moment im Zentrum. Eine reiche Vielfalt von Beweisen vertieft die Idee des Begründens und beleuchtet den zentralen Satz von verschiedenen Seiten. Der Beweis von Euklid bringt die Begegnung mit dem wegweisenden systematischen Aufbau der Mathematik, der vor mehr als 2300 Jahren von den Griechen geleistet wurde. Kathetensatz und Höhensatz ergänzen die Satzgruppe und leiten über zu einem Übungsblock mit Konstruktionen und Berechnungen. Die Quadraturfrage und zwei Erweiterungen des Satzes vervollständigen diese Unterrichtseinheit und führen zu den Ausgangsquadraten zurück.

(2) Primzahlen – Bausteine der Multiplikation

Auch zu diesem Lehrstück liefert Martin Wagenschein (1980, S. 228-236) die Grundlage mit seiner einzigen, durchgehend beschriebenen Unterrichtseinheit. Dieses Lehrstück, bei mir umfasst es 12 Lektionen auf der Stufe Quarta, rückt die Primzahlen als besondere und geheimnisvolle Zahlen ins Zentrum. Über eine alte Abstreichmethode und die entstehende Primzahltabelle erhebt sich die Frage nach der letzten Primzahl. Im intensiven gemeinsamen Prozess kristallisieren sich die Erkenntnis und damit der Beweis, dass es keine letzte Primzahl geben kann. Wir erfahren die Kraft gründlichen mathematischen Denkens, wie es bereits bei Euklid praktiziert wurde. Ein Vergleich der Formulierungen mit denjenigen bei Euklid und bei Wagenschein sowie einige weitere Aspekte der Primzahlen runden die Auseinandersetzung mit diesen faszinierenden Zahlen ab.

(3) Vom Würfel zur Kugel mit Archimedes

Mit drei Unterrichtsskizzen gab Martin Wagenschein Anstoss für dieses Lehrstück zur Stereometrie. Es umfasst etwa 23 Lektionen und positioniert sich am Ende der Quarta. Aus Ton entstehen die grundlegenden geometrischen Körper. Ihre gegenseitige Verwandtschaft weist uns den Zugang zu ihnen. Von den geradlinig begrenzten Körpern gelangen wir über die Annäherung an den Kreis und damit an die Zahl π ins Reich der durch Rundungen begrenzten Körper. Dabei begleitet uns Archimedes mit seinen genialen Entdeckungen und führt uns zu einfachen Zusammenhängen, sichtbar am Vollmond und an Gläsern, verankert in der entwickelten und jetzt einsichtigen Formeltabelle.

(4) Achilles und die Schildkröte

Zur Auseinandersetzung mit Reihen, mit Grenzwerten und mit der Unendlichkeit führt dieses Lehrstück von 19 Lektionen auf der Stufe Sekunda. Ausgangspunkt bildet die provozierende Geschichte von Zenon über den Wettlauf, in dem Achilles die Schildkröte nie einholen wird. Wir vertiefen uns in diese Geschichte, wodurch sich der Widerspruch zwischen unserem Denken und unserer bisherigen Erfahrung verschärft. Erst allmählich weicht die Verwirrung, können wir den Sachverhalt erklären und damit den scheinbaren Widerspruch auflösen. In der Auseinandersetzung mit dem Unendlichen im Endlichen öffnen sich neue Horizonte, das Verständnis für nicht abbrechende Prozesse wird erweitert. Zum Schluss festigen wir die neue Erkenntnis in einer erstaunlichen Vielfalt von Situationen mit derselben Problematik.

(5) Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Pascal

Anhand von Würfelspielen wird in diesem Lehrstück mit 8 Lektionen auf der Stufe Prima die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeit erfahrbar. Wir versetzen uns in einen Salon zur Zeit von Louis XIV und ergeben uns dem Würfelspiel. Dabei werden wir konfrontiert mit Spielausgängen, die unserem bisherigen Denken widersprechen. Mit Blaise Pascal sind wir aufgerufen, die Situation zu klären. Wir entwickeln eine neue Denkweise für den Umgang mit Wahrscheinlichkeiten, die uns hilft, viele weitere Probleme im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeiten zu verstehen und zu bewältigen.

8. Lehrstücke im Curriculum der Mathematik

Lehrkunstdidaktik ist Lehrstückdidaktik, und deshalb sollen die fünf ausführlich dokumentierten Lehrstücke im Zentrum stehen. Inzwischen haben sie sich als fester Bestandteil in meinem Methodenrepertoire eingewurzelt. Den Lehrstückunterricht finden wir auch bei Wiechmann (2000, S. 99-113) als eine der wichtigen Unterrichtsmethoden. In der heutigen Zeit ist es zwar unrealistisch, mit Wittenberg (1990, S. 11) „die Beschränkung des Unterrichts auf das bildungsmässig *wirklich* Bedeutsame“ zu fordern, aber wenn es gelingt, wenigstens 10 % des Unterrichts so zu gestalten, ist viel gewonnen. Mit meinen sechs Lehrstücken von der Quarta bis zur Prima erfasse ich inzwischen mit 90 von rund 500 Lektionen 18 % des Unterrichts. Allerdings sind drei dieser Lehrstücke in der Quarta angesiedelt. Unterrichte ich eine Klasse, die bei uns erst in der Tertia beginnt, so gibt es in jedem Schuljahr ein Lehrstück, der Lehrkunstanteil liegt mit 33 von etwa 325 Lektionen bei 10%.

Zum Überblick über meine bisherige Tätigkeit mit Lehrstücken und über ihre Positionierung innerhalb meines Unterrichts habe ich die folgenden drei Tabellen (S. 17-19) eingefügt:

(1) *Zehn Jahre Erfahrung mit Lehrstücken im Mathematikunterricht (1994-2003). Sechs Lehrstücke in dreiunddreissig Inszenierungen.* Diese Tabelle (Tab. 1, S. 17) zeigt die Stationen meiner Auseinandersetzung mit den Lehrstücken und mit der Lehrkunst. Sie begann 1994 mit der ersten Berner Lehrkunstwerkstatt und führte zur Publikation meines Lehrstücks zur Stereometrie (Berg/Schulze 1998, S. 217ff). Nach einem Unterbruch folgten ein viermonatiger Bildungsurlaub in Marburg und anschliessend eine intensive Phase der Weiterentwicklung dieser Lehrstücke im Unterricht. Als Co-Leiter der Lehrkunstwerkstatt V sammelte ich zusätzlich wichtige Erfahrungen. In den letzten beiden Jahren brachte die Arbeit an dieser Dissertation eine weitere Vertiefung. Ersichtlich wird in der Tabelle, wie die Lehrstücke mehr und mehr zum festen Bestandteil meines Unterrichts wurden. Inzwischen hat jedes der hier beschriebenen Lehrstücke meinen Unterricht mindestens viermal durchlaufen.

(2) *Sechs Lehrstücke im Mathematikunterricht des Wirtschaftsgymnasiums Bern-Neufeld.* In dieser Tabelle (Tab. 2, S. 18) ist ersichtlich, von wem Vorarbeiten zu den Lehrstücken geleistet wurden und welche Lehrpersonen von mir dieses Lehrstück in den Unterricht aufgenommen haben oder demnächst aufnehmen werden. Seit einem Jahr führe ich an unserer Schule für interessierte Fachkolleginnen und -kollegen Lehrstückpräsentationen durch. Zu meiner Freude erlebe ich momentan grosses Interesse an diesen Lehrstücken, so dass wohl bald weitere kollegiale Erprobungen stattfinden werden.

(3) *Lehrstückunterricht innerhalb der Methodenvielfalt meines Unterrichts am Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld (9. – 12. Schuljahr).* Diese dritte Tabelle (Tab. 3, S. 19) verdeutlicht die Positionierung der Lehrstückmethode innerhalb der Methodenvielfalt meines Unterrichts. Die Lehrstücke sind kulturelle Oasen, die innerlich einen mehr oder wenig starken Zusammenhang besitzen. Mein Unterricht lebt von der gezielten Methodenvielfalt, wobei der Unterrichtsgegenstand üblicherweise eine Methode nahe legt. Erstmals wird damit ein Überblick über die Methodenvielfalt geliefert, in dem sich auch die Lehrkunst gezielt neben anderen gängigen Methoden positioniert. Der Zusammenhang zwischen diesen Lehrstücken und deren Bedeutung im gesamten Curriculum wird später noch Thema sein.

Tabelle 1
Hans Brüngger
Zehn Jahre Erfahrung mit Lehrstücken im Mathematikunterricht
1994 - 2003
Sechs Lehrstücke in dreiunddreissig Inszenierungen

Jahr	**Pythagoras**	**Primzahlen**	**Würfel und Kugel**	**Wurzel 2**	**Achilles und die Schildkröte**	**Wahrscheinlichkeit**	**Σ**	**Lehrkunst-Stationen**
2003			* *	*	* *	*	**6**	Ende der Berner Lehrkunstwerkstatt V
2002	* *	* *	* *			* *	**8**	Einstieg ins Dissertationsseminar
2001	* *	* *		* *	* *	*	**9**	Beginn der Berner Lehrkunstwerkstatt V, Co-Leitung
2000						*	**1**	4 Monate Bildungsurlaub in Marburg
1999			* *		*	*	**4**	
1998								Publikation: „Vom Würfel zur Kugel“ (LeKuWe Band II 1998)
1997			* *				**2**	Ende der Berner Lehrkunstwerkstatt I
1996			* * *				**3**	Reise nach Sizilien / Inszenierung in Goldern (Archimedes)
1995								(Achilles und Schildkröte) / Würfel und Kugel
1994								Start der Berner Lehrkunstwerkstatt I
Σ	**4**	**4**	**11**	**3**	**5**	**6**	**33**	

Wahrscheinlichkeitsrechnung:
1999 bis 2001 nach Schudel/Krzensk
ab 2002 nach Brüngger

Tabelle 2
Hans Brüngger
Sechs Lehrstücke im Mathematikunterricht des Wirtschaftsgymnasiums Bern-Neufeld (9. – 12. Schuljahr)

PRIMA	**Differential-Rechnung (II)**	**Wahrscheinlichkeits-rechnung**	**Exponential- und Logarithmus-funktionen (II)**	**Integral-rechnung**	***Repetition***	***Matura***
		Su Kr / **Geburtsstunde WR** / Sr Rh				
SEKUNDA	**Exponential- und Logarithmus-funktionen (I)**	**Vektoren (II)**	**Folgen und Reihen**	**Differential-rechnung (I)**		
			Achilles und die Schildkröte			
TERTIA	**Quadratische Gleichungen und Funktionen**	**Trigonometrie**	**Potenzen**	**Vektoren (I)**	**Kombinatorik**	
	Wa Pa Au / **Wurzel 2**					
QUARTA	**Pythagoras**	**Zahlmengen**	**Bruchterme, Gleichungen**	**Strahlensätze, Streckung, Ähnlichkeit**	**Funktionen, Gleichungs-systeme**	**Stereometrie**
	Wa Nö / **Quadrate vereinen-entzweien** / **Rh Sö**	**Wa We** / **Prim-zahlen** / **Wd**				**Wa** / **Vom Würfel zur Kugel**

Linke Seite: Lehrstückvorlagen von
Au Carsten Aulbach
Kr Barbara Krzensk
Nö Beate Nölle
Pa Petra Pauli
Su Rolf Schudel
Wa Martin Wagenschein
We Wilhelm Werner

Rechte Seite: Kollegiale Erprobungen in Bern durch
Rh Heiner Rohner
Sö Bärbel Schöber
Sr Klaus Stalder
Wd Daniel Wieland

Lehrstückunterricht innerhalb der Methodenvielfalt meines Unterrichts am Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld (9. - 12. Schuljahr)

Tabelle 3
Hans Brüngger

Klasse	Differential-rechnung (II)		Wahrscheinlich-keitsrechnung		Exponential- und Logarithmus-funktionen (II)	Integral-rechnung	*Repetition*	*Matura*
PRIMA (110 Lektionen)	NU (12 L)	ID (6 L)	LSt: Wahrsch. (8 L)	NU (24 L)	NU (20 L)	NU (20 L)	(20 L)	

Klasse	Exponential- und Logarithmus-funktionen (I)	Vektoren (II)	Folgen und Reihen		Differential-rechnung (I)
SEKUNDA (100 Lektionen)	NU (30 L)	WP (12 L)	LSt: Achilles (17 L)	NU (10 L)	NU (31 L)

Klasse	Quadratische Gleichungen und Funktionen				Trigonometrie	Potenzen	Vektoren (I)	Kombinatorik	
TERTIA (120 Lektionen)	NU (12 L)	LSt: Wurzel2 (8 L)	GP (4 L)	NU (10 L)	NU (30 L)	WP (20 L)	WP (18 L)	StA (3 L)	NU (15 L)

Klasse	Pythagoras	Zahlmengen		Bruchterme, Gleichungen	Strahlensätze, Streckung, Ähnlichkeit	Funktionen, Gleichungs-systeme	Stereometrie
QUARTA (170 Lektionen)	LSt: Pythagoras (22 L)	NU (15 L)	LSt: Primzahlen (12 L)	NU (40 L)	NU (30 L)	NU (28 L)	LSt: Vom Würfel zur Kugel (23 L)

NU Normalunterricht: Lehrergeleitetes, entdeckendes Lernen mit Arbeits- und Theorieblättern gestützt
LSt Lehrstückunterricht
StA Stationenarbeit
WP Wochenplan
ID Interdisziplinäres Projekt Mathematik-Wirtschaft
GP Gruppenpuzzle

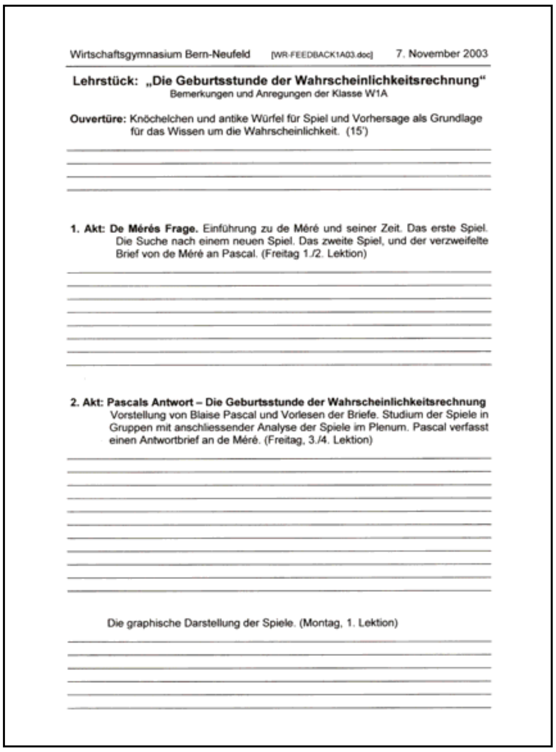
Als ergänzende Information zu den vorangegangenen Tabellen braucht es die Lektionentafel des Wirtschaftsgymnasiums Bern-Neufeld, welche besagt, wie viele Wochenlektionen einer Klasse für die Mathematik zur Verfügung stehen. Unter Berücksichtigung der üblichen Ausfälle durch Feiertage, Studienwochen, Exkursionen, Maturitätsprüfungen, Konferenzen und Konzerte lässt sich die ungefähre Anzahl der Mathematiklektionen semesterweise und gesamthaft ermitteln.

Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld: Lektionentafel **Tabelle 4**

	QUARTA		TERTIA		SEKUNDA		PRIMA		Total
Semester	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	
Anzahl Wochenlektionen	5	5	4	3	3	3	4	4	31
Lektionenzahl	100	70	80	40	60	40	60	50	500

9. Feedback der Schüler

Am Ende jedes Lehrstücks machte ich mit der Klasse einen Rückblick, um das ganze Lehrstück nochmals zu vergegenwärtigen. Anschliessend verteilte ich einen doppelseitigen Fragebogen, der während der Lektion in etwa 15 Minuten auszufüllen und anschliessend mit oder ohne Name abzugeben war. Abgebildet ist hier als Muster der Feedbackbogen, den ich im November 2003 am Ende des Lehrstücks zur Wahrscheinlichkeitsrechnung einsetzte. Um gezielte Rückmeldungen zu erhalten, sind die wesentlichen Stationen des Lehrstücks unter Angabe des Inhalts und der entsprechenden Lektionen aufgeführt. Die Schlussfrage zielt immer auf eine Gesamtbeurteilung, auf Optimierungsvorschläge und auf zusätzliche Bemerkungen und Anregungen.



Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [WR-FEEDBACK1A03.doc] 7. November 2003

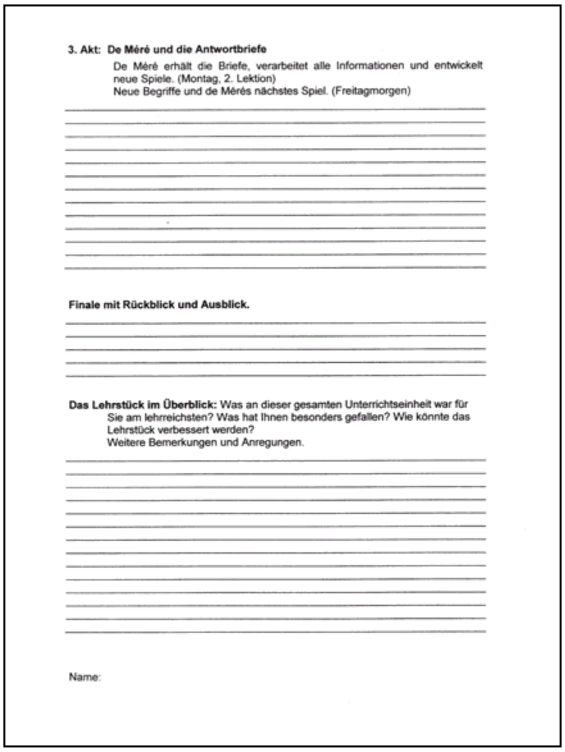
Lehrstück: „Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung"
Bemerkungen und Anregungen der Klasse W1A

Ouvertüre: Knöchelchen und antike Würfel für Spiel und Vorhersage als Grundlage für das Wissen um die Wahrscheinlichkeit. (15')

1. Akt: De Mérés Frage. Einführung zu de Méré und seiner Zeit. Das erste Spiel. Die Suche nach einem neuen Spiel. Das zweite Spiel, und der verzweifelte Brief von de Méré an Pascal. (Freitag 1./2. Lektion)

2. Akt: Pascals Antwort – Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung Vorstellung von Blaise Pascal und Vorlesen der Briefe. Studium der Spiele in Gruppen mit anschliessender Analyse der Spiele im Plenum. Pascal verfasst einen Antwortbrief an de Méré. (Freitag, 3./4. Lektion)

Die graphische Darstellung der Spiele. (Montag, 1. Lektion)



3. Akt: De Méré und die Antwortbriefe
De Méré erhält die Briefe, verarbeitet alle Informationen und entwickelt neue Spiele. (Montag, 2. Lektion)
Neue Begriffe und de Mérés nächstes Spiel. (Freitagmorgen)

Finale mit Rückblick und Ausblick.

Das Lehrstück im Überblick: Was an dieser gesamten Unterrichtseinheit war für Sie am lehrreichsten? Was hat Ihnen besonders gefallen? Wie könnte das Lehrstück verbessert werden?
Weitere Bemerkungen und Anregungen.

Name:

Diese Rückmeldungen habe ich bei jedem meiner dargestellten Lehrstücke in einer Feedbacktabelle zweidimensional zusammengestellt, geordnet nach Schülern und Unterrichtsphasen. Auch wenn die Gymnasiastinnen und Gymnasiasten, besonders im 9. Schuljahr, noch jung und das Reflektieren nicht gewöhnt sind, ergeben sich doch interessante Hinweise über das Ergriffensein und den Lernprozess einzelner Schüler und Schülerinnen einerseits, über die verschiedenen Unterrichtsteile und die Gesamtkomposition andererseits.

10. Die Lehrstücke in der Fachschaft

Zum Anlass einer von der Schulleitung verordneten Gesamtfachschaftssitzung zum Thema „Qualitätsentwicklung und Feedbackkultur an unserer Schule" habe ich als Fachschaftsobmann die besonderen Beispiele des Methodenrepertoires des Wirtschaftsgymnasiums zur Anregung ausgelegt. In der Folgezeit habe ich alle fünf Lehrstücke einigen meiner Fachkollegen vorgestellt oder sie sogar mit ihnen zusammen oder bei ihnen im Unterricht inszeniert. Aus anderen Bereichen sind bisher noch keine Präsentationen erfolgt, auch wenn folgende bereits angekündigt wurden: Eine zum Einsatz des Taschenrechners TI 89 im Unterricht und eine zum Fächer übergreifenden Projekt zu den Kostenfunktionen. Eine kurze Übersicht mag meine Präsentationen verdeutlichen:

Lehrstückpräsentationen in der Fachschaft **Tabelle 5**

Lehrstück	Datum		beteiligte Kollegen
Pythagoras	04. Dezember 2002	Präsentation	Ae, Rh, Sp, Wd
Primzahlen	15. November 2002	Präsentation	Rh, Sr, Wd
Vom Würfel zur Kugel	12. Dezember 2003 12. Januar 2004	Präsentation Präsentation	Ad, Ae, Hb, Sö, Se Ge, Le, Rh, Sr, Ri
Achilles und Schildkröte	19. Februar 2003	Präsentation	Rh, Wd
Wahrscheinlichkeit	26. Nov. – 03. Dez. 2002 02. Dez. – 11. Dez. 2002 31. Okt. – 07. Nov. 2003 19. Nov. – 01. Dez. 2003	Inszenierung Inszenierung Inszenierung Inszenierung	Bn, Sr Sr Bn, Rh Sr

Somit gibt es auch von Seite der Kollegen Rückmeldungen und Anregungen. Zudem ist damit ein wesentlicher Beitrag zur Schulentwicklung geleistet. Durch diese Kollegienarbeit und natürlich durch die seit 1994 fortlaufend stattfindenden Lehrkunstwerkstätten sind bereits über 20 Lehrpersonen der Gymnasien Bern-Neufeld mit der Lehrkunst in Kontakt gekommen. Viele von ihnen setzen eines oder mehrere Lehrstücke regelmässig im Unterricht ein. Einigen Klassen ist deshalb die Lehrkunst als Unterrichtsmethode inzwischen ein Begriff.

11. Zusammenfassung und Ausblick

In diesem ersten Teil wurde die Lehrkunstdidaktik kurz umrissen und die gymnasiale Bildungslandschaft mit dem Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld vorgestellt. Dies führte auf die zentrale Frage nach der Ideengeschichte und ihrer Verlebendigung durch Lehrstücke im gymnasialen Mathematikunterricht. Zehn Grundideen der Mathematik wurden formuliert. Ihre Präsenz in fünf ausführlich exponierten Lehrstücken meines methodischen Unterrichtsrepertoires wird im zweiten Teil untersucht. Anschliessend werde ich im dritten Teil die verschiedenen angesprochenen Aspekte zusammenfassen und in einer Schlussbilanz bündeln. Die bisher vorliegenden Erfahrungen sind sehr erfreulich. Auch Peter Bonati kommt in seinem lesenswerten Kontrapunkt eines „critical friend" (Bonati 2003, S. 61-76) zu einer positiven Bilanz, insbesondere für Lehrstücke auf der Sekundarstufe II.

II. Fünf Mathematiklehrstücke am Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld

Um die nachstehend dargestellten Unterrichtseinheiten vertiefter als Lehrstücke zu verstehen und später die Leitfrage beantworten zu können, wählte ich für die Darstellung der Lehrstücke die folgende Gliederung. Die Reihenfolge ist immer dieselbe, die Nummern sind zum Teil unterschiedlich, da nicht bei jedem Lehrstück entsprechende Vorlagen bestehen und eher selten über Weiterführungen berichtet werden kann.

1. Einleitung
Die Einleitung liefert eine inhaltliche und atmosphärische Einstimmung ins Lehrstück. Diese ist oft verbunden mit Hinweisen auf den Entstehungsprozess und auf die Bedeutung des Unterrichtsthemas.

2. Vorlagen zum Lehrstück
Die Vorlagen für das Lehrstück werden dargelegt und es wird gezeigt, welche Überlegungen zur Struktur meines Lehrstücks geführt haben.

3. Struktur des Lehrstücks
Aus der Arbeit mit den Vorlagen, aus Unterrichtserfahrungen und aus Gesprächen im Rahmen einer Lehrkunstwerkstatt ergibt sich nach und nach die bündige Struktur des Lehrstücks.

4. Unterrichtsgang
Im beschriebenen Unterrichtsgang wird eine lebendige Inszenierung dargestellt. Der Bericht wird unterbrochen durch Metareflexionen und kursive Anmerkungen, was in einer künftigen Durchführung zu beachten oder zu verbessern ist.

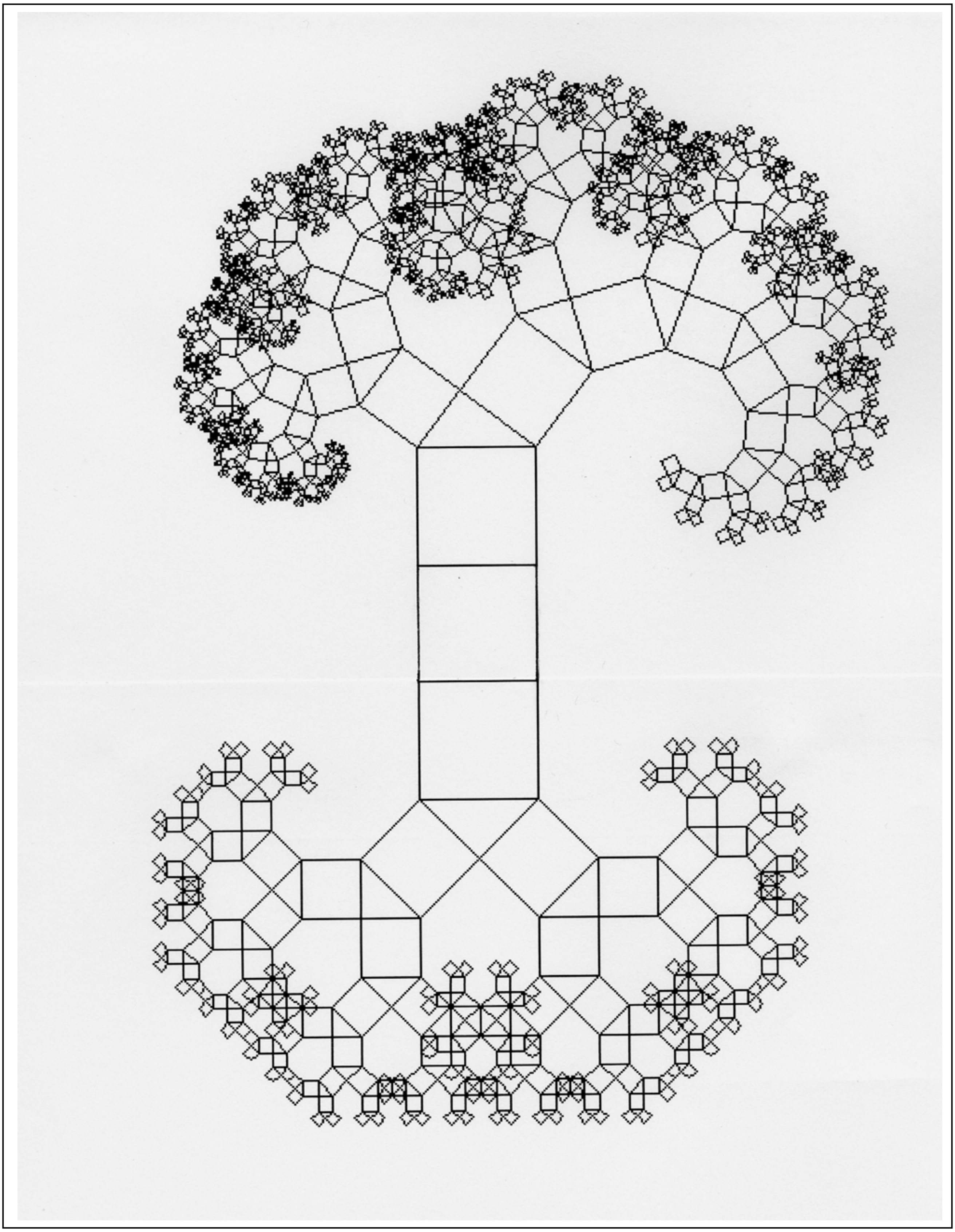
5. Weiterentwicklungen des Lehrstücks
Die beschriebenen Lehrstücke sind zwar gereift und mehrfach bewährt, aber trotzdem nicht als Endprodukte zu verstehen. Weitere Erprobungen und Optimierungen sind erwünscht. Erst wenn ein Lehrstück von mehreren Lehrkräften mehrfach inszeniert worden ist, besteht die Gewähr, dass es Bestand haben wird.

6. Feedback der Schüler zum Lehrstück
Das gezielte Schülerfeedback, eingeholt unmittelbar am Ende des Lehrstücks, ist in einer übersichtlichen Tabelle zusammengestellt. Es vermittelt einen direkten Eindruck, wie das Lehrstück bei den Schülerinnen und Schülern ankommt.

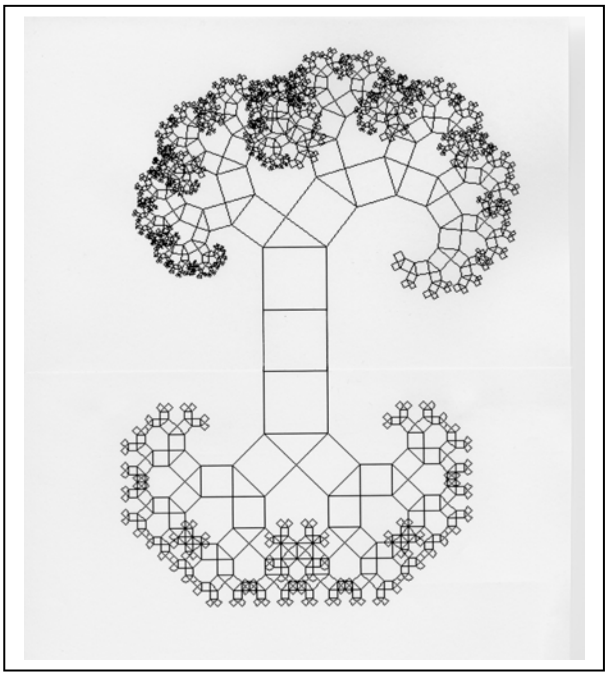
7. Didaktische Interpretation
Die didaktische Interpretation verweist auf den tieferen Bildungsinhalt der Thematik, auf die verschiedensten inhaltlichen Bezüge und auf die Komposition des Lehrstücks.

8. Das Lehrstück in der Fachschaft
Verschiedene Fachkollegen an den Gymnasien Bern-Neufeld haben Lehrstückspräsentationen beigewohnt oder sogar ein Lehrstück selbst inszeniert. Davon erzählen die Reaktionen.

9. Die Ideengeschichte im Lehrstück
In diesem letzten Abschnitt wird das Lehrstück auf die Umsetzung der zehn mathematischen Grundideen (vgl. S. 13f) untersucht.



1. QUADRATE VEREINEN - QUADRATE ENTZWEIEN
Ein Lehrstück zum Satz des Pythagoras für die 9. Klasse des Gymnasiums



1.1 Einleitung

Wer hat nicht schon als Kind Papierquadrate zerschnitten und wieder zusammengesetzt, Tangramfiguren gelegt, sich an Zusammensetzspielen geübt oder einen zerbrochenen Topf in die ursprüngliche Form gebracht. Quadrate vereinen, Quadrate entzweien, Figuren verwandeln bis zur Quadratur des Kreises: Themen, die sich durch die ganze Mathematikgeschichte hindurch ziehen. Aus derartigen Fragen könnte der Satz des Pythagoras, einer der ältesten mathematischen Sätze und wohl der berühmteste, ans Licht gekommen sein. Sicher ist, dass er über Jahrtausende zum Nachdenken angeregt hat. Zwar ist er ein elementarer Satz, aber dennoch nicht unmittelbar einsichtig; er ruft nach einer klaren Begründung, nach einem *Beweis*. Wir erfahren die verschiedensten Beweisverfahren: sowohl algebraische als auch geometrische durch Zerlegung, Verwandlung, Ergänzung. Klares Argumentieren und das Beweisen als solches werden wesentlich. Noch heute fühlen sich Mathematiker wie Laien herausgefordert, zu den rund 400 bestehenden Beweisen einen neuen hinzuzufügen. Mit dem vor 2300 Jahren verfassten Beweis in Euklids Werk „Die Elemente“, lernen wir das dauerhafteste wissenschaftliche Buch kennen, worin diese Beweiskultur und damit verbunden der strenge strukturelle Aufbau einer Wissenschaft erstmals in überzeugender Art präsentiert wird. Definitionen, Axiome und Postulate bilden das Fundament, aus dem sich mit logischen Argumenten die ganze Euklidische Geometrie entwickelt hat. Dieser Aufbau diente immer wieder als Modell für andere Gebiete der Mathematik, aber auch für andere Wissenszweige. Da der rechte Winkel etwas Besonderes ist, findet dieser zentrale Satz des Pythagoras Anwendung in den verschiedensten Gebieten innerhalb und ausserhalb der Mathematik.

1.2 Vorlagen von Martin Wagenschein und Beate E. Nölle

Zum Satz von Pythagoras gibt es Vorlagen bei Martin Wagenschein und bei Beate E. Nölle.

Bei Wagenschein (1980, S. 251-267) wird der Satz des Pythagoras als Paradebeispiel für exemplarisches Lehren dargestellt. Er präsentiert zwei Wege des Einstiegs:
a) Das Seilspannerprinzip, das über die Zahlen, auch über die Pythagoräischen Zahlentripel, auf die Gesetzmässigkeit am rechtwinkligen Dreieck führt und durch Veranschaulichung zur Pythagorasfigur fortschreitet.
b) Die Art eines Legespiels, bei dem ein grosses Quadrat in geeignete Stücke zerschnitten werden soll, um anschliessend zwei kleine Quadrate herzustellen. Die Zerlegung ist allerdings schwierig, lässt sich nur schwer erringen, da der Sprung zur Lösung zu gross ist. Hier könnte der Weg über den einfachen Spezialfall – die Diagonalschnitte führen zu zwei gleich grossen kleinen Quadraten – bei der Bewältigung des allgemeinen Falls hilfreich sein.

Bei beiden Einstiegen muss der Lehrer „verhältnismässig stark führen“ (ebd. S. 255). Bei der Vorbereitung meines Lehrstücks bin ich zur Überzeugung gelangt, dass es einfacher und organischer ist, zwei Quadrate zu vereinen, als zu entzweien. Die langwierige Schnippelei ist geblieben, „sie muss wirklich getan werden“. Allerdings nicht nur „ihrer Vergeblichkeit willen“, es gibt bei meinem Ansatz durchaus Fortschritte, Erfolge. Das Problem ist lösbar!
Ein bewegliches Holzmodell konnte ich zusammenbauen, die elegante Version mit einem einzigen Seilzug habe ich allerdings noch nicht geschafft. Ob es sie je gegeben hat?
Für den Nachdenklichen bei Wagenschein (ebd. S. 256f) kommt jetzt die Frage: „Ist es denn auch *wahr*?“ – „Man sah, dass es ‚so kommt’, so zu kommen scheint. Man sah noch *nicht*, das es auch so kommen *musste*.“ – „Mit dem Nachdenken erst über solche Fragen *beginnt* ‚Mathematik’ und beginnt der ‚*Beweis*’.“ Um diese Einsicht zu vermitteln, zeigt Wagenschein, wie sich der Beweis auf die Winkelsumme im Dreieck und diese auf der Existenz von Parallelen abstützen lässt. Damit wird am Beispiel deutlich, und nur am Beispiel kann es klar werden, was er später (ebd. S. 262) als ein ‚Funktionsziel’ der Mathematik bezeichnet, nämlich: „Diese Einsicht in das Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“. Zudem nähern wir uns auch seinem zweiten Funktionsziel (ebd. S. 263): „Zu erfahren, was es in der Mathematik heisst, einer Sache gewiss zu sein.“ Damit endet bei Wagenschein die Unterrichtsskizze.

Frau Nölle hat in einer 8. Klasse ein Lehrstück zum Satz des Pythagoras durchgeführt und beschreibt diese Inszenierung im Buch Lehrkunstwerkstatt I (Berg/Schulze 1997, S. 37 – 80) unter dem Titel „Dreiecksquadrate“. Im I. Akt beginnt sie zweigleisig mit den ägyptischen Seilspannern und mit dem Zauberer, der zwei Quadrate an der Tischecke zu einem einzigen vereint, wodurch auch gerade die typische Pythagorasfigur mit dem rechtwinkligen Dreieck im Zentrum aktuell wird. Die zwei Richtungen der Äquivalenzaussage sind für die Schülerinnen und Schüler kaum ein Thema. Erfreulich klar drängt sich dafür die durch Nikola formulierte Frage nach der Allgemeingültigkeit auf. Zudem findet hier Pythagoras mit seiner Lehre einen würdigen Platz. Im II. Akt macht Nölle mit ihrer Beweisvielfalt und mit den eindrücklichen Verwandlungsstudien der Dreiecksquadrate nach Wyss den „Beziehungsreichtum des Satzes … erfahrbar.“ (ebd. S. 45) Anstelle des Symmetriebeweises würde ich allerdings den sinnfälligeren und unmittelbarer mit der Pythagorasfigur verbundenen Ergänzungsbeweis vorziehen. Den Ähnlichkeitsbeweis nach Willmann zu bringen ohne vorgängige Behandlung des Kapitels Ähnlichkeit in der Geometrie, ist heikel. Dass ein Lieblingsbeweis gewählt wird und diese Wahl in einem Brief an den Zauberer Pythagoras begründet wird, gefällt mir sehr gut, denn es findet dabei individuell nochmals eine Vertiefung des Verständnisses und eine Auseinandersetzung mit dem eigenen Lernprozess statt. Die Auswertungssitzung rundet bildlich und im Metagespräch das ganze Lehrstück vor den Ferien ideal ab, auch wenn später noch die nötigen Anwendungen des Satzes folgen.

1.3 Struktur des Lehrstücks

Für ein Lehrstück mit meinen Schülerinnen und Schülern, die erst seit kurzem aus den verschiedensten Sekundarschulen zu mir in die 9. Klasse, die Quarta des Gymnasiums, kommen und mehr oder weniger vom Satz des Pythagoras gehört haben, hat sich die folgende Lehrstückstruktur herauskristallisiert.

I. Akt: Quadrate vereinen und entzweien

Im gemeinsamen Prozess stellen wir uns dem Problem, etwa 20 Quadrate zu einem einzigen Quadrat zu vereinen. Dabei wird ein Beweis des Satzes von Pythagoras entdeckt. Wir studieren das Vereinen und Entzweien von Quadraten.

II. Akt: Pythagoras und „sein" Satz

Exemplarisch ergründen wir den von uns entdeckten Beweis und wenden den Satz erstmals an. Ein Anhänger der pythagoräischen Lehre tritt auf und berichtet über Pythagoras und seine Lehre.

III. Akt: Beweisvielfalt

Verschiedene Beweise werden individuell studiert, in Kleingruppen vertieft und dann der Klasse präsentiert. Der Kathetensatz taucht auf. Wir finden Gemeinsamkeiten und Unterschiede der verschiedenen Beweise. Jeder Schüler wählt sich seinen Lieblingsbeweis.

IV. Akt: Die Beweisführung als Prinzip in den „Elementen" des Euklid

Der Beweis von Euklid wird analysiert. Was ist ein Beweis? Das Euklidsche Beweisverfahren: Voraussetzung – Behauptung – Beweis. Die „Elemente" von Euklid bestimmen Grundlagen und Aufbau der „euklidschen" Geometrie. Hinweis auf andere Geometrien! Querblicke in die Naturwissenschaften, in die Philosophie, ins Rechtswesen, . . .

V. Akt: Übung führt zu Vertrauen in die geschaffenen Pfade

Der Höhensatz vervollständigt die Satzgruppe des Pythagoras.
Es folgen Übungsaufgaben: Konstruktionen, Wurzelgesetze, Berechnungen.

VI. Akt: Das grosse Finale zum Satz des Pythagoras

a) Klassische Verwandlungsaufgaben: Quadrate, Rechteck, Dreieck und beliebiges Vieleck verwandeln wir in ein Quadrat. Die Quadratur des Zirkels als unlösbares Problem und die Möndchen des Hippokrates.
b) Verallgemeinerung des Satzes auf beliebige Dreiecke nach Wyss.
c) Wurzelschnecke und Quadratschnecke schliessen den Kreis.

Abschluss:

Das Schlussbild gibt Anlass für einen Rückblick auf das Lehrstück und Reflexion auf der Metaebene. Das Lehrstück bietet Erfahrung der Entwicklung und Aneignung von Mathematik, ein Probemenu der Mathematik. Angestrebt ist eine ausgewogene Mischung von Phantasie und Denken, von Experimentieren und exaktem Handwerk, von freiem Suchen und strengem Üben. Es besteht differenzierte Möglichkeit beidseitiger Rückmeldungen.

Im I. Akt wähle ich den Zugang zum Satz des Pythagoras über das Vereinen der Quadrate. Allerdings möchte ich die Mathematik nicht als Zauberei darstellen, was sie für verschiedene Schüler ohnehin schon ist, sondern über ein herausforderndes Problem einsteigen, das mit Nachdenken, Ausprobieren und strategischem Vorgehen gemeinsam lösbar wird. Das Vereinen der Quadrate ist einfacher als das Entzweien bei Wagenschein und diejenigen Schülerinnen und Schüler, die dem Satz des Pythagoras bereits in der Sekundarschule begegnet sind, geniessen absolut keinen Vorteil. Ich habe sogar mit Lehramtsstudenten in Marburg, mit ausgebildeten Mathematik- und anderen Lehrkräften in Bern, Luzern und Trogen diesen Einstieg erprobt und alle zum intensiven Nachdenken und Ausprobieren angeregt. Das eigene Schnippeln und Probieren erachte ich mit Wagenschein (1980, S. 255) und mit Nicole bei Nölle (Berg/Schulze 1997, S. 74): „…gerade durch das Schneiden, Legen und eigene Probieren beim ersten Beweis habe sich der Weg bei ihr erst richtig eingeprägt. Zustimmendes Nicken in der Runde einschliesslich der anwesenden Erwachsenen.“ als eine wichtige Erfahrung. Aus diesem ersten Prozess ergibt sich derjenige Beweis, der Beweis des Anairizi, den wir gemeinsam intensiver analysieren, an dem exemplarisch das „Beweisen als ein Mittel, verstehen zu lernen“ (Berg/Schulze 1997, S. 75) ins Zentrum rückt. Wie bei Nölle folgen Pythagoras und seine Lehre. Die Hinführung auf die Äquivalenzaussage dieses Satzes scheint mir in diesem Lehrstück bei den sechzehnjährigen Jugendlichen verfrüht, müssen sie doch vorerst einmal mit der Grundidee des Beweisens bekannt werden.

Die Beweisvielfalt ist bei mir noch ausgeprägter als bei Nölle. Meine Schülerinnen und Schüler des 9. Schuljahrs können mit dem eigenen Analysieren und Präsentieren stärker gefordert werden. Ein Übungsfeld entsteht und die Palette individueller Zugänge zum Beweis wird grösser. Die Idee des Lieblingsbeweises, wie sie Nölle durchführt, finde ich genial. Ich verlange sogar, dass er gelernt wird. Dabei geht es ja nicht um das blosse Auswendiglernen eines Textes, sondern um die Auseinandersetzung und das Einprägen einer logischen Gedankenkette. Gerade dies ist ja fundamentale Mathematik. Mit dem Beweis des Euklid gelange ich organisch in die „Elemente“ zum Aufbau der Euklidischen Geometrie und damit zu einem von Wagenschein formulierten „Funktionsziel“ des mathematischen Unterrichts, die „Einsicht in das Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“ (1980, S. 262). Wir wagen einen Blick in die Tiefe zu den Fundamenten und wieder zurück auf das erste Hochplateau mit dem Satz des Pythagoras, aber auch einen Blick in die Breite, in andere Wissensgebiete, wo es nicht dasselbe Mass an Gewissheit gibt wie in der Mathematik. Ein weiteres „Funktionsziel“ von Wagenschein (ebd. S. 263) ist angesprochen.

Anschliessend folgt bei mir ein grösserer Block von geometrischen und algebraischen Übungen und Anwendungen samt den dazu notwendigen Wurzelgesetzen. Diesen Teil habe ich ins Lehrstück integriert. Viele Schülerinnen und Schüler sind froh, dass sie die Sätze *endlich* anwenden dürfen. Wir haben hier eine Grundsatzfrage: Werden Übungsaufgaben ins Lehrstück integriert oder im Nachgang bearbeitet? Diese Frage muss je nach Lehrstück und Umstände beantwortet werden. Bei Nölle drängte sich ein Abschluss ohne Übungsphase vor den Ferien auf. In einem längeren Lehrstück kann eine eingeschobene Verarbeitungsphase vorteilhaft sein. Die Fortsetzung des Gesamtprozesses bis zum Abschluss wird allerdings erschwert, sie muss gewährleistet bleiben. Die Ausweitung mit dem klassischen Quadraturproblem und die Verwandlungsstudien von Wyss öffnen das Feld und führen zum bildlichen Abschluss mit Überblick und Feedback über den ganzen Prozess.

Bei Nölle braucht das Lehrstück 19 Lektionen, bei mir 23 Lektionen. Der Unterschied liegt vor allem im ausgedehnteren Übungsteil samt Wurzelgesetzen und in der Vertiefung mit den „Elementen“ des Euklid.

Bezug nehmend auf die sechs Stufen des Kennens von Wagenschein (S. 265) ergibt sich:

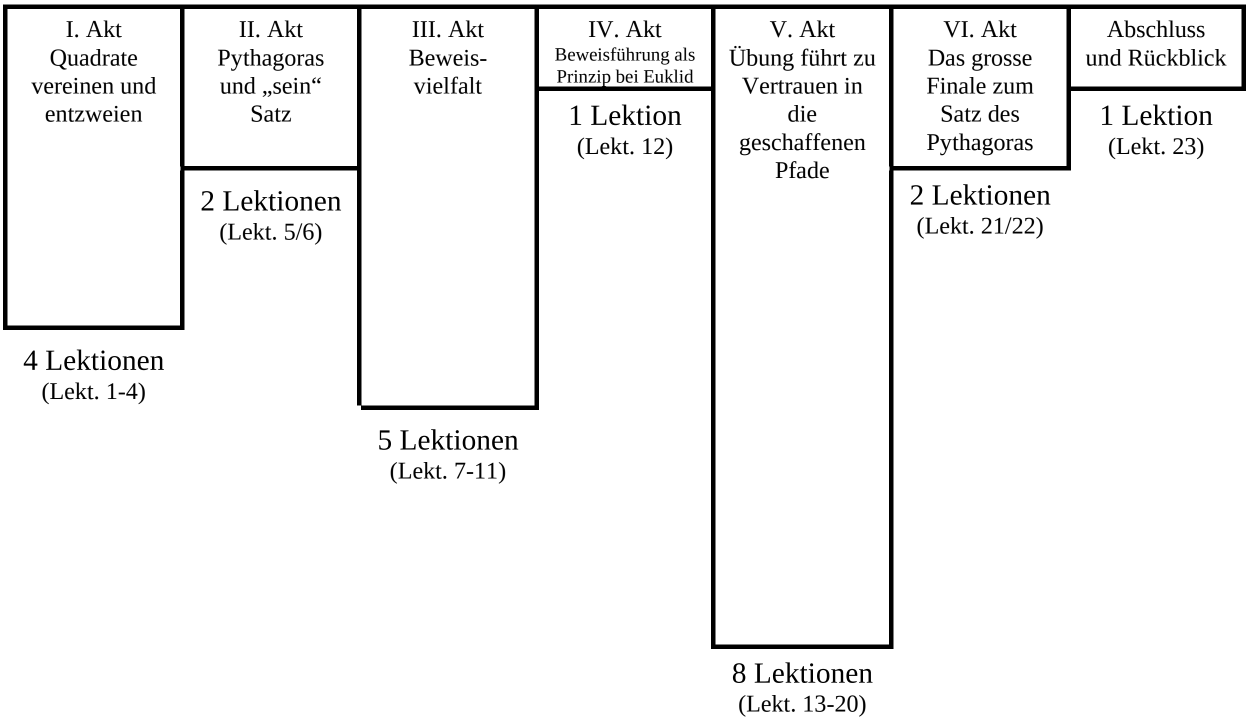
A. Lokale Kenntnis	
I. nur verbal (im Wortlaut)	Dies ergibt sich nebenbei.
II. nur technisch (verfügbar)	Dies wird in einem ausgedehnten Übungsteil erarbeitet.
III. einsichtig (verstehend)	Dies geschieht durch Erarbeitung der Vereinigung der Quadrate, eingehende Vorbereitung und Präsentation von Beweisen und am meisten durch das Lernen des Lieblingsbeweises, der jedem den individuell einsichtigsten Weg erschliesst.
B. Exemplarische Kenntnis:	
IV. fachmethodische Schulung	Im Vorbereiten und Präsentieren, im Mitvollziehen und im Aneignen des Lieblingsbeweises lernen die Schülerinnen und Schüler das Beweisen.
V. neue Stoffe (systematisch angliedern)	Innerhalb des Lehrstücks können nur erste Ausblicke eröffnet werden mit Verallgemeinerungen in die Kreisberechnung (Zahl π), in die Ähnlichkeitslehre und in die Trigonometrie. Der Aufbau der Geometrie verweist auf andere Wissenschaften.
VI. Wissenschaftstheoretische (kategoriale) Betrachtung	Anhand der Beweise von Anairizi und Euklid befassen wir uns mit den grundsätzlichen Fragen von Beweisen, von Gewissheit und vom „Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“.

1.4 Unterrichtsverlauf: 23 Lektionen in der Quarta

Im Folgenden wird eine Inszenierung des Lehrstücks in 23 Lektionen beschrieben. Die Klasse 4B hat vor drei Monaten, im August 2002, neu am Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld die Quarta, unser 9. Schuljahr, begonnen. Die 6 Schülerinnen und 13 Schüler kommen aus verschiedensten Schulen mit ganz unterschiedlichen Vorbereitungen. Erfahrungsgemäss haben einige von ihnen bereits den Satz des Pythagoras kennen gelernt und evtl. sogar ein wenig damit gearbeitet, für andere ist dies Neuland. Die Klasse ist wenig leistungsorientiert und neigt zu Unkonzentriertheit. Deshalb sind Gruppenarbeiten und Phasen des individuellen Arbeitens besonders heikel.

Nachdem wir uns vorwiegend mit Zahlmengen, Bruchtermen, algebraischen Umformungen und dem Lösen von linearen Gleichungen befasst haben, steigen wir am 7. November 2002 gemäss Stundenplan mit einem Block von drei Lektionen ein in dieses Lehrstück zur Geometrie, das uns ziemlich genau einen Monat beanspruchen wird.

Es wird sich die folgende zeitliche Gliederung ergeben:



Lektionen 1/2/3

I. Akt: Quadrate vereinen und entzweien

20 Stühle stehen im Kreis, auf jedem der Stühle liegt ein andersfarbiges Papierquadrat, wobei es 9 gleichgrosse grosse und 11 gleichgrosse kleine Quadrate sind. Darum herum gibt es 6 kleine Tischgruppen, bei jeder liegen Schere, Lineal und weisse Quadrate. Die Schülerinnen und Schüler nehmen die Quadrate in die Hand und setzen sich in den Kreis. Jedes merkt sich sein Quadrat und legt es dann gespannt in die Mitte. Azra und Fabian erklären sich bereit, während dieser ersten Phase Protokoll zu führen: Azra notiert das Gespräch und Fabian den Ablauf und möglichst viele persönliche Beobachtungen.

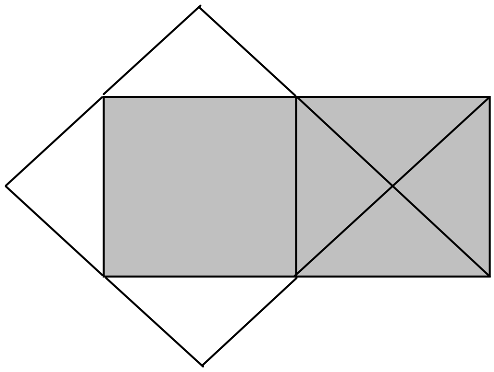
Ich eröffne: „Mit diesen 20 verschiedenen Papierquadraten steigen wir heute in ein neues Thema der Geometrie ein. Merkt euch euer persönliches Quadrat und legt es dann in der Mitte auf den Boden. Lasst sehen, ob es uns gelingt, all diese Papierquadrate zu einem einzigen Quadrat zu vereinen.“
Mehmet: „Wozu machen wir das?“
Ich: „Auch dies ist Mathematik. Wir werden viel entdecken und lernen dabei. Lass dich überraschen!“
Hannes: „Es kommen zwei grosse auf drei kleine Quadrate.“
Simon probiert am Boden: „Das geht nicht.“
David: „Können wir sie übereinander legen?“ Ich schüttle den Kopf. „Dann geht es nicht.“
Alle sind am Studieren. Es gibt Geflüster, kurze Ideenaustausche zu zweit.
Lukas kommt als erster in die Mitte und probiert, die Quadrate zusammenzusetzen, es geht aber nicht. Beatrice versucht es anschliessend, es sieht quadratisch aus, aber wie ich die Quadrate genauer hinlege, wird klar, dass es so auch nicht aufgeht.
Nochmals David: „Wir schneiden die Quadrate in Dreiecke.“

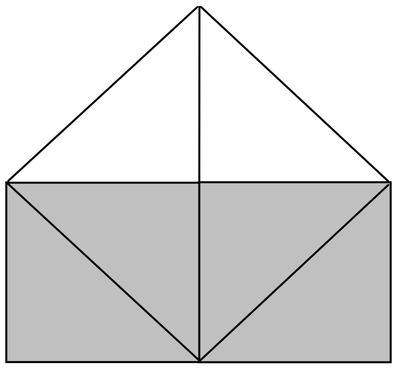
Simon hakt nach: „Geht es überhaupt auf? Ist die Aufgabe überhaupt lösbar?“ Die Antwort bleibe ich ihm schuldig.
Marc: „Überflüssiges lässt sich wegschneiden und an den Seiten hinzufügen.“
Urs: „Wir können alles in Dreiecke zerschneiden.“
Monique: „Müssen alle Quadrate gebraucht werden?“
Lukas: „Mit den kleinen Quadraten allein könnte man auch kein Quadrat machen, zwei sind zuviel.“
Patrice versucht 7 kleine neben 4 grosse zu legen. Es geht aber auch nicht.
Ich: „Könnten wir das Problem lösen, wenn wir nur die kleinen Quadrate hätten?“
Lukas meint ohne Begründung: „Nur mit den kleinen Quadraten geht es nicht.“ – Lukas lehnt zurück und gibt für einen Moment auf.
Gabriel: „Man könnte ein 3 x 3 – Quadrat legen, aber dann gäbe es 2 Reste.“ – Die kleinen Quadrate werden so hingelegt.
David: „Die überzähligen Quadrate müsste man verbrennen oder essen.“
Ein paar Schülerinnen haben Papier hervorgeholt und sind am Zeichnen. Jasmin kann aber ihre Ideen noch nicht formulieren.
(nach einer Weile) nochmals Gabriel: „Wie lang sind die grossen, und wie lang die kleinen?“
Ich signalisiere ihm, dass wir es nicht wissen.
Beatrice legt auch die grossen zu einem einzigen Quadrat.

In den verstrichenen gut 20 Minuten sind wir schon beträchtlich fortgeschritten. Es liegen im Prinzip nur noch vier Quadrate vor uns und die Idee, die Quadrate zu zerschneiden ist bereits gefallen. Es wird ein Leichtes sein, die zwei gleich grossen kleinen Quadrate zu vereinen und dann auf das zentrale Problem, das Vereinen von zwei verschieden grossen Quadraten zuzusteuern.

Ich: „Die Anzahl der Quadrate haben wir bereits von 20 auf 4 reduziert! Ist dies nicht ein grosser Fortschritt?“
Lukas: „Wir könnten halbieren und oben und unten anhängen.“
Adrian: „Man könnte aus den zwei kleinen ein grösseres Quadrat machen.“
David ergänzt: „Dann hätten wir noch drei Quadrate.“
Lukas: „Aus den zwei gleich grossen könnte man ein grosses machen. Aber wie?“
Marc: „Man könnte das eine Quadrat in 4 Dreiecke schneiden.“
Michael E: „Man könnte immer mehr halbieren.“
Thierry wiederholt, was Marc bereits meint: Wir teilen ein Quadrat in 4 Dreiecke. Und dann haben wir nur noch 3 Quadrate.“
Eine halbe Stunde ist vorbei. Da sich die Erkenntnis durchzusetzen scheint, bitte ich die Schüler und Schülerinnen, sich auf die Tischgruppen zu verteilen und die Vereinigung von zwei gleich grossen Quadraten durchzuführen. Zwei Gruppen sind sehr rasch fertig und ich

ermuntere diese, noch eine zweite Lösung zu finden. – Nach weniger als fünf Minuten sind wir wieder im Kreis und tauschen die verschiedenen Varianten aus. Ich lasse vorzeigen. Wir diskutieren darüber, warum es wirklich wieder ein Quadrat gibt und veranschaulichen die verschiedenen Verwandlungen von den zwei Quadraten zu einem und wieder zurück: mit Drehen und mit Verschieben.



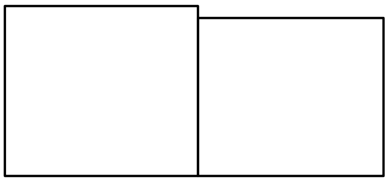


Nach der Pause nehmen wir den Faden wieder auf.
Ich: „Jetzt haben wir also die Anzahl der Quadrate von zwanzig auf drei reduziert!“
Michael E: „Man könnte alle Vierteln. Aus allen Quadraten Dreiecke machen.“
Lukas äussert eine Vermutung: „Es geht um Wurzeln.“
Michael E ergänzt: „Es geht um Pythagoras. – Alle Vierteln ergäbe mehr Möglichkeiten. – Durch Dreiecke haben wir die Anzahl auf 3 heruntergebracht.“
David: „Wir haben ein Durcheinander, ein „Gnusch“.“
Simon: „Wenn zwei Quadrate gleich gross sind, können wir sie auf ein Quadrat reduzieren.“
Michael W: „Wenn wir eine gerade Anzahl grosse und eine gerade Anzahl kleine hätten, würde es vielleicht gehen.“
Wiederum wird mehrheitlich versucht, die Aufgabe in einem Schritt zu lösen.
Michael E: „Wir könnten vier kleine Quadrate als Kern nehmen, die anderen in Dreiecke teilen und den Kern damit umranden.“
Gabriel: „Wir müssten einen gemeinsamen Nenner finden, vielleicht ein Grosses Quadrat achteln.“
Michael E: „Wir nehmen vier kleine Quadrate als Kern, die anderen teilen wir in Dreiecke und dann probieren wir darum einen Rand zu machen, um ein ganzes Quadrat zu machen.“
Gabriel sieht sofort: „Es gäbe aber Rest.“
Beatrice versucht erneut auf dem Boden und Gabriel kommt ihr zu Hilfe. Beide machen weiter unter der Anleitung der Klasse. Es will aber nicht gehen.
Der Prozess ist am Stagnieren, die Gedanken gehen wieder weit weg vom bereits Erreichten. Zudem werden einzelne Schülerinnen und Schüler unruhig, verlieren die Konzentration.
Ich versuche, mit Uferhilfe zurückzulenken: „Was haben wir bereits erreicht?“ – ???? –
„Wie schon erwähnt, können wir die Anzahl der Quadrate von 20 auf 3 reduzieren; und es gelingt uns, zwei gleich grosse Quadrate zu einem einzigen zu vereinen.“ – ??? –
Die Energie und das Vertrauen scheinen zu fehlen. Es braucht offenbar gezieltere Lenkung meinerseits: „Würde es uns helfen, wenn wir aus zwei verschieden grossen Quadraten ein einziges Quadrat herstellen könnten.“ – Jetzt hängen einige wieder ein: „Ja sicher, aber können wir das?“ Jetzt sind wir beim Kern des Problems. Ich schicke die Schülerinnen und

Schüler wieder an die Tische mit dem Auftrag, zwei verschieden grosse Quadrate zu nehmen und zu versuchen, diese zu einem einzigen Quadrat zu vereinen. Es ist kurz nach 10 Uhr.
In den Gruppen wird intensiv „geschnipselt“.

Es folgen ein paar Beobachtungen und aufgeschnappte Sätze aus der Gruppenarbeit: Gabriel: „In Dreiecke teilen.“ Er schneidet intensiv und legt eine schöne quadratische Schlussfigur. Stolz zeigt er sie mir. – Ich bitte ihn dasselbe nochmals zu machen mit zwei ganz unterschiedlich grossen Quadraten. Er sieht sofort, dass es dann nicht geht. Gabriel probiert erneut konzentriert auf eine andere Art. Er will alles in gleiche Quadrate schneiden, meint aber schliesslich: „Es geht nicht, 3 bleiben übrig.“ Adrian: „Man muss sie in ganz kleine Teilchen teilen, feiner als Sand, *pulverisieren*.“ Diese sehr interessante Ansicht habe ich in andern Klassen auch schon gehört. Dahinter steckt die Hoffnung, dass man nur genügend kleine Quadrätchen machen muss, und es dann irgendeinmal sicher aufgehen wird. Diesen Gedanken weiterzuverfolgen bis ins unendlich Kleine, in die Irrationalität, wäre spannend, würde den Rahmen des Lehrstücks aber völlig sprengen. Daneben sind Michael E. und Adrian anderweitig kreativ tätig. Ihre Figur landet am Ende eingeklebt im Klassenbuch.

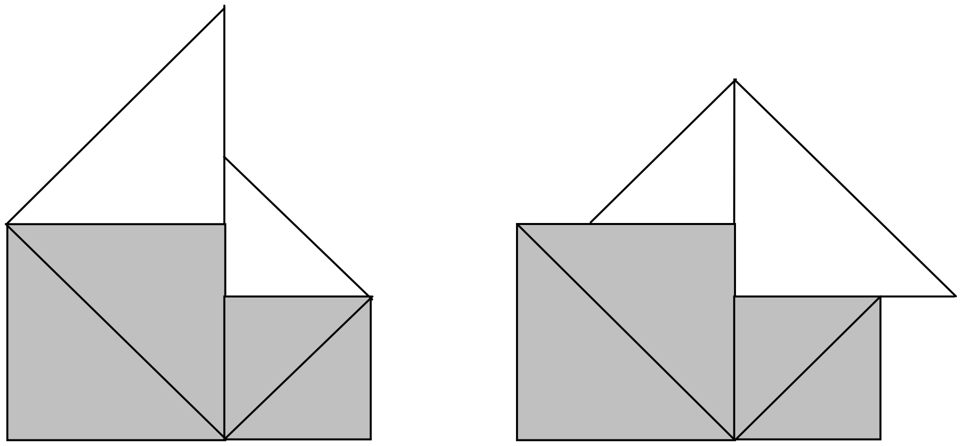
In dieser Zeit notiere ich kurz an der Tafel den Titel:
I. Akt: Quadrate vereinen, den bisher gegangenen Weg und zeichne die gefundenen Zerlegungen (wie oben) sowie nebeneinander zwei verschieden grosse Quadrate.



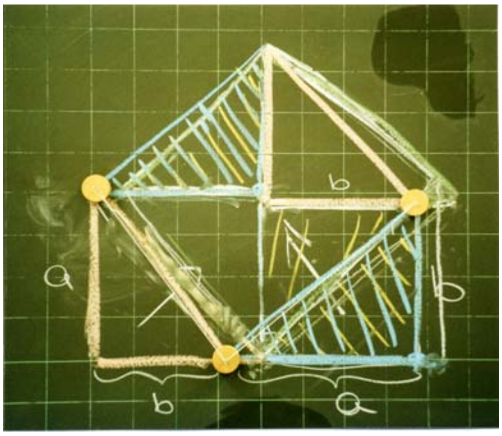
Es wird weiterhin viel geschnipselt, zerlegt, zusammengesetzt, diskutiert, verworfen, . . . Da und dort höre ich: „Das geht gar nicht.“ Was Wagenschein (1982 S. 127) über das Quadrat schreibt, gilt auch treffend für obige Figur: „Aber es ist bemerkenswert, wie schnell sich der Beweis aus zwei Translationen ergibt. Auf diesen Gedanken zu kommen, dauert eine Weile, vermutlich weil es einem unbewusst widerstrebt, die Figur zu durchkreuzen, als könne sie dabei Schaden nehmen.“

Vielleicht wäre es vorteilhaft, an geeigneter Stelle zu empfehlen, die beiden Quadrate mit einem Klebband zusammenzukleben, zu ermutigen, dass es mit ganz wenigen Schnitten geht und zu erwähnen, dass bereits vor 2500 Jahren eine genial einfache Lösung gefunden wurde.

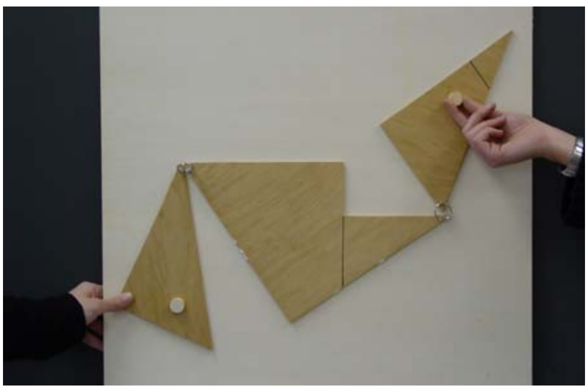
Kurz vor Ende der Lektion wäre es Zeit zu unterbrechen und gemeinsam weiterzudenken, aber ich lasse den Gong diese halbstündige Sequenz beenden. Zu Beginn der dritten Lektion sind alle wieder im Kreis versammelt. Nochmals weise ich auf die Vereinigung von zwei gleich grossen Quadraten hin. Nahe liegend ist es ja, was viele probiert haben, dass wir auch bei zwei verschieden grossen Quadraten diagonal schneiden. Aber warum versagt diese Methode? Ich lasse nebeneinander beide Situationen zeichnen: einmal nach dem Drehen, einmal nach dem Verschieben. Und warum ergibt sich kein Quadrat? Ich hoffe, dass auf der einen oder andern Seite ein Durchbruch erfolgen könnte.



Urs und Gabriel versuchen erfolglos verschiedene Varianten. Ich: „Wie müssten die Dreiecke beschaffen sein, damit die oben hinpassen?“ – ??? – „Warum kommen bei der Verschiebung oben beide Dreiecke zusammen?“ Es wird gut erkannt, dass wir beide Male in der Höhe die kleine und die grosse Quadratseite zusammenfügen. Aber links und rechts will es nicht



passen. – ??? – „Wie ist’s, wenn das rechte Dreieck nicht so weit hinaus ragt? Könnt ihr euch das vorstellen?“ Gabriel: „Dann müssen wir unten weiter hinüber schneiden.“ Ich lasse ihn wieder zeichnen. Ich: „Und wo haben wir jetzt unser neues Quadrat?“ Nach einigem Hinsehen, kann er es richtig ergänzen. – Urs sieht die Zusammenhänge und erläutert mit Bezeichnungen a und b die nötigen Längen. Langsam scheint sich die Einsicht zu verbreiten. Michael W. bemerkt als erster folgerichtig, dass wir damit unsere drei Quadrate in zwei Schritten zu einem einzigen Quadrat vereinen können. Ob dies wirklich schon allen klar ist? Mit drei Magnetknöpfen und einem Gummiband verdeutlichen wir den kleinen, aber entscheidenden Übergang von den Diagonalschnitten zur neuen Zerlegung. Das Tafelbild zeigt deutlich das zähe Ringen um die Lösung dieses widerspenstigen Problems. Beim Schneiden die Diagonale zu verlassen, gleicht einem Quantensprung, einem Paradigmenwechsel. Wir veranschaulichen diesen Prozess an einem Holzmodell, an dem die Schüler die Dreiecke drehen können. Die Zerlegung muss von jedem einzelnen konkret durchgeführt werden! Deshalb bitte ich die Schülerinnen und Schüler wieder in die Gruppen, um jetzt diese Vereinigung von zwei verschieden grossen Quadraten zu erfahren. Noch braucht es an einigen Tischen hartes Ringen, während andere bereits fertig sind. Anschliessend halten alle den Verlauf dieser drei Lektionen in ihren Heften fest und kleben die Vereinigung von zwei verschieden grossen Quadraten ein.



Zum Abschluss dieser Stunde erwähne ich, dass das Problem, zwei verschieden grosse Quadrate zu vereinen, bereits in einem alten religiösen Text aus Indien, den sogenannten Sulbasutras (d. h. Schnurregeln oder Leitfäden zur Messkunst), geschrieben etwa 500 vor Christus, zu finden ist. Dort steht auch eine Lösung, welche vergleichbar ist mit derjenigen, die wir entdeckt haben. Da die indischen Tempel und Altäre quadratische Grundrisse haben, ist anzunehmen, dass die Grundrisse der Tempel von Brahma, Shiva und Vishnu, dies ist das göttliche Dreigestirn im Hinduismus, diese Bedingung erfüllen sollten. (Scriba/Schreiber 2001, S. 146f) Die Zerlegung, so wie wir sie entdeckt haben, wird üblicherweise aber dem arabischen Gelehrten Anairizi zugeschrieben, welcher um 900 nach Christus wirkte.

Zwar ist das Gemeinschaftswerk noch nicht vollendet, aber wir wissen jetzt, wie wir unsere 20 Quadrate des Anfangs zu einem einzigen Quadrat vereinen können. Damit endet unsere dritte und letzte Lektion dieses heutigen Morgens. Der Auftrag für die nächste Lektion besteht darin, den Hefteintrag zu bereinigen und ein Quadrat zu entzweien, so dass aus den Teilen zwei verschieden grosse Quadrate gelegt werden können.

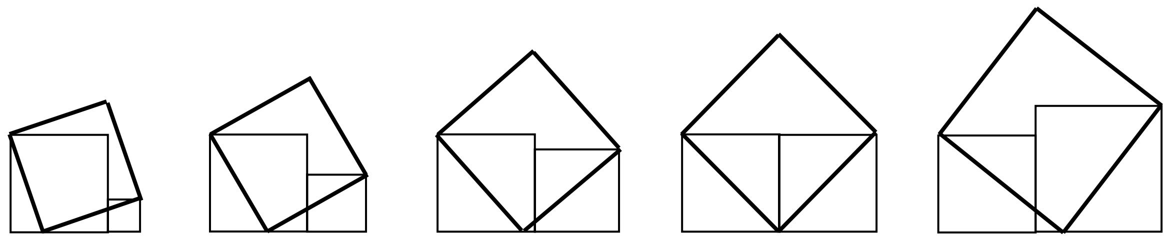
Wenn auch etwas mühsam, so ist es doch auch mit dieser leistungsschwachen Klasse gelungen, die wesentliche Grundidee der Vereinigung von zwei Quadraten und damit des Satzes von Pythagoras zu entwickeln. Das Vereinen und das Entzweien, beide müssen noch ausführlich diskutiert sein. Und das Gemeinschaftswerk, die Vereinigung unserer 20 Quadrate, ist noch nicht durchgeführt. Im Feedback am Schluss erfahren wir, dass das Ausprobieren, die Selbsttätigkeit geschätzt wird, allerdings für viele der Prozess zu lange dauerte. *Nächstes Mal werde ich den Einstieg in einer Doppelstunde durchführen und mich dann überraschen lassen, ob die Lösung des Spezialfalls in der kommenden Stunde mitgebracht wird.*

Unterstützung für diesen Ansatz mit dem Vereinen der Quadrate, fortschreitend vom speziellen zum allgemeinen Fall, erhalten wir von Prof. Peter Baptist, Universität Bayreuth, in seinen Büchern 1998 und 2000. Insbesondere im zweiten Werk (Baptist 2000, S.8) plädiert er: „…Denken lernt man nicht an Regeln zum Denken, sondern an Stoff zum Denken.“ Als eines der Beispiele empfiehlt er, den Satz des Pythagoras, der ja ein Flächensatz ist, anzugehen über das Problem (S.12ff): „Aus zwei gegebenen Quadraten soll ein einziges flächengleiches Quadrat erzeugt werden.“ Dabei beruft er sich auf den französischen Mathematiker Alexis Claude Clairaut (1713-1765), der in seinem Lehrbuch „Elemente der Geometrie“ diese heuristisch-genetische Darstellungsweise wählt. Dass allerdings das Problem dynamischer Geometrie mit Hilfe eines Softwarepakets wie GEONET gelöst werden muss, bezweifle ich sehr.

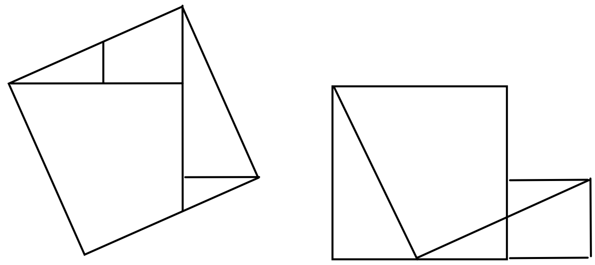
Lektionen 4/5

Ich: „Heute wollen wir das Vereinen und Entzweien von Quadraten noch genauer ansehen und Folgerungen ziehen.“ Dazu lese ich einen Text von J. W. Goethe: „Treue Beobachter der Natur, wenn sie auch noch so verschieden denken, werden doch darin miteinander übereinkommen, dass alles was erscheinen, was uns als ein Phänomen begegnen solle, müsse entweder eine ursprüngliche Entzweiung, die einer Vereinigung fähig ist, oder eine ursprüngliche Einheit, die zur Entzweiung gelangen könne, andeuten und sich auf eine solche Weise darstellen. Das Geeinte zu entzweien, das Entzweite zu einigen ist das Leben der Natur; dies ist die ewige Systole und Diastole, die ewige Synkrisis und Diakrisis, das Ein- und Ausatmen der Welt, in der wir leben, weben und sind.“ (Goethe 1980, S. 267)

An der Tafel habe ich bereits nebeneinander sechsmal zwei Quadrate gezeichnet, die vereinigt werden wollen. Verschiedene Schüler und Schülerinnen bitte ich gleichzeitig, die Zerlegung und das entstehende Quadrat einzuzeichnen. Zum Teil mit Mühe gelingt es bald allen. In einer dynamischen Variante haben wir jetzt die Grundidee dieser Vereinigung der beiden Quadrate vor Augen.



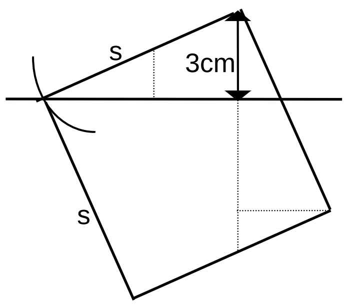
In der Zwischenzeit gehe ich durch die Klasse und stelle fest, dass viele Schülerinnen und Schüler nichts in ihr Heft eingeklebt haben. Was soll ich davon halten?



Ich hänge ein grosses weisses Quadrat schräg an die Tafel. Wie können wir das Quadrat schneiden, so dass nachher beim Zusammensetzen zwei verschieden grosse Quadrate entstehen können? Nach längerem Zögern kommt Roman und zeichnet einige richtige Linien ein. Ich schaue fragend in die Runde. Urs putzt eine Linie weg, die nicht nötig sei. Geklärt wird noch, wo zusätzlich geschnitten werden muss, damit die beiden entstehenden Quadrate separat entstehen können. Stehen die beiden Figuren geeignet nebeneinander, so ist die Zerlegung offensichtlich. Da keine Fragen vorhanden sind, verteile ich farbige Quadrate und bitte die Schülerinnen und Schüler, auf zwei Quadraten die gleiche Zerlegung einzuzeichnen, eines zu zerlegen und neu zusammenzusetzen, sowie alles im Heft einzukleben. Für diejenigen, die fertig sind, notiere ich an der Tafel die folgende Aufgabe: Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge s = 6.5 cm. Konstruiere eine Zerlegung so, dass eines der neuen Quadrate Seitenlänge 3 cm hat. Damit sind einige überfordert. Wer weiss schon, dass die Tangente eines Punktes an einen Kreis mit dem Thaleskreis konstruiert wird?

Es folgt die erlösende Pause. Michael W. kommt noch nach vorn und will wissen, wie die Konstruktion mit dem Thaleskreis geht. Wir klären dieses Problem bilateral anhand einer Skizze an der Tafel.

Zu Beginn der zweiten Lektion erklärt Michael die Konstruktion.



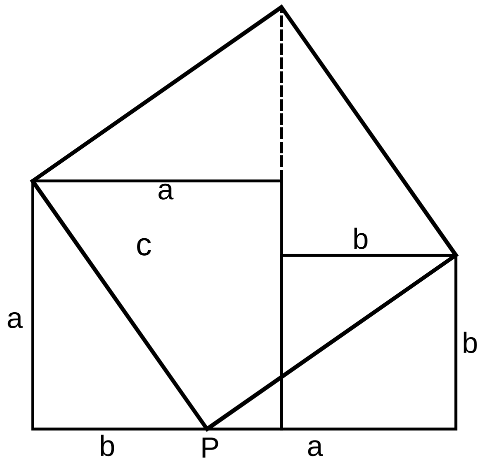
Roman macht es ganz anders: Er beginnt mit einer 3 cm langen Vertikalen, fällt darauf die Senkrechte und legt jetzt erst das Quadrat hinein. So kann er den Thaleskreis umgehen.
Ich lasse die Konstruktionen beenden.

Wer fertig ist, soll sich genau überlegen, warum bei unserer ursprünglichen Vereinigung der zwei Quadrate wirklich ein einziges Quadrat entsteht.

„Es ist ja schon gesagt worden, dass das, war wir hier machen, etwas mit dem Satz des Pythagoras zu tun hat, von dem offenbar die meisten schon mehr oder weniger gehört haben. Und diesen Satz wollen wir jetzt beweisen mit Hilfe unserer Zerlegung der Quadrate.“

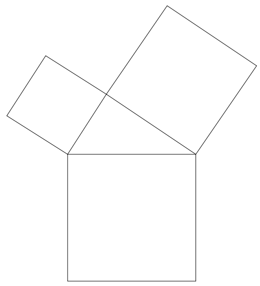
II. Akt: Pythagoras und „sein“ Satz

An der Tafel notiere ich die Überschrift. Wir haben die Grundfigur samt Bezeichnungen vor uns. Leitfrage: Warum ergibt sich durch diese Schnitte und das obige Einfügen der Dreiecke ein Quadrat? Wir haben die Zerlegung an einigen Beispielen durchgeführt und gesehen, dass wir ein Quadrat erhalten. Aber gibt es wirklich ein Quadrat? Wir könnten die Seiten und die Winkel überprüfen durch Nachmessen. Messinstrumente sind aber nicht genau, lassen immer viel zu Wünschen übrig. Zudem könnten wir nie alle verschiedenen Ausgangssituationen überprüfen, wüssten also nicht, ob dieses Verfahren bei beliebigen zwei Quadraten gilt. Ausserdem hätten wir noch lange keine Einsicht, warum es so ist, so sein muss. Deshalb ist eine allgemeine Begründung, ein Beweis gefordert. Dieser eröffnet eine neue Dimension der Sicherheit und des Verständnisses.



Urs hat sich schon ganz auf den Satz des Pythagoras konzentriert und zeigt, wie sich aus dieser Figur die bekannte Pythagorasfigur ergibt, indem er das kleine Quadrat mit Seite b nach rechts schiebt und das grössere mit Seite a nach rechts unten und erklärt, so jetzt hätten wir bewiesen, dass das obige c^2 sei. Es ist schwierig ihm klar zu machen, dass wir jetzt nicht den Satz des Pythagoras voraussetzen, sondern vielmehr ihn schlussendlich beweisen wollen. Aber für seinen Übergang von dieser Figur zur Pythagorasfigur, wie sie viele schon kennen, sei ich ihm sehr dankbar.

Für ein Schnörkel zum Einprägen der typischen Figur frage ich: „Könnt ihr mit einem Strich ohne abzusetzen die Pythagorasfigur zeichnen?“ Alle probieren: Es geht!



Zurück zum Beweis: Mit Papierdreiecken komme ich zu Hilfe. Ich drehe das Dreieck von unten links und hefte es oben an, ebenso das zweite von unten rechts. Dass sie hineinpassen, a auf a, b auf b und die rechten Winkel haben wir schon besprochen. Ebenso haben wir gezeigt, dass ganz oben die beiden Eckpunkte zusammenfallen, da wir in der Höhe links a + b und rechts b + a finden. Also ergibt sich ein neues Viereck. Und was können wir sagen über dieses Viereck? Wieder höre ich vorschnell: „Es ist ein Quadrat, weil alle Seiten gleich lang sind.“ Ich: „Und warum ist das so.“ Es ist schwierig zu entschleunigen, die einzelnen Schritte nicht überspringen zu lassen. „Warum sind alle Seiten gleich lang?“ Es braucht viel Hilfe: „Was lässt sich über die beiden weg geschnittenen Dreiecke sagen?“ Endlich eine konstruktive Antwort: „Man kann sie zur Deckung bringen.“ – „Warum dies?“ – „Weil sie drei gleiche Seiten haben.“ Mit dem logischen Denken ist es schwierig. „Was haben die zwei Dreiecke sicher gemeinsam?“
Mit meinem dauernden Hinterfragen, mit meinem „Warum?“ wirke ich wohl penetrant. Mir kommen die Kinder im Alter von 3 bis 4 Jahren in den Sinn, die ihren Eltern mit dem gleichen „Warum?“ Löcher in den Bauch fragen. Eine Rollenumkehr! Langsam dämmert es: „Die beiden Dreiecke haben einen rechten Winkel und die Seiten a und b gemeinsam. Und

damit wissen wir, dass wir sie zur Deckung bringen können?“ – ??? – Ich sondiere weiter: „Unter welchen Bedingungen lassen sich zwei Dreiecke zur Deckung bringen?“ – „Wenn sie drei gleiche Winkel haben.“ – „Wenn sie gleiche Seiten haben.“ Ich merke, dass da wenig Grundlage vorhanden ist. Immerhin fallen die Begriffe „deckungsgleich“ und „kongruent“. Konkret frage ich: „Unter welchen Voraussetzungen sind zwei Dreiecke kongruent?“ Bei Raffael und Daniel höre ich etwas munkeln wie „SWS“. Ich frage nach: „SWS? Was bedeutet das?“ – „Seite – Winkel – Seite“. Schliesslich kommt die klare Antwort: „Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.“ – „Mit diesen Angaben lässt sich ein Dreieck eindeutig konstruieren: Winkel zeichnen, auf jedem Schenkel vom Scheitelpunkt eine Seite abtragen und die Endpunkte verbinden. Fertig!“ Ich kann es nicht lassen, bei dieser Grundlage weiterzufragen: „Gibt es andere Kongruenzsätze?“ Langsam und unsicher kommen die übrigen drei Kongruenzsätze nach. Es wird mir bestätigt, dass diese Sätze behandelt wurden, aber zum Arbeiten sind sie nicht genügend verankert. Da es demnächst eine Gelegenheit gibt, diese Sätze zu repetieren, gehe ich nicht weiter auf sie ein.

Wir kehren zurück zu unserem Beweis: „Und warum sind die beiden Dreiecke kongruent?“ Die richtige Antwort kommt von Roman: „Weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen (dem rechten) Winkel übereinstimmen.“ – Und wieder das Schnellzugstempo: „Daraus folgt, dass das Viereck ein Quadrat ist.“ Langsam, langsam! „Also, diese längsten Dreieckseiten, die Hypotenusen, sind deshalb gleich lang und somit hat unser Viereck vier gleich lange Seiten.“ Einzelnen dämmert, dass das noch kein Quadrat sein muss, sondern erst ein Rhombus, und dass wir noch die Winkel ansehen müssen. Auch da braucht es noch einige Detailarbeit, bis gesichert ist, dass wir beim Punkt P einen rechten Winkel haben. Mit Bezeichnungen α und β für die Winkel bei P ergibt sich langsam Klarheit. Wegen der Winkelsumme von 180° im Dreieck und dem rechten Winkel ergibt sich, dass damit auch α und β zusammen 90° ergeben. Dieselben Winkel finden wir in den Ecken des neu entstehenden Vierecks und somit ist es wirklich ein Quadrat. Wir haben unsere Begründung also abgestützt auf einen Kongruenzsatz (SWS) und auf die Winkelsumme im Dreieck.

Und somit gilt jetzt: $a^2 + b^2 = c^2$. Wir formulieren den Satz des Pythagoras: „Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.“ Es reicht gerade noch, den Satz und die ganze Argumentationskette Schritt für Schritt im Heft festzuhalten.

Am Ende der Stunde verteile ich jeder Schülerin und jedem Schüler ein Blatt, auf dem *ein* Beweis des Satzes von Pythagoras skizziert ist. Insgesamt sind es 6 verschiedene Blätter, also sechs verschiedene Beweise. Diese sollen bis zur nächsten Lektion zuhause studiert werden.

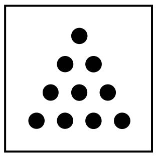
Eine interessante Alternative zum Verteilen der Blätter wäre es, die Schülerinnen und Schüler auf eine der Internetadressen wie www.cut-the-knot.com/pythagoras/index.html oder www.ies.co.jp./math/java/geo/pythagoras.html zu schicken, um dort auf Englisch einen wegen der angestrebten Beweisvielfalt im Unterricht wohl zugeteilten Beweisabschnitt zu studieren und die knapp gehaltenen Begründungen genau zu überlegen.

Lektionen 6/7/8

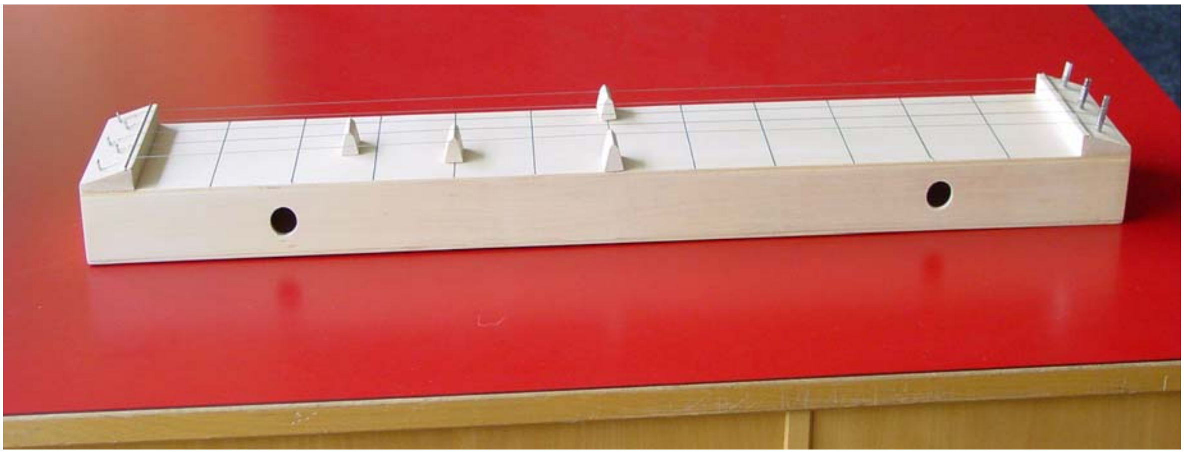
Die Schülerinnen und Schüler sitzen zu Stundenbeginn im Dreiviertelkreis. Ich gehe unauffällig noch ganz kurz hinaus, ziehe mir ein weisses Seidenhemd über und knüpfe eine Knotenschnur um den Bauch. Mit einem selbst gebauten Monochord unter dem Arm trete ich als ehemaliger Anhänger des Pythagoras auf und stelle mich vor: „Mein Name ist Prokulos von Kroton, ich war in einem früheren Leben Anhänger von Pythagoras und erinnere mich noch gut an jene Zeit in Süditalien. Da Sie Sich momentan mit dem berühmtesten mathematischen Satz befassen, der des Meisters Namen trägt, bin ich angefragt worden, ob ich nicht kommen könnte, um etwas über Pythagoras und die damalige Zeit vor über 2500 Jahren zu erzählen.

Nun, über Pythagoras selbst wussten wir auch nicht allzu viel, denn er lebte ziemlich zurückgezogen. Er muss etwa um 580 vor Ihrer Zeitrechnung auf Samos geboren worden sein, weilte in Jugendjahren zu Studienzwecken in Ägypten, wo er in die religiösen Riten eingeweiht wurde und wo er den Feldmessern bei ihrer Arbeit zuschauen konnte.“ Ich entbinde meine Knotenschnur und halte sie in die Luft. „Mit diesem Instrument haben die Ägypter

jedes Jahr nach den grossen Überschwemmungen durch den Nil das Land neu mit rechten Winkeln abgesteckt und vermessen. Wie ging das wohl?“ – Ich muss die beiden Enden zusammenhalten und einen Ansatz von Dreieck vorführen, bis der erste Schüler sich meldet und sagt: „Wir könnten ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 herstellen und dann hätten wir einen rechten Winkel, denn 9 und 16 ergäben 25.“ Ich gebe die Schnur den zwei links neben mir sitzenden Schülerinnen und diese zeigen, wie es geht. – (Natürlich könnte ich jetzt nach weiteren derartigen Dreiecken suchen, aber dies würde aus meinem Auftritt wegführen.) – Also fahre ich mit meiner Beschreibung fort: „Nach seinem Besuch in Ägypten reiste Pythagoras nach Babylonien und vielleicht gelangte er sogar bis nach Indien. Zurück in Samos erlebte er die Herrschaft des grausamen Tyrannen Polykrates. Dies bewog Pythagoras, nach Kroton in Süditalien zu fliehen, wo er eine Gemeinschaft gründete, die sich ganz der Religion und der Wissenschaft widmete. Er besass prophetische Fähigkeiten, war Vegetarier und glaubte an die Gesetzmässigkeit einer Wiedergeburt von Mensch und Tier. Ich schloss mich dieser Gemeinschaft an, die anspruchslos und ohne Besitz lebte. Unser Meister vertrat die Auffassung, dass die Wirklichkeit der Natur im Innersten mathematisch sei. Gott habe den Kosmos nach Zahlen geordnet: *‚Alles ist Zahl’*, *‚Das Wesen aller Dinge ist Zahl’*, lautete unser Credo, wobei wir unter Zahl natürliche Zahlen oder das Verhältnis natürlicher Zahlen verstanden. *‚Alles, was man erkennen kann, lässt sich auf eine Zahl zurückführen.’* Zahlen haben eine mystische Qualität und damit auch therapeutische Kraft. Die Zahl Zehn, die *tetraktis*, stellte für uns Pythagoräer eine göttliche Einheit dar. Denn sie ist gross, alles vollendend, alles bewirkend und Anfang und Führerin des göttlichen, himmlischen und menschlichen Lebens. Gebildet wird sie als Summe von Eins, Zwei, Drei und Vier, den grundlegendsten und edelsten unter den Zahlen.



All diese Zahlen zusammen bilden das göttliche Dreieck. Vor allem die Entdeckung eines konstanten Verhältnisses zwischen der Länge der Saiten bei einer Leier und den Grundakkorden der Musik beeindruckten ihn so stark, dass er sich Gott als grossartigen Ingenieur vorstellte und glaubte, ein mathematisches Gesetz, nämlich die Harmonie, bestimme die ganze Natur.“ Wir suchen einige wohlklingende Töne auf meinem Monochord. Es gibt Schüler, welche die Oktave, die Quinte und die Terz sofort erkennen. Es sind die einfachen Verhältnisse 1:2 für die Oktave, 2:3 für die Quint, 3:4 für die Quart, 8:9 für die grosse Terz. Sogar eine kleine Melodie lässt sich spielen mit diesen wenigen Tönen. „Pythagoras war überzeugt, dass sich Erde, Mond, Sonne und die fünf damals bekannten Planeten nach demselben Gesetz der Harmonie auf ganzzahlig definierten kreisförmigen Himmelsbahnen drehen und dabei süsse Klänge erzeugen, die sogenannte Sphärenharmonie.



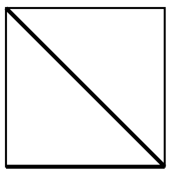
Wir Pythagoräer lebten also in Gütergemeinschaft und ganz einfach, waren Vegetarier und glaubten an die Seelenwanderung, eine Weltsicht, die Pythagoras sicher aus dem fernen Osten, vielleicht sogar aus Indien, mitgebracht hatte. Der Körper ist nichts anderes als ein Gefängnis, in dem die Seele für ihre Schuld büsst. So erklärt sich die pythagoräische Moral: „Immer schön brav, sonst geht's mit der Beförderung nicht weiter!" Neben strengen Regeln des täglichen Lebens hielten wir uns zusätzlich an absolute Verschwiegenheit.

Bei Sonnenuntergang stellten wir uns stets drei wesentliche Fragen:

a) Was habe ich heute Gutes getan?
b) Was habe ich heute Schlechtes getan?
c) Was habe ich heute versäumt zu tun?

Pythagoras und wir ‚mathematikoi' (Mathematiker) waren weniger an neuen Sätzen und Beweisen interessiert, als dass wir vielmehr die eigentliche mystische Natur der Zahlen und geometrischen Figuren hinterfragten. Unsere besondere Leistung lag in der Abstraktion der Probleme, die wir auf die reinen Beziehungen von Zahlen (also ohne jeglichen anschaulichen Ballast) reduzierten. Als ohne Frage bekanntester Satz der Mathematikgeschichte findet der ‚Satz des Pythagoras' (der zwar schon den Babyloniern bekannt war, aber erstmals von unserem Meister Pythagoras bewiesen wurde) in beinahe allen Bereichen der Naturwissenschaft seine Anwendung. Nachdem ihm die Götter für diesen Satz einen Beweis offenbart hatten, opferte er 100 Ochsen, eine ganz besondere Tat, wenn wir daran denken, dass wir an die Seelenwanderung glaubten und uns weigerten, Fleisch zu essen, um keine Tiere töten zu müssen. Aber für uns war dieser Beweis ein bedeutender Durchbruch. Jetzt wussten wir, dass dieser Satz für jedes rechtwinklige Dreieck gilt, und zwar überall und für alle Zeiten, ohne Ausnahme. So beeindruckt suchten wir fortan für all unsere Sätze stichhaltige Begründungen, oder eben Beweise, indem wir uns auf frühere bekannte Sätze abstützten.

Im Verlaufe des weiteren Nachdenkens merkten wir aber, dass beim regelmässigen Fünfeck und beim Quadrat Strecken auftreten, die nicht in einfachem Verhältnis zueinander stehen. So ist das Verhältnis von Diagonalenlänge zu Seitenlänge im Quadrat nicht als Verhältnis ganzer Zahlen auszudrücken. Diese Erkenntnis erschütterte unsere Gemeinschaft zutiefst und spaltete sie.

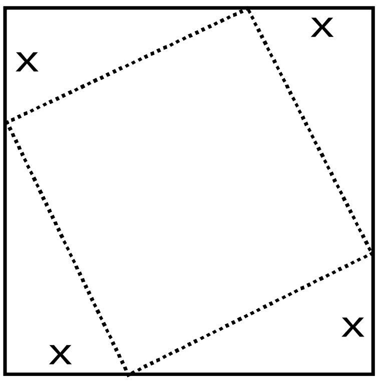


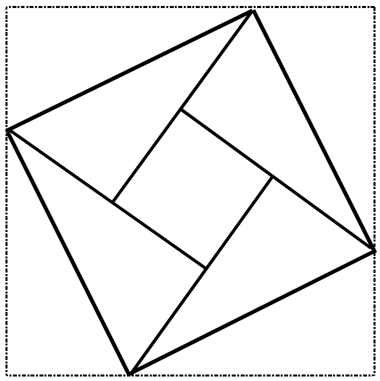
Ja, heute darf ich Ihnen all dies erzählen, damals wäre ich dafür aus der Gemeinschaft ausgeschlossen oder vielleicht sogar umgebracht worden.

Es hat mich sehr gefreut, Ihnen etwas aus jener intensiven Zeit zu berichten und wünsche Ihnen noch viel Freude mit Pythagoras und seinen Erkenntnissen." Ich verneige mich leicht und verlasse das Schulzimmer. Gute 15 Minuten hat dieser Auftritt gedauert.

Ohne Insignien betrete ich kurze Zeit später wieder das Klassenzimmer. Die Schüler erläutern mir, ich hätte eben etwas verpasst, denn sie hätten einen Besuch erlebt, der ihnen von Pythagoras erzählt habe. Ich drücke mein Bedauern aus, dass ich ihn wegen einer wichtigen Sitzung verpasst habe und wäre ihm leider auch nicht auf dem Flur begegnet.

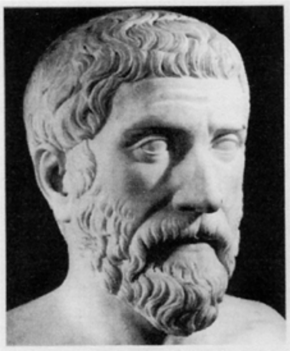
Nach diesem kleinen Zwischenspiel lege ich die farbigen Quadrate der ersten Lektionen aus und frage, ob wir jetzt in der Lage seien, diese zu vereinen. Wir tragen die wichtigsten Ideen zusammen und somit kann die Arbeit vorn auf dem Tisch beginnen. Die ersten Freiwilligen kommen und kleben in drei Gruppen die neun grossen Quadrate, die neun kleinen Quadrate oder die zwei gleich grossen kleinen Quadrate je zu einem einzigen Quadrat auf ein Stück Packpapier. Somit bleiben uns noch drei Quadrate zu vereinen. Den andern skizziere ich an der Tafel die Faltaufgabe eines Quadrates: „Trage von jeder Ecke des Quadrats im gleichen Umlaufsinn eine gewisse Strecke x ab, verbinde benachbarte Endpunkte und falte entlang der Linien."





Eine der Gruppen bleibt vorne und vereinigt nach unserer ersten Figur die grösseren beiden Quadrate. Allerdings ergeben sich etliche Schwierigkeiten, bis das dann auch richtig aufgeklebt ist. Schliesslich kann ich noch ein paar andere Schüler motivieren, die letzten zwei Quadrate zu vereinen, auf Packpapier aufzukleben und auszuschneiden. Das Endprodukt fixiere ich mit den Magneten an die Tafel und wir können es betrachten. Gemeinsam gehen wir nochmals den ganzen Prozess durch. Ausgegangen sind wir von 20 Quadraten, nämlich 9 grossen und 11 kleinen. Neun grosse und neun kleine konnten wir je zu einem Quadrat vereinen, die zwei restlichen kleinen Quadrate wurden vereint, indem wir beide diagonal halbierten. So gelangten wir insgesamt zu drei verschieden grossen Quadraten. Dann fanden wir heraus, wie sich zwei verschieden grosse Quadrate vereinen lassen. Zweimaliges Anwenden dieses Vorgangs führte uns zu einem einzigen Quadrat. Und jetzt meine Schlussfrage: „Hätten wir es auch geschafft, wenn wir zu Beginn 20 verschieden grosse Quadrate gehabt hätten?" – „Grundsätzlich ja, aber es hätte ‚ewig' gedauert." – Die Schüler sind jetzt überzeugt, dass wir auch 100, ja sogar 1000 Quadrate vereinen könnten. Es spielt keine Rolle, wie

PYTHAGORAS VON SAMOS



Pythagoras

(etwa 580 - 500 v. Chr.)

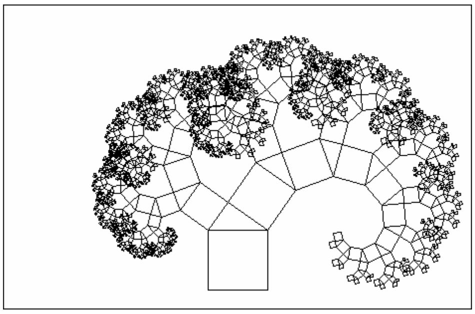
Über das Leben und Wirken von Pythagoras gibt es kaum gesicherte Fakten. Auf Grund der vorliegenden Pythagorasbiographien ist anzunehmen, dass Pythagoras in der Mitte des 6. Jahrhunderts v. Chr. auf der griechischen Insel Samos aufwuchs und anschliessend auf Reisen ging, vermutlich nach Phönizien, Ägypten und Babylonien, um dort Studien zu betreiben. Zurückgekehrt nach Samos wurde er Lehrer des Sohnes des Tyrannen Polykrates. Das Luxus- und Lotterleben am königlichen Hof vertrieb aber den Weltverbesserer und Moralisten Pythagoras und so zog er um 530 v. Chr. nach Kroton in Süditalien aus.

Dort gründete er eine philosophische und religiöse Schule, in der die Mathematik einen wesentlichen Bestandteil ihrer Heilslehre bildete. Er vertrat u. a. die Auffassung, dass die Wirklichkeit der Natur im Innersten mathematisch sei. Gott hat den Kosmos nach Zahlen geordnet; *„Alles ist Zahl"*, *„Das Wesen aller Dinge ist Zahl"* lautete das Credo, wobei unter Zahl das Verhältnis natürlicher Zahlen verstanden wurde.
„Alles, was man erkennen kann, lässt sich auf eine Zahl zurückführen." Zahlen haben eine mystische Qualität und damit auch therapeutische Kraft. Die Zahl Zehn, die *tetraktis*, stellte für die Pythagoräer eine göttliche Einheit dar. „Denn sie ist gross, alles vollendend, alles bewirkend und Anfang und Führerin des göttlichen, himmlischen und menschlichen Lebens." Gebildet wird sie als Summe von Eins, Zwei, Drei und Vier, den edelsten unter den Zahlen. Alle gemeinsam bilden das göttliche Dreieck. Vor allem die Entdeckung eines konstanten Verhältnisses zwischen der Länge der Saiten bei einer Leier und den Grundakkorden der Musik (1:2 für die Oktave, 2:3 für die Quint und 3:4 für die Quart) beeindruckten ihn so stark, dass er sich Gott als grossartigen Ingenieur vorstellte und glaubte, ein mathematisches Gesetz, nämlich die Harmonie, bestimme die ganze Natur. Ebenso drehen sich Erde, Mond, Sonne und die fünf damals bekannten Planeten auf ganzzahlig definierten kreisförmigen Himmelsbahnen und erzeugen dabei süsse Klänge, die sogenannte Sphärenharmonie.
Die Pythagoräer lebten ganz einfach, waren Vegetarier und glaubten an die Seelenwanderung, eine Weltsicht, die Pythagoras sicher aus dem Fernen Osten, vielleicht sogar aus Indien, mitgebracht hatte. Der Körper ist nichts anderes als ein Gefängnis, in dem die Seele für ihre Schuld büsst. So erklärt sich die Pythagoräische Moral: „Immer schön brav, sonst geht's mit der Beförderung nicht weiter!" Neben strengen Regeln des täglichen Lebens verpflichtete er seine Schüler zusätzlich zu absoluter Verschwiegenheit, so dass uns kaum etwas über seine Erkenntnisse überliefert wurde. Die Eingeweihten lebten in Gütergemeinschaft. Bei Sonnenuntergang mussten sie sich stets drei Fragen stellen: *a) Was habe ich Schlechtes getan? b) Was habe ich Gutes getan? c) Was habe ich versäumt zu tun?*
Pythagoras und seine „mathematikoi" (Mathematiker) waren weniger an neuen Sätzen und Beweisen interessiert, als dass sie vielmehr die eigentliche mystische Natur der Zahlen und geometrischen Figuren hinterfragten. Ihre besondere Leistung lag in der Abstraktion der Probleme, die sie auf die reinen Beziehungen von Zahlen (also ohne jeglichen anschaulichen Ballast) reduzierten. Als ohne Frage bekanntester Satz der Mathematikgeschichte findet der "Satz des Pythagoras" (der zwar schon den Babyloniern bekannt war, aber wohl erstmals von Pythagoras bewiesen wurde) in beinahe allen Bereichen der Naturwissenschaft seine Anwendung. Nachdem er für den Satz einen Beweis gefunden hatte, soll er den Göttern 100 Ochsen geopfert haben, was allerdings verwundert bei einem Mann, der sich weigerte, Fleisch zu essen, um keine Tiere töten zu müssen.

Nach dem griechischen Philosophen Diogenes Laertios muss Pythagoras eine sehr bestimmende Persönlichkeit gewesen sein, denn er begann seine Reden stets mit dem Satz: *„Nein, bei der Luft, die ich atme, nein, bei dem Wasser, das ich trinke, ich gestatte keinen Widerspruch zu dem, was ich sage."*
Einmal gefragt: „Wer bist du?" soll Pythagoras geantwortet haben: *„Ich bin Philosoph"*. So kam dieser Begriff in die Welt, der wörtlich übersetzt 'Liebhaber der Weisheit' heisst.

Quellen: Peter Baptist: Pythagoras und kein Ende. Lesehefte Mathematik. Klett Verlag.
Luciano De Crescenzo: Geschichte der griechischen Philosophie. detebe 21912
Hans Wussing, Wolfgang Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker. Volk u. Wissen, Berlin

grosse und wie viele Quadrate am Anfang vorhanden sind; die Verallgemeinerung ist gelungen; Ich erinnere daran, dass ursprünglich bezweifelt wurde, ob unsere 20 Quadrate wirklich vereinigt werden könnten. Das nebenstehende Bild aus der fraktalen Geometrie macht den Abschluss der ersten Lektion: Es illustriert sehr schön das Vereinen und Entzweien, zwei in entgegen gesetzte Richtungen verlaufende Vorgänge, wie wir sie auch im Titelbild finden. In Ergänzung zu meinem Auftritt als Pythagoras verteile ich ein Blatt mit den wichtigsten Angaben über Pythagoras (Siehe S. 44).

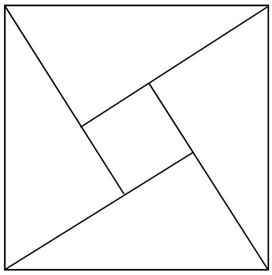


III. Akt: Beweisvielfalt

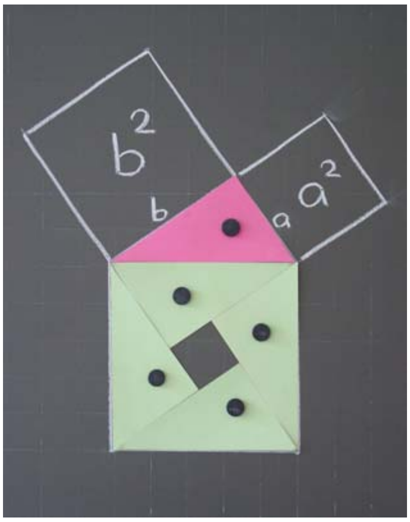
Für die zweite Lektion reinige ich die Tafel und notiere **III. Akt: Beweisvielfalt**
Wir haben zwar den Satz des Pythagoras bewiesen, und dies könnte uns genügen. Bekannt sind heute gegen 400 Beweise dieses bekanntesten mathematischen Satzes. Wir finden sie vereint in einem Buch von Elisha Scott Loomis mit dem Titel „The Pythagorean Proposition“. Darunter gibt es ganz unterschiedliche Beweise, an denen wir viel lernen können. Deshalb wollen wir noch ein paar weitere Beweise kennen lernen und uns dabei gleichzeitig im Argumentieren, logischen Denken und folgerichtigen Schliessen üben. „Was ist überhaupt ein Beweis?“ Wir suchen nach einer vorläufigen Definition. „Beweis: eine Behauptung überprüfen.“ – „Etwas klären, auf Bisherigem begründen.“

Diejenigen Schüler und Schülerinnen mit dem gleichen Beweisblatt bilden nun für die nächste Lektion eine Gruppe. Zwei der Schüler haben ihr Blatt nicht hier; wissen nicht einmal mehr, welchen Beweis sie studieren sollten. Da zudem zwei Schülerinnen krankheitshalber fehlen, kann ich so die Gruppen etwas ausgleichen. In jeder Gruppe soll der Beweis minutiös diskutiert und dann eine Präsentation für die Klasse vorbereitet werden. Ich kündige an, dass ich bei jeder Gruppe vorbeikommen möchte, um den Beweis vorzubesprechen. Nur so habe ich einigermassen Garantie, dass der Beweis verstanden ist und die Präsentation genügend Gehalt hat. Sehr unterschiedlich konzentriert gehen die Gruppen vor. Überall sollten Klärungen stattfinden, vielerorts fehlt es an logischem Denken. Meine Zeit reicht nicht, um allen Gruppen gerecht zu werden. Kongruenzsätze, Scherungsprinzip und algebraische Umformungen müssen zuerst ins Bewusstsein rücken. Immerhin, die leichtesten zwei Beweise scheinen gut vorbereitet und können in der 3. Lektion präsentiert werden.

Als erstes lasse ich den Beweis 2 zeigen, der auf der oben beschriebenen Faltfigur basiert. Der indische Mathematiker Bhaskara soll im 12. Jahrhundert diese Figur gezeichnet und nur darunter geschrieben haben: Siehe! So einfach geht das allerdings nicht. Vorerst muss die vorliegende Figur genau betrachtet sein. Vier kongruente rechtwinklige Dreiecke bilden ein Quadrat, da wir in jeder Ecke zwei spitze Winkel des Dreiecks finden, die sich zu 90° ergänzen. Im Zentrum der Figur liegt ein kleines Quadrat, dessen Seitenlänge der Differenz der beiden Katheten eines Dreiecks entspricht.



Siehe!



Wenn wir die Hypotenuse mit c und die beiden Katheten mit a und b bezeichnen, lässt sich die Quadratfläche auf zwei verschiedene Arten ausdrücken und es ergibt sich die folgende Gleichung: $c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2$

Es folgt daraus: $c^2 = 2ab + (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + b^2$

Was zu beweisen war.

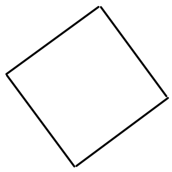
Der Beweis wird recht gut vorgetragen, da und dort muss ich etwas nachfragen. Die Zuhörenden können gut folgen und verstehen. Ich ergänze dieses Quadrat zur Pythagorasfigur. Die Katheten blitzen im Hypotenusenquadrat auf und der Beweis wird noch augenfälliger!

Der Beweis 6, ein Ergänzungsbeweis, wird weniger gut präsentiert. Obwohl in der Vorbesprechung alles klar schien, beschreitet Michael vorerst andere, völlig unklare Wege. Azra kann dann einigermassen verständlich erläutern, wie die beiden Kathetenquadrate in der Pythagorasfigur (vgl. S. 39) durch 4 kongruente rechtwinklige Dreiecke mit Katheten a und b zu einem grossen Quadrat mit den Seiten (a+b) ergänzt werden. Marc fährt fort und zeigt, wie das Quadrat über der Hypotenuse c, ergänzt durch dieselben 4 Dreiecke (Fläche F_Δ), ebenfalls zu $(a+b)^2$ werden. So ergibt sich die Gleichung:

$$a^2 + b^2 + 4 \cdot F_\Delta = (a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot F_\Delta \quad \rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{q. e. d.}$$

Die Dreiecksfläche F_Δ muss nicht einmal speziell durch a und b ausgedrückt werden.

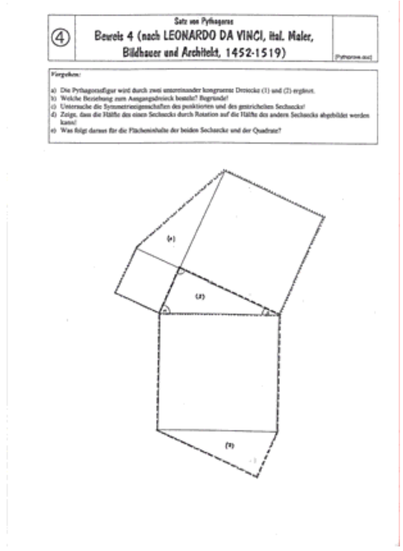
In Ergänzung zeige ich am Hellraumprojektor die griechische Briefmarke, die 1952 zum Gedenken an den 2500. Jahrestag der Gründung des Pythagoräischen Bundes herausgegeben wurde. Legt man ein durchsichtiges farbiges Quadrat darüber, so lässt sich sehr schön nochmals veranschaulichen, wie die vier Dreiecke einmal die oberen zwei und einmal das untere grosse Quadrat zu diesem farbigen Quadrat ergänzen.



Es bleiben noch zehn Minuten; Verdauung ist angesagt. Ich bitte die Schüler und Schülerinnen, das Faltquadrat einzukleben und sich einen der beiden Beweise ausführlich zu notieren. Die verbliebenen Gruppen mahne ich, ihren Beweis auf die nächste Lektion nochmals gut zu studieren und für die Präsentation bereit zu halten.

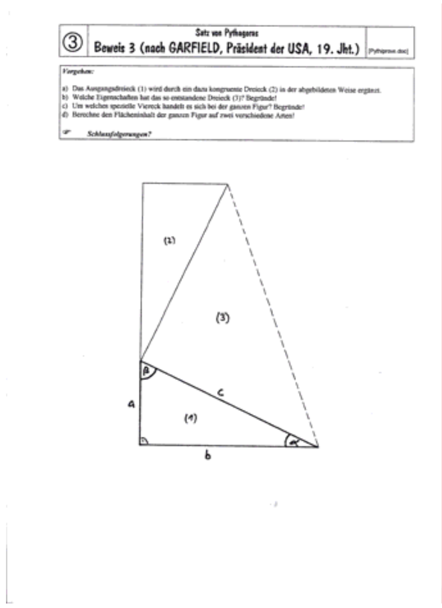
Lektionen 9/10

Heute nimmt die Beweisvielfalt ihre Fortsetzung. An der Tafel habe ich die ersten drei Beweise skizziert und rechts davon die drei Bereiche markiert für die Vorbereitungszeichnungen. Wie ich drei Minuten vor Stundenbeginn erscheine, macht niemand Anstalten, etwas an der Tafel zu zeichnen. Erst meine ausdrückliche Aufforderung bewegt die ersten zur Tat. Das Zeichnen geht schleppend vor sich, ich werde ärgerlich. Einige Minuten nach Stundenbeginn vergeht mir die Geduld, ich schicke die meisten an den Platz und lasse Beweis 4, den Beweis von Leonardo da Vinci vorstellen. Dies ist sicher kein einfacher Beweis zum Erklären. Es braucht einiges an Nachfrage meinerseits, da sonst vieles einfach übersprungen wird. Warum sind die Sechsecke symmetrisch? Warum geht die Hälfte des oberen Sechsecks bei Drehung



in die Hälfte des unteren Sechsecks über? Welches ist der Drehwinkel? Und welches ist jetzt die Folgerung? Besonders das schrittweise Begründen der Deckung durch Derhung bereitet grosse Mühe. Schliesslich nicken aber alle Schüler und Schülerinnen. Wir staunen über die geniale Beweisidee von Leonardo.

Beweis 3 wurde vom amerikanischen Präsidenten Garfield 1876 entdeckt. Er wird uns von Mehmet und Patrice, vorgestellt. Obwohl dieser algebraische Beweis nicht sonderlich schwer ist, bekunden sie grosse Mühe. Da habe ich offenbar zu wenig Betreuungsarbeit geleistet. Aber die beiden haben sich auch nicht gemeldet, wohl das Problem vor sich her geschoben. Nun, die Klasse macht recht gut mit, besonders Gabriel und Urs begründen, warum das dritte Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig ist. Mehmet will das immer noch nicht recht begreifen. Viele elementare Lücken im algebraischen und geometrischen Bereich werden bei ihm offenbar.



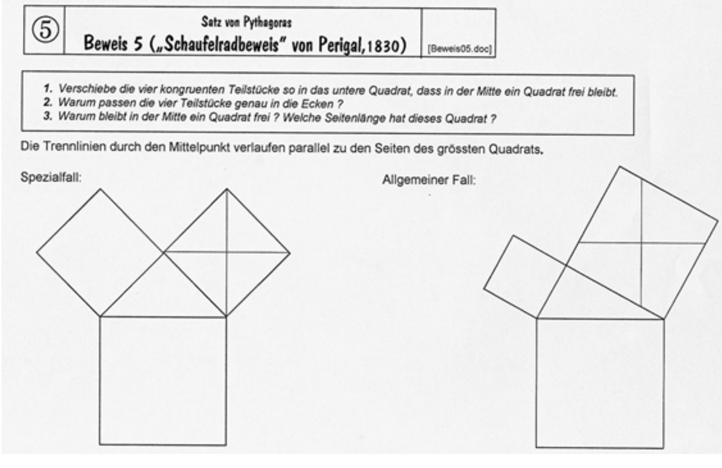
Die Trapezfläche lässt sich auf zwei verschiedene Arten ausdrücken: Einmal mit der bekannten Formel für die Trapezfläche und einmal als Summe der beiden kongruenten Dreiecksflächen und eines halben Quadrats.

Trapezfläche F_T = Mittellinie · Höhe =

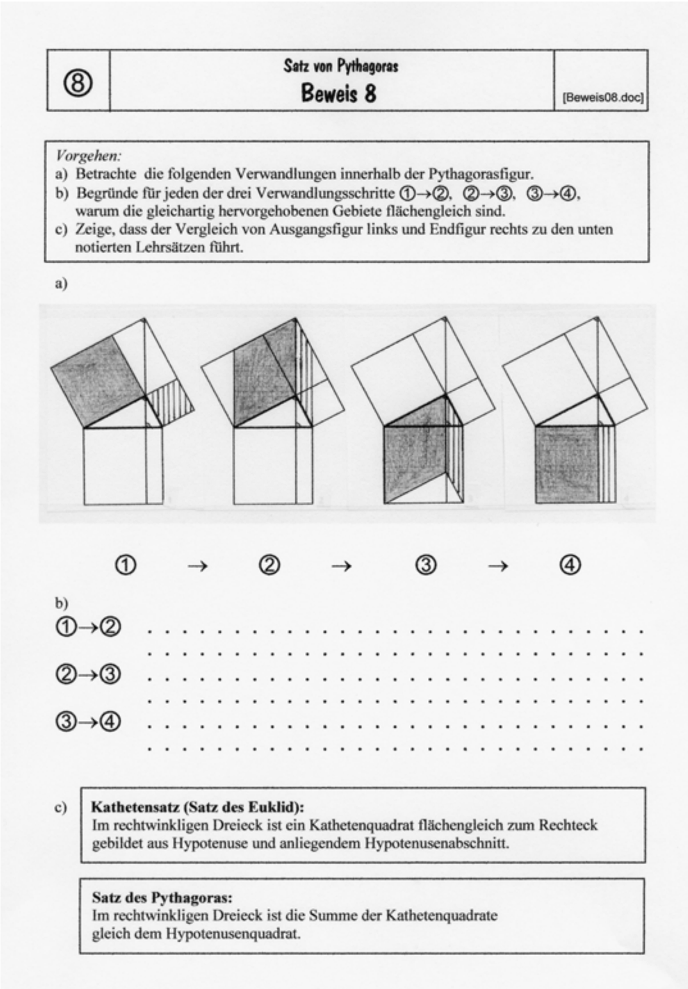
$$= \frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Es dauert lange, bis Mehmet den Inhalt dieser Gleichung versteht und hinschreiben kann, was die andern erläutern.
Das Vereinfachen dieser Gleichung gelingt den meisten Schülern sofort.
Multiplikation mit 2 liefert $(a + b)^2 = 2ab + c^2$

$\rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$ w.z.z.w.



Die zweite Lektion ist den Beweisen 5 und 8 gewidmet. Beweis 5 ist der Schaufelradbeweis aus dem Jahre 1830 von Perigal, der als Hobbymathematiker verschiedenste Zerlegungsprobleme auf kariertem Papier löste. Eindrücklich ist es, diesen Beweis als Verallgemeinerung der Zerlegung zu betrachten, die wir in den ersten Lektionen bereits zur Vereinigung von zwei gleich grossen Quadraten gefunden haben. Es ist anspruchsvoll zu zeigen, dass die vier kongruenten Vierecke wirklich unten hineinpassen. Die Gruppe um Urs bewältigt dies aber zufrieden stellend, auch wenn sie nicht allzu sehr in die Details geht. Womöglich werde ich diesen Beweis in Zukunft weglassen oder selbst demonstrieren, da er fast zu anspruchsvoll ist.


⑧ Satz von Pythagoras
Beweis 8
[Beweis08.doc]

Vorgehen:
a) Betrachte die folgenden Verwandlungen innerhalb der Pythagorasfigur.
b) Begründe für jeden der drei Verwandlungsschritte ①→②, ②→③, ③→④, warum die gleichartig hervorgehobenen Gebiete flächengleich sind.
c) Zeige, dass der Vergleich von Ausgangsfigur links und Endfigur rechts zu den unten notierten Lehrsätzen führt.

a)

① → ② → ③ → ④

b)
①→② . . . .
②→③ . . . .
③→④ . . . .

c) **Kathetensatz (Satz des Euklid):**
Im rechtwinkligen Dreieck ist ein Kathetenquadrat flächengleich zum Rechteck gebildet aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt.

Satz des Pythagoras:
Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

Es bleibt Beweis 8, ein Verwandlungsbeweis, für den ich eine Folie und Schülerkopien bereitstelle. Gabriel und Monique erläutern recht gut. Die Verwandlung eines Rechtecks oder Quadrats in ein Parallelogramm mit gleicher Höhe will ich aber genauer diskutiert haben, da dies lange nicht für alle eine selbstverständliche Konstruktion ist. Auch hier gilt es wieder, eine Lücke zu stopfen. Der Beweis ist für mich als Mathematiklehrer deshalb zusätzlich sehr nützlich, weil gleichzeitig damit der Kathetensatz hergeleitet wird und weil er eine gute Grundlage schafft, um den Beweis zu verstehen, wie ihn Euklid in seinen Elementen geliefert hat.

Die Schülerinnen und Schüler haben genügend Zeit, diesen Beweis zu verdauen und sich noch einen andern Beweis zu notieren. Als besondere Herausforderung verteile ich den Beweis von Euklid, wie er ihn als Satz 47 am Ende des ersten Buches seiner Elemente (Euklid 1997, S. 32) geliefert hat. Zusätzlich geht die Aufforderung an alle, sich den Lieblingsbeweis auszusuchen und sich diesen sehr gut einzuprägen. Und zum Kathetensatz folgen zwei Konstruktionsaufgaben:

1. Verwandle ein Quadrat mit den Seiten 5 cm und 3 cm in ein Quadrat.
2. Verwandle das Quadrat mit Seitenlänge 6 cm in ein Rechteck mit Seite a = 2.5 cm.

Dieses Studieren von Beweisen hat doch einige Mühe bereitet. Insbesondere ist das genauere Hinterfragen und Begründen ungewohnt. Trotzdem gilt für viele, was Monique in ihrem Feedback ausdrückt: „Diese Lektionen fand ich von den besten des ganzen Themas. Denn zu forschen, Lösungen finden und den anderen präsentieren, macht Spass. Die Ideen der andern zu hören ist auch sehr interessant und lehrreich.“

Lektionen 11/12/13

Als erstes besprechen wir die beiden Konstruktionsaufgaben.
Die Beweisvielfalt habe ich an der Tafel aufgehängt. Es sind bislang 7 Beweise (die Nummer 7 habe ich ausgelassen, da dieser etwas anspruchsvoller ist als die andern). Ich gehe jeden einzelnen nochmals kurz durch und erläutere die Beweisidee. – Wir haben zwei Zerlegungs-

beweise (1, 6), zwei algebraische Beweise (2, 3), je einen Symmetriebeweis (4), einen Ergänzungsbeweis (6) und einen Verwandlungsbeweis (8).

IV. Akt: Die Beweisführung als Prinzip in den „Elementen“ des Euklid

An die Leinwand projiziere ich den Beweis 9 von Euklid. Ich frage Simon, wie weit er die Beweisführung verstanden habe. Er meint: „Bis auf die Höhe der Zeichnung.“ Dies ist ja schon mal ganz beträchtlich. Er erläutert Zeile für Zeile; die andern fragen nach oder ergänzen. Beatrice und Azra haben den Beweis in der Bahn bei der Herfahrt studiert und sind bei Pgm BL stecken geblieben. Beatrice sieht klar, dass Pgm Parallelogramm meint, aber welches ist dieses Parallelogramm. Müsste es nicht „Rechteck“ heissen? Gabriel klärt, dass eben ein Rechteck auch ein Parallelogramm ist und dass hier auch wieder eine Flächenverwandlung vorliegt. Mehmet kann den Sachverhalt erläutern: „Wir verschieben A nach unten auf die Hypotenuse und erhalten ein halbes Rechteck.“ – „Worauf verweist Euklid wohl mit seiner Bemerkung (I, 4)?“ – „Es muss ein Kongruenzsatz sein?“ – „Welcher?“ – „Der Kongruenzsatz SWS.“ – Wir folgen der Beweisführung noch bis zum Schluss. Ich bin erstaunt wie weit doch einige diesen schwierigen Text studiert und verstanden haben. Die Details, Satz für Satz, sind einleuchtend. Nur der Blick aufs Ganze hat überall gefehlt. Jetzt aber wird klar, dass dieser Beweis sehr viel Verwandtschaft hat mit Beweis 8. Die Vorbereitung hat sich gelohnt! In Text des Euklid finden wir implizite den Kathetensatz, der wegen seinem Auftreten in diesem Abschnitt auch Satz des Euklid genannt wird. Die Pause ist wohlverdient.

⑨	Satz von Pythagoras **Beweis 9: Beweis bei Euklid** (ca.300v.Chr.)	[Beweis09.doc]

Euklid: Die Elemente. Buch I - XII. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt; 1980. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Diese 12 Bücher wurden um 325 v. Chr. in Alexandria systematisch zusammengestellt und waren die massgebenden Lehrbücher der Mathematik über mehr als zwei Jahrtausende hinweg.

Erstes Buch.

§ 47 (L. 33).

Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.

$A B C$ sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel $B A C$. Ich behaupte, daß $B C^2 = B A^2 + A C^2$.

Man zeichne nämlich über $B C$ das Quadrat $B D E C$ (I, 46) und über $B A$, $A C$ die Quadrate $G B$, $H C$; ferner ziehe man durch A $A L \parallel B D$ oder $C E$ und ziehe $A D$, $F C$.

Da hier die Winkel $B A C$, $B A G$ beide Rechte sind, so bilden an der geraden Linie $B A$ im Punkte A auf ihr die zwei nicht auf derselben Seite liegenden geraden Linien $A C$, $A G$ Nebenwinkel, die zusammen $= 2$ R. sind; also setzt $C A$ $A G$ gerade fort (I, 14). Aus demselben Grunde setzt auch $B A$ $A H$ gerade fort. Ferner ist $\angle D B C = F B A$; denn beide sind Rechte (Post. 4); daher füge man $A B C$ beiderseits hinzu; dann ist der ganze Winkel $D B A$ dem ganzen $F B C$ gleich (Ax. 2). Da ferner $D B = B C$ und $F B = B A$ (I, Def. 22), so sind zwei Seiten $D B$, $B A$ zwei Seiten $F B$, $B C$ (überkreuz) entsprechend gleich; und $\angle D B A = \angle F B C$; also ist Grdl. $A D$ = Grdl. $F C$ und $\triangle A B D = \triangle F B C$ (I, 4). Ferner ist Pgm. $B L = 2 \triangle A B D$; denn sie haben dieselbe Grundlinie $B D$ und liegen zwischen denselben Parallelen $B D$, $A L$ (I, 41); auch ist das Quadrat $G B = 2 \triangle F B C$; denn sie haben wieder dieselbe Grundlinie, nämlich $F B$, und liegen zwischen denselben Parallelen $F B$, $G C$. [Von Gleichem die Doppelten sind aber einander gleich (Ax. 5).] Also ist Pgm. $B L =$ Quadrat $G B$. Ähnlich läßt sich, wenn man $A E$, $B K$ zieht, zeigen, daß auch Pgm. $C L =$ Quadrat $H C$; also ist das ganze Quadrat $B D E C$ den zwei Quadraten $G B + H C$ gleich (Ax. 2). Dabei ist das Quadrat $B D E C$ über $B C$ gezeichnet und $G B$, $H C$ über $B A$, $A C$. Also ist das Quadrat über der Seite $B C$ den Quadraten über den Seiten $B A$, $A C$ zusammen gleich — S.

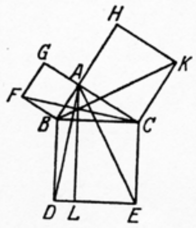


Fig. 46.

EUKLID UND DIE GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

Euklid von Alexandria, einer der einflussreichsten Mathematiker aller Zeiten, lebte um 300 vor Christi Geburt. Über ihn selbst wissen wir praktisch nichts, nicht einmal seine genauen Lebensdaten. Er verfasste **Die Elemente**, ein dreizehnbändiges Kompendium des gesamten mathematischen Wissens jener Zeit, das in streng systematischem Aufbau die Geometrie sowie eine elementare Zahlenlehre darstellt.
„Die Elemente“ sind das dauerhafteste wissenschaftliche Lehrbuch aller Zeiten und gehören zu den Büchern mit den meisten Auflagen. In der „ZEIT-Bibliothek der 100 Sachbücher“ werden „Die Elemente“ von Euklid an vorderster Stelle gewürdigt. Noch bis vor gut hundert Jahren wurden Teile davon als Lehrbuch für die Mathematik verwendet.

Bücher I - VI:	Ebene Geometrie samt Satz des Pythagoras, Proportionen, Ähnlichkeitslehre
Bücher VII-IX:	Elementare Zahlenlehre mit Primzahlen, Primfaktorzerlegung Euklidischer Algorithmus zur Bestimmung des g.g.T.
Bücher XI-XII:	Körperberechnungen und Theorie der fünf regulären Körper.

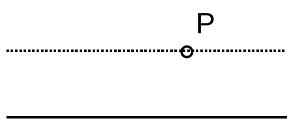
Zum ersten Mal wird die Geometrie axiomatisch-deduktiv aufgebaut. Aus der Wirklichkeit abstrahierte Grundbegriffe (**Definitionen**) und Grundrelationen (so genannte **Axiome** und **Postulate**) bilden das Fundament. Alle weiteren Aussagen werden mit Hilfe der Logik abgeleitet.
Beispiele für Grundbegriffe oder Definitionen: „Ein Punkt ist, was keine Teile hat.“
„Eine Linie ist breitenlose Länge.“ „Die Enden einer Linie sind Punkte.“
„Eine gerade Linie ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmässig liegt.“ . . .
Beispiele für Postulate und Axiome: Gefordert soll sein:

„Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann.“
„Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.“
„Dass alle rechten Winkel einander gleich sind.“
„Was einander deckt, ist einander gleich.“
„Das Ganze ist grösser als der Teil.“

Das System der Axiome ist nicht willkürlich gewählt, sondern eine Abstraktion aus der jahrtausende alten täglichen Erfahrung des Menschen; sie ist deshalb die *Geometrie unseres Anschauungsraumes.*
Für die logische Herleitung von Lehrsätzen aus den Axiomen und aus früheren Lehrsätzen dient das **Euklidische Beweisverfahren**: Voraussetzung - Behauptung - Beweis. Dieses Grundmuster bestimmt die Mathematik bis in die heutige Zeit. Mit ihm wird aus wenigen Axiomen die gesamte „euklidische Geometrie“ logisch aufgebaut. Und jede so schlüssig hergeleitete mathematische Aussage hat Ewigkeitswert.

König Ptolemäus erkundigte sich bei Euklid nach einem leichteren Weg zur Mathematik als dem durch die Elemente. *„Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik“*, war Euklids Antwort.

Berühmt geworden ist das fünfte seiner Postulate, das so genannte **Parallelenaxiom**, welches behauptet, dass durch jeden Punkt ausserhalb einer gegebenen Geraden *eine und nur eine* Parallele zu der gegebenen Geraden gezogen werden kann.



Eine entscheidende Wende in der Geometrie brachte das Bestreben, eine Geometrie aufzubauen, in der das Parallelenaxiom nicht gilt. Nach 1800 erst wurden dann derartige *nichteuklidische* Geometrien entwickelt. Die moderne Physik hat gezeigt, dass man zu derartigen Geometrien übergehen muss, um die neuen physikalischen Erkenntnisse zu beschreiben (Relativitäts- und Gravitationstheorie, Kosmologie). Denn es hat sich gezeigt, dass die Geometrie unseres Universums eine nicht-euklidische ist.

Zu Beginn der zweiten Lektion verweise ich nochmals auf unsere acht verschiedenen Beweise und erkundige mich nach dem individuellen Lieblingsbeweis. Es zeigt sich das folgende Bild:

Beweis	①	②	③	④	⑤	⑥	⑧	⑨
Häufigkeit	1	4	2	4	2	2	6	0

Dass niemand Beweis 9 von Euklid wählen würde, war zu erwarten. Es überrascht mich aber, dass Beweis 1 nur von Gabriel gewählt wird und dass Mehmet und Patrice den Beweis 3 wählen, den sie so schlecht präsentiert haben. (Ob sie wohl bei den anderen Beweisen abgeschaltet haben?) Und warum wird Beweis 6 so wenig gewählt, obwohl er in meinen Augen einer der einfachsten ist? Ist die dürftige Präsentation schuld? Mehrere Schülerinnen und Schüler wählen denjenigen Beweis, den sie in der Kleingruppe studiert haben. Simon gefällt Beweis 4 besonders, denn: „Da muss man nichts rechnen." David sagt, Beweis 6 sehe gut aus und man könne leicht eine Gleichung aufstellen. Beweis 8 sei erstaunlich dynamisch, es sei gut sichtbar, was passiert. Ich erkläre, für mich seien die Beweise 6 und 8 die Favoriten. Beide gehen von der typischen, gut einprägsamen Pythagorasfigur aus. Beweis 6 sei leicht einzusehen und Beweis 8 beinhalte schöne Verwandlungen und als Nebenerkenntnis den Kathetensatz.

An der Tafel notiere ich den Titel zum 4. Kapitel:

IV. Akt: Die Beweisführung als Prinzip in den „Elementen" des Euklid

Um noch etwas klarer das Wesen eines Beweises zu erfassen, erläutere ich, ausgehend von diesem Beweis 9, dem Höhepunkt am Ende des ersten Buches von Euklids „Elementen", was ich auf einem Blatt „Euklid und die Grundlagen der Geometrie" (vgl. S. 50) zusammengefasst habe. Zur Darstellung des Euklidischen Beweisschemas (Voraussetzung – Behauptung – Beweis) wähle ich als Exempel den Beweis 6. Damit will ich der Klasse und insbesondere Mehmet und Pascal nochmals zeigen, was ich unter einem gut präsentierten Beweis verstehe.

Als Beispiel einer nichteuklidischen Geometrie erwähne ich die Kugelgeometrie. Denn wer ist schon sicher, dass z.B. seine zwei „Parallelen" auf dem Zeichenblatt in Wirklichkeit nicht Ausschnitte von zwei Grosskreisen auf der Erdkugeloberfläche sind?

Wir werfen einige kurze Querblicke in andere Wissensbereiche: In die Physik, welche die Welt möglichst mit einer einzigen Weltenformel vom Urknall bis heute erklären möchte, in die Philosophie, wo im 17. Jahrhundert Spinosa seine Ethik im Stil der Elemente Euklids schrieb, indem er seine strengen Theoreme aus Definitionen und Axiomen ableitete, und in die Rechtswissenschaft, wo versucht wird, überzeugende Beweise für Schuld oder Unschuld zu führen. Allerdings gibt es ausserhalb der Mathematik dieses hohe Mass an Gewissheit nicht, wie wir es innerhalb dieser Wissenschaft kennen. Damit sind wir bereits weit in der dritten Stunde angelangt.

Es reicht eben noch für den Einstieg in das nächste, praktischere Kapitel mit der Überschrift

V. Akt: Übung führt zu Vertrauen in die geschaffenen Pfade

Bevor wir uns verschiedensten Anwendungen widmen können, gilt es, die Satzgruppe des Pythagoras zu vervollständigen. Der Satz des Pythagoras und der Kathetensatz (= Satz des Euklid) stehen samt Bild nochmals an der Tafel. Der Höhensatz ergibt sich sofort aus den andern beiden Sätzen und vervollständigt diese Satzgruppe. An Beispielen zeigen wir, wie uns der Höhensatz – wie übrigens auch der Kathetensatz – erlaubt, Rechtecke konstruktiv in Quadrate zu verwandeln und umgekehrt. Das Blatt über Euklid und seine „Elemente“ sowie ein paar erste Konstruktionsaufgaben sollen auf den nächsten Donnerstag bearbeitet werden.

Lektionen 13/14

Wir widmen uns ganz den verschiedensten Konstruktionsaufgaben. Unter anderem verwandeln wir ein Rechteck, ein Dreieck, ein regelmässiges Sechseck, beliebige Vier- und Fünfecke in ein Quadrat. Ein beliebiges Sechseck kann durch Scherung, wie wir sie in den Beweisen 8 und 9 gesehen haben, in ein Fünfeck, dieses in ein Viereck und dieses wiederum in ein Dreieck verwandelt werden. Das Dreieck lässt sich in ein Rechteck verwandeln, und dieses ist quadrierbar. Somit wird klar, dass ein beliebiges Vieleck in ein Quadrat verwandelt werden kann. Hier verwenden wir den gleichen induktiven Denkschluss, wie wir ihn bei der Verallgemeinerung zum Vereinen der Quadrate zu Beginn des Lehrstücks kennen gelernt haben.

Lektionen 15/16/17

Wir bereinigen die Konstruktionsaufgaben. Bei einer ersten Berechnungsaufgabe stossen wir auf Quadratwurzeln. Da derartige Wurzeln bei den Berechnungen im Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras immer wieder auftauchen, lernen und üben wir den Umgang mit diesen Quadratwurzeln, was verschiedenen Schülerinnen und Schülern offenbar schwer fällt.

Lektionen 18/19

Diese beiden Lektionen sind noch ganz den Wurzelgesetzen und den Berechnungsaufgaben gewidmet, die Anwendungen der gewonnenen Sätze in den verschiedensten Alltagsbereichen umfassen.

Lektionen 20/21/22

Vorerst brauchen wir eine halbe Lektion, um noch ungeklärte Aufgaben zu bereinigen. Dann können wir in den letzten grossen Abschnitt einsteigen. Ich schreibe an die Tafel:

VI. Akt: Das grosse Finale zum Satz des Pythagoras

Es folgt das grosse Finale mit Ergänzungen und Ausblicken.

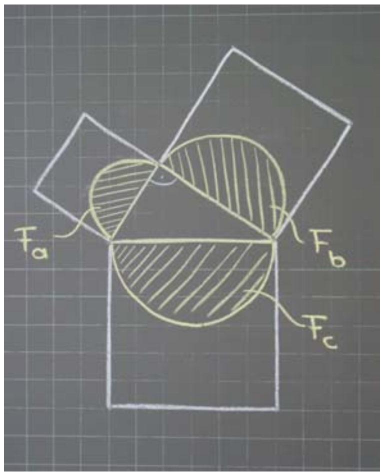
a) Klassische Verwandlungsaufgaben zum Quadrat

Wir stellen die bislang, z. T. in der Übungsserie gelösten Quadraturaufgaben zusammen:

Zwei gleiche Quadrate	$\rightarrow$	Quadrat
zwei verschiedene Quadrate	$\rightarrow$	Quadrat
Rechteck	$\rightarrow$	Quadrat (mit Höhensatz oder Kathetensatz)
Dreieck ($\rightarrow$ Rechteck)	$\rightarrow$	Quadrat
beliebiges Vieleck ($\rightarrow$ Rechteck)	$\rightarrow$	Quadrat
Kreis	$\rightarrow$	Quadrat ??? Ein unlösbares Problem!

Die Verwandlung eines Kreises in ein Quadrat hat sich als unlösbares Problem herausgestellt! Die Mathematiker können heute sogar beweisen, dass dieses Problem unlösbar ist, d.h. dass es grundsätzlich nicht möglich ist, die gesuchte Quadratseite mit Zirkel und Lineal zu konstruieren! Wir sprechen auch übertragen von der „Quadratur des Kreises / Zirkels“. Diese Sprechweise ist den Jugendlichen bisher unbekannt. Es folgt ein kurzer Hinweis auf die drei klassischen antiken mathematischen Probleme, die sich als unlösbar herausgestellt haben: Die Quadratur des Kreises, die Verdoppelung des Würfels und die Dreiteilung des Winkels.

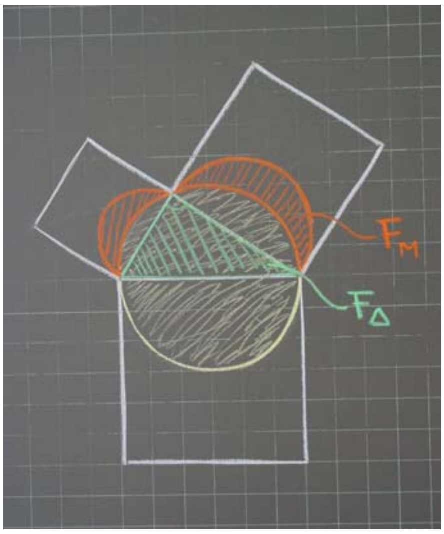
Bei den Möndchen des Hippokrates erleben wir ein sensationelles Ergebnis. An diesem Beispiel wurde erstmals in der Geschichte der Mathematik eine rund begrenzte Fläche beschrieben, die nachgewiesenermassen gleiche Fläche hat wie ein Vieleck, hier wie ein Dreieck und damit quadrierbar ist. Zeichnen wir über jeder Seite des rechtwinkligen Dreiecks den Halbkreis, so ergibt sich für die Halbkreisflächen dasselbe wie für die entsprechenden Quadratflächen:



$$F_a + F_b = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}\cdot\left(a^2+b^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\cdot c^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2 = F_c$$

Jede Halbkreisfläche beansprucht nämlich den gleichen Anteil ($\pi/8$ oder 39.27%) der zugehörigen Quadratfläche. Hier liegt eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras verborgen: Wir können beliebige formgleiche (ähnliche) Figuren über den Seiten errichten und es besteht immer noch dieselbe Flächenbeziehung. Sehr zum Be-Greifen wird dies durch ein Experiment in der neu eröffneten Ausstellung Mathe-Magie des Technoramas Winterthur dargestellt (Bild nebenan!). Später, im Kapitel „Ähnlichkeit“, werde ich mit der Klasse darauf zurückkommen, wenn wir den Satz des Pythagoras erneut beweisen werden.

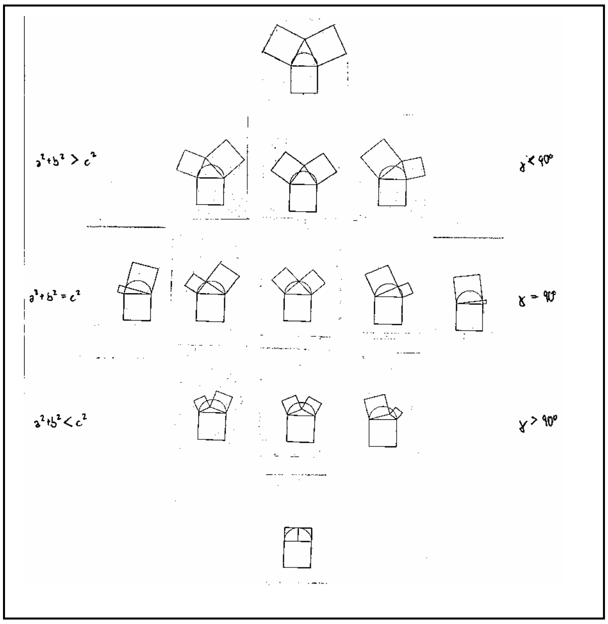


Klappen wir jetzt den grössten Halbkreis nach oben, so entstehen die beiden Möndchen und es ergibt sich $F_M = F_a + F_b - (F_c - F_\Delta) = F_\Delta$, das heisst die gesamte Möndchenfläche F_M ist gleich der Fläche F_Δ des rechtwinkligen Dreiecks!!! Wir können zwar keinen Kreis mit Zirkel und Lineal in ein Quadrat verwandeln, aber diese zwei Möndchen zusammen sind flächengleich dem zentralen Dreieck in der Pythagorasfigur und können damit auch in ein Quadrat verwandelt werden! Hippokrates von Chios hat dies bereits im 5. Jahrhundert vor Christus erkannt und bewiesen. Zudem kann man diese Figur und diesen Zusammenhang als schön empfinden. Aber darüber lässt sich bekanntlich streiten.

b) Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras

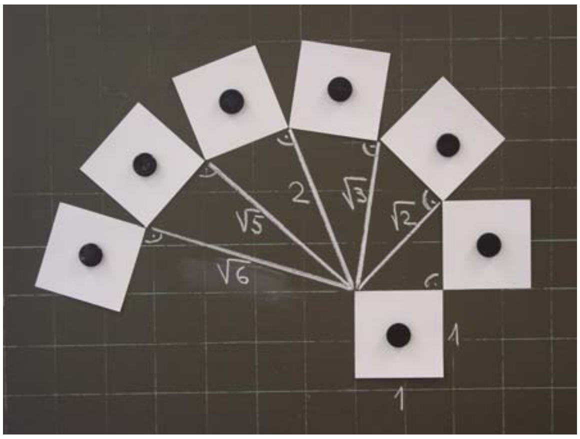
Eine andere Verallgemeinerung leite ich ein mit einer Übung: Mit der Tischkante und meinen Armen bilde ich ein aufgestelltes gleichseitiges Dreieck. Die Schülerinnen und Schüler bitte ich, ruhig zu beobachten und sich die Quadrate über den Dreiecksseiten vorzustellen. Jetzt variiere ich das Dreieck: Einmal steigt die dritte Ecke ganz hoch, dann wandert sie nach unten bis fast zur Tischkante, nochmals hoch und wieder runter, dann dasselbe langsam einmal mehr rechts, einmal mehr links. „Was lässt sich sagen über die Summe der Flächen der beiden oberen Quadrate in Bezug auf die untere Quadratfläche, die ich am Tisch befestigt habe?“ Es ist offensichtlich, dass diese Flächensumme einmal grösser und ein andermal kleiner sein muss als die untere fixe Quadratfläche. Und dazwischen ist sie einmal genau gleich gross, nämlich dann und nur dann, wenn wir ein rechtwinkliges Dreieck vorfinden, d.h. wenn die obere Ecke auf dem Thaleskreis über der Basis liegt.

Für diese Verallgemeinerung des Satzes auf Dreiecke mit beliebigen Winkeln verteile ich neun kleine Bildchen mit verschiedenen Dreiecken und den Quadraten über den Seiten. Die Schüler sollen die Darstellungen am Platz sortieren und möglichst sinnvoll anordnen! Das geht recht gut. Zwei verschiedene Anordnungen entstehen: linear und zweidimensional im Kreuz. Ich lasse beide Anordnungen an der Tafel präsentieren. Die zweite setzt sich in der Diskussion klar durch. Ich verteile noch weitere vier Figuren, worauf diese problemlos eingefügt werden. Lassen wir die obere Ecke auf einer Vertikalen zirkulieren, so wird diese Verallgemeinerung zum Satz des Pythagoras einsichtig. Weiter seitlich gelegene Eckpunkte lasse ich im Moment der Übersicht halber weg.



Hefteintrag von Roman

c) Wurzelschnecke und Quadratschnecke
Ich hänge den Anfang der sogenannten Wurzelschnecke an die Tafel und wir ergänzen und beschriften. Es lassen sich mit dieser Methode des fortgesetzten Anhängens eines Einheitsquadrats der Reihe nach alle Wurzeln der natürlichen Zahlen bilden. Eine Schülerin hat bereits einmal so etwas gezeichnet und sagt, das sehe aus wie eine Schnecke oder eine Muschel. Ich: „Es ist eine Schnecke, die Wurzeln erzeugt, darum wird sie Wurzelschnecke genannt.“ –



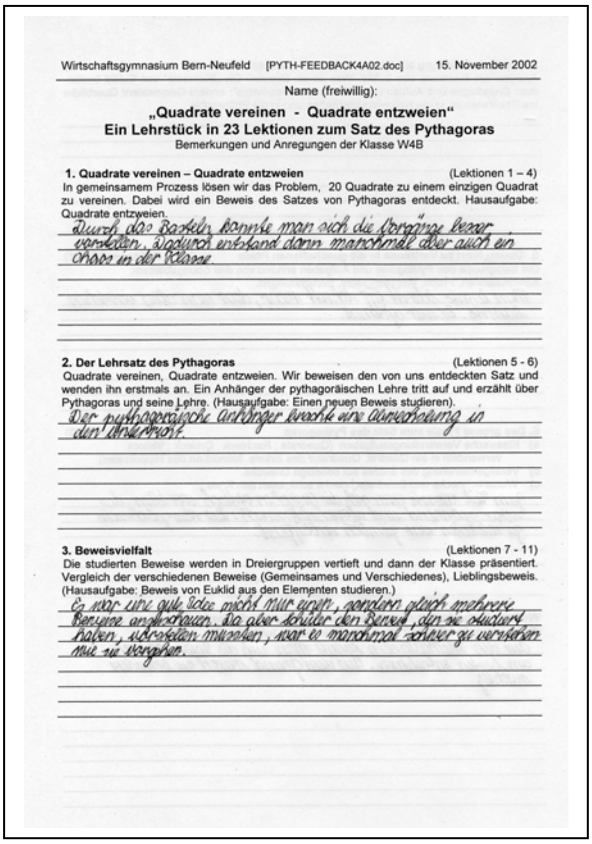
Dritte Lektion
Auf der Rückseite der Tafel habe ich links ein Blatt mit den ursprünglichen zwanzig Quadraten hingeheftet, in der Mitte das Quadrat, das die Einzelquadrate vereint und ganz rechts sind die Ausgangsquadrate in Spiralform wie bei der Wurzelschnecke angeordnet. Nach einigem Hinsehen wird die letzte Linie der Spiralform als Quadratlänge erkannt. Wir halten das grosse Quadrat hin: Es passt!

Abschluss
Ich ergänze das Bild durch das Pythagorasblatt, zwei Beweisblätter, das Euklidblatt und die Aufgabenblätter. So spannt dieses schöne Schlussbild den Bogen zum Anfang. Wir durchschreiten gedanklich nochmals den Weg: Vom Vereinen und Entzweien der Quadrate über

das Entstehen der Pythagorasfigur und den Beweis zu Pythagoras selbst, dann zu Beweisvielfalt und Beweisprinzip, Aufbau der Geometrie bei Euklid und die vielfältigen Anwendungen und Aspekte des berühmten Satzes.

1.5 Feedback der Schüler zum Lehrstück

Ein Feedbackbogen gibt den Schülerinnen und Schülern die Gelegenheit, individuell den Prozess durchzugehen und das Wichtigste aufzuschreiben. Ein Drittel der Klasse hat sich allerdings nur anonym geäussert, wie z.B. unten BBB (6) der Feedbacktabelle:


Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [PYTH-FEEDBACK4A02.doc] 15. November 2002

Name (freiwillig):

„Quadrate vereinen - Quadrate entzweien“
Ein Lehrstück in 23 Lektionen zum Satz des Pythagoras
Bemerkungen und Anregungen der Klasse W4B

1. Quadrate vereinen – Quadrate entzweien (Lektionen 1 – 4)
In gemeinsamem Prozess lösen wir das Problem, 20 Quadrate zu einem einzigen Quadrat zu vereinen. Dabei wird ein Beweis des Satzes von Pythagoras entdeckt. Hausaufgabe: Quadrate entzweien.

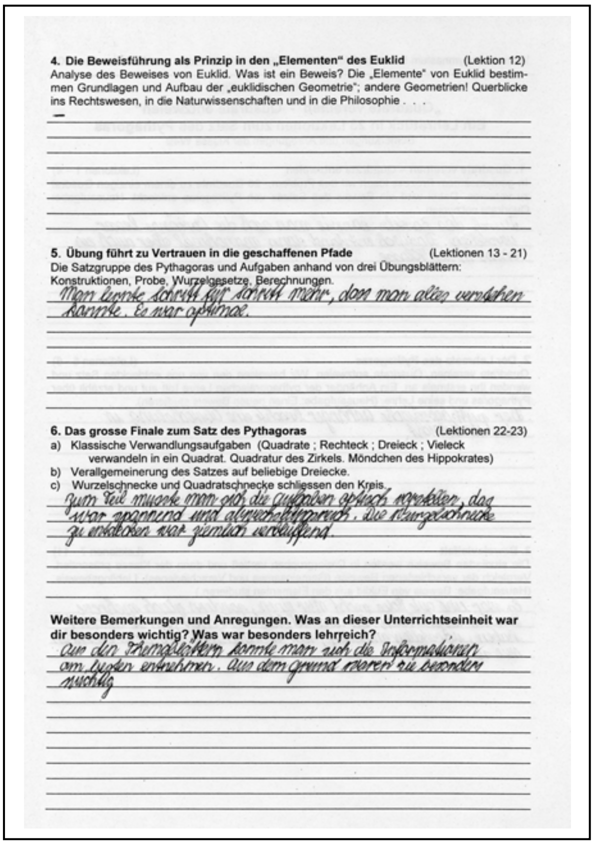
Durch das Basteln konnte man sich die Vorgänge besser vorstellen. Dadurch entstand dann manchmal aber auch ein Chaos in der Klasse.

2. Der Lehrsatz des Pythagoras (Lektionen 5 - 6)
Quadrate vereinen, Quadrate entzweien. Wir beweisen den von uns entdeckten Satz und wenden ihn erstmals an. Ein Anhänger der pythagoräischen Lehre tritt auf und erzählt über Pythagoras und seine Lehre. (Hausaufgabe: Einen neuen Beweis studieren).

Der pythagoräische Anhänger brachte eine Abwechslung in den Unterricht.

3. Beweisvielfalt (Lektionen 7 - 11)
Die studierten Beweise werden in Dreiergruppen vertieft und dann der Klasse präsentiert. Vergleich der verschiedenen Beweise (Gemeinsames und Verschiedenes), Lieblingsbeweis. (Hausaufgabe: Beweis von Euklid aus den Elementen studieren.)

Es war eine gute Idee nicht nur einen, sondern gleich mehrere Beweise anzuschauen. Da aber Schüler den Beweis, den sie studiert haben, vorstellen mussten, war es manchmal schwer zu verstehen wie sie vorgehen.


4. Die Beweisführung als Prinzip in den „Elementen“ des Euklid (Lektion 12)
Analyse des Beweises von Euklid. Was ist ein Beweis? Die „Elemente“ von Euklid bestimmen Grundlagen und Aufbau der „euklidischen Geometrie“; andere Geometrien! Querblicke ins Rechtswesen, in die Naturwissenschaften und in die Philosophie . . .

–

5. Übung führt zu Vertrauen in die geschaffenen Pfade (Lektionen 13 - 21)
Die Satzgruppe des Pythagoras und Aufgaben anhand von drei Übungsblättern: Konstruktionen, Probe, Wurzelgesetze, Berechnungen.

Man lernte Schritt für Schritt mehr, dass man alles verstehen konnte. Es war optimal.

6. Das grosse Finale zum Satz des Pythagoras (Lektionen 22-23)
a) Klassische Verwandlungsaufgaben (Quadrate ; Rechteck ; Dreieck ; Vieleck verwandeln in ein Quadrat. Quadratur des Zirkels. Möndchen des Hippokrates)
b) Verallgemeinerung des Satzes auf beliebige Dreiecke.
c) Wurzelschnecke und Quadratschnecke schliessen den Kreis.

Zum Teil musste man sich die Aufgaben optisch vorstellen, das war spannend und abwechslungsreich. Die Wurzelschnecke zu entdecken war ziemlich verblüffend.

Weitere Bemerkungen und Anregungen. Was an dieser Unterrichtseinheit war dir besonders wichtig? Was war besonders lehrreich?

Aus den Themablättern konnte man sich die Informationen am besten entnehmen. Aus dem Grund waren sie besonders wichtig

Die Tabelle ist so aufgebaut, dass zu jedem Akt die Möglichkeit, bzw. die Aufforderung besteht, Bemerkungen und Anregungen einzubringen. Diese Akteinteilung und die Veranschaulichung des Prozesses an der Tafel sollen der Erinnerung helfen. So ergibt sich zu jedem der Akte ein beträchtliches Meinungsspektrum. Am Schluss besteht die Möglichkeit für generelles Feedback oder sonstige Meinungen, die bisher nicht untergebracht werden konnten. Finden werden wir dort sicher auch Wiederholungen, als Verstärkungen gedacht, und Ansichten, die nicht direkt zum Lehrstück gehören.

„Quadrate vereinen - Quadrate entzweien“

Ein Lehrstück in 23 Lektionen zum Satz des Pythagoras

Bemerkungen und Anregungen der Klasse W4B vom 5. Dezember 2002

	I. Akt: Quadrate vereinen – Quadrate entzweien (Lektionen 1/2/3/4)	**II. Akt: Der Lehrsatz des Pythagoras** (Lektionen 5/6)	**III. Akt: Beweisvielfalt** (Lektionen 7/8/9/10/11)	**IV. Akt: Beweisführung als Prinzip bei Euklid** (Lektion 12)	**V. Akt: Übung führt zu Vertrauen in die geschaffenen Pfade** (Lektionen 13 - 20)	**VI. Akt: FINALE a) Verwandlungen b) Verallgemeinerung c) Quadratschnecke** (Lektionen 21/22)	**Weitere Bemerkungen und Anregungen** (Lektion 23)
Monique (1)	Diese Lehrphase war sehr lang. Zwar war die Idee gut, aber ich dachte mir nach 2 Stunden, als wir immer noch nicht fertig waren, in der dritten wird's sicher klappen!	Ich fand es eine sehr gute und abwechslungsreiche Idee, „Besuch vom pythagoräischen Anhänger“ zu bekommen. Es war so viel spannender zuzuhören. Zu Hause den Beweis zu studieren hat mir Spass gemacht, denn ich konnte eine Lösung finden.	Diese Lektionen fand ich von den besten des ganzen Themas. Denn zu forschen, Lösungen finden und den anderen präsentieren, macht Spass. Die Ideen der andern zu hören ist auch sehr interessant und lehrreich.	Ich finde es gut, etwas von früher zu erfahren. Beispielsweise eben von Euklid. Ich finde auch die Querblicke sehr interessant, denn so kann ich mir Verknüpfungen machen und mir vieles besser behalten.	Das freie Arbeiten macht grossen Spass. So kommt man gut voran und kann, wenn es Probleme gibt, zuerst den Kollegen fragen. Und wenn der auch Schwierigkeiten hat, kann sicher Hans helfen …!!	Es war anfangs sehr spannend, aber mit der Zeit wurde das Zuhören zu lange. Übrigens, dieses Blatt finde ich eine sehr gute Idee!! *(Meint wohl dieses Feedbackblatt?)*	Zum Beispiel bei den Wurzeln, finde ich, es geht zum Teil sehr schnell voran. Du und einige Mitschüler sind sich ihrer Sache sehr sicher. Ich habe zu Hause lange gebraucht, um aus meinen Notizen schlau zu werden. Wenn wir in der Schule sind und ich mich in eine Aufgabe versetzt habe, beginnt meistens schon die nächste!! <u>Aber</u>: Diese Lernphase war sehr gut!!
AAA (2)	Das Lösen des Problems, die 20 Quadrate zu einem zu vereinen, fand ich ein bisschen zu lang. Die 3 Lektionen, an denen wir daran gearbeitet haben, waren zu viel. Dass wir es selber herausfinden mussten, war gut, denn so kann man es sich besser einprägen, als wenn der Lehrer es einfach erklärt.	Der Auftritt des Anhängers war sehr interessant, denn so bekamen wir Informationen aus erster Hand. Diese Methode finde ich besser, als z.B. einfach ein Blatt zu erhalten, auf dem etwas über die Lehre Pythagoras' steht.	Die Beweisvielfalt war sehr gut, denn es war interessant zu sehen, wie unterschiedlich die Leute den Satz bewiesen haben.		Ich finde, in der Probe hätte es mehr Polynomdivisionen geben sollen. Die Wurzelaufgaben im Buch waren z. T. recht schwierig. Die Übungen auf dem Blatt waren sehr interessant und gut.	Ich finde es gut, dass wir noch so einen Überblick bekamen über das, was wir bisher getan haben. Es war interessant zu sehen, wie alles irgendwie zusammenhängt.	Dass wir zum Teil die Aufgaben und Beweise selber herausfinden mussten mit Ausprobieren und so, war sehr gut, denn so kann man es sich besser einprägen. Manchmal war es ein wenig in die Länge gezogen und so konnte man sich am Ende der 3. Lektionen nur noch schlecht konzentrieren.
Manuela (3)	Am Anfang glaubte ich nicht, dass dies möglich sei, aber ich bin überzeugt worden, dass es geht. Es ist zwar eine komplizierte Art, aber dennoch wir haben es geschafft.		Beweis 8 verstand ich am besten. Doch dieser lässt sich besser konstruieren als berechnen. Das ist ein Nachteil, dass man nicht gut berechnen kann.		Konstruieren finde ich leichter als berechnen.	(zu b) Ich fand das sehr logisch. Ich verstand es auch gut.	Ich finde es gut, dass wir einen Beweis des Pythagoras wissen müssen.
Azra (4)	Ich fand es gut, dass wir es alle zusammen gemacht und studiert hatten, und wie wir dann am Schluss das Resultat hatten.	Ich fand es gut, dass wir auch etwas über Pythagoras selber erfuhren, und nicht einfach nur den Satz studierten und dann mit ihm arbeiteten. Es war interessant, etwas über die Geschichte zu erfahren.	Das mit dem „Beweise Präsentieren“ fand ich ziemlich gut, obwohl einige Beweise am Anfang schwer verständlich waren. Aber man hat ja seinen eigenen Satz, den man verstand. Mein Lieblingsbeweis ist Nummer 8, weil er für mich am verständlichsten war.	Die Analyse des Beweises von Euklid fand ich ziemlich interessant und dass wir auch ein bisschen von Euklid und „euklidischer Geometrie“ erfuhren.	Es war gut, dass wir selbständig arbeiten konnten und die Übungsblätter waren auch gut und anspruchsvoll. Ich fand es auch gut, dass wir die Aufgaben zusammen besprochen hatten. Allerdings ging das mit dem Höhen- und Kathetensatz ein bisschen zu schnell.	Das Finale fand ich ziemlich gut, so zum Abschluss, obwohl es ein bisschen schnell ging. Die Möndchen des Hippokrates verstand ich, aber der Sinn der Wurzelschnecke ist mir nicht so klar, es ging ein bisschen schnell.	Ich fand dieses Thema ziemlich interessant, allerdings ging es mir manchmal zu schnell. Wir hätten vielleicht mehr Zeit zum Üben haben sollen, aber sonst fand ich es gut.
Patrice (5)	Es war interessant, da man einfach etwas experimentieren musste, um auf die richtige Lösung zu kommen. Ich finde, dass man das Ganze nur in 2 oder 3 Lektionen durchführen könnte.	Der Anhänger der Pythagoras war lustig, aber es war lehrreich, was er erzählte.	Ich fand es sehr gut, dass wir uns auf einen Beweis konzentrieren konnten, so dass wir ihn wirklich verstehen. Die Präsentation war trotzdem recht schwierig.		Gut, dass wir noch praktisch geübt haben.	(zu a) Fand ich spannend, vor allem versteh ich das gut.	Ich finde es gut, dass du dir so viel Mühe gibst, uns diese Unterrichtseinheit so interessant wie möglich zu gestalten, wie z.B. mit dem Anhänger. – Die ersten 13 Lektionen hätte man vielleicht etwas kürzen können. Die Probe war schwer vorzubereiten, denn man konnte eigentlich nur Punkt 5 üben.
BBB (6)	Durch das Basteln konnte man sich die Vorgänge besser vorstellen. Dadurch entstand dann manchmal aber auch ein Chaos in der Klasse.	Der pythagoräische Anhänger brachte eine Abwechslung in den Unterricht.	Es war eine gute Idee, nicht nur einen, sondern gleich mehrere Beweise anzuschauen. Da aber Schüler den Beweis, den sie studiert haben, vorstellen mussten, war es manchmal schwer zu verstehen, wie sie vorgehen.		Man lernte Schritt für Schritt mehr, dass man alles verstehen konnte. Es war optimal.	Zum Teil musste man sich die Aufgaben optisch vorstellen, das war spannend und abwechslungsreich. Die Wurzelschnecke zu entdecken war ziemlich verblüffend.	Aus den Themablättern konnte man sich die Informationen am besten entnehmen. Aus dem Grund waren sie besonders wichtig.

CCC (7)	Ich denke, wir haben zuviel Zeit für dies aufgewendet. Was ich gut fand, war dass wir es mit der ganzen Klasse besprochen haben.	Den Einstieg in die Beweise des Pythagoras fand ich nicht schlecht.	Da wir alleine einen Beweis studieren mussten, denke ich, dass es etwas gebracht hat. Man hat in der Gruppe das Problem lösen müssen und so es vortragen → Ist Abwechslung, anstatt dass der Lehrer alles selber erklären muss.	Mit der Philosophie kann ich eigentlich wenig anfangen, obschon es auch zur Mathematik gehört.	Durch die Übung bekam man etwas Routine und konnte es dann auch in der Probe anwenden.	Ich finde gut, dass wir wieder auf das Quadrat zurückgekommen sind. Das schliesst die Verknüpfung mit dem zuvor gelernten Teil.	
Gabriel (8)	Ich fand sehr gut, dass wir die Probleme nicht gerade serviert bekamen, sondern wir selber das Problem lösen konnten. Aus diesem Grund ist es mir gut geblieben. Es ist mir aber auch deshalb sehr geblieben, weil wir das Ganze immer vor uns hatten und praktisch vorgingen und nicht alles auf theoretischer Stufe.	Ich fand die Idee mit dem Anhänger des Pythagoras sehr gut. Sie kam sehr überraschend und holte meine Aufmerksamkeit voll und ganz.	Ich fand interessant, dass man auch einmal den Klassenkameraden etwas beibringen konnte.	Den Beweis 9 von Euklid fand ich sehr interessant, denn wenn man alles genau durchliest, dann erscheint es einem gar nicht mehr so schwer. In diesem Teil mit den Axiomen etc. ging es mir aber ein bisschen zu schnell und dadurch habe ich den Zusammenhang mit der „euklidischen" Geometrie nicht ganz verstanden.	Ich fand die Blätter jeweils sehr anspruchsvoll auf den ersten Blick. Ich musste mich ziemlich in das Thema vertiefen, dass ich am Ende nachkam. Die Blätter selber fand ich sehr gut, denn wenn man die Aufgaben darauf lösen kann, wusste man, dass man das Thema beherrscht.	Ich fand es sehr interessant, dass am Schluss die Wurzelschnecke, der Linie des Quadrates übereinstimmte. Wieso habe ich aber nicht ganz verstanden.	Im Ganzen betrachtet fand ich es sehr abwechslungsreich. Am lehrreichsten für mich war, dass wir auch praktisch arbeiten konnten.
Thierry (9)	Gute Darstellung des Beweises. Ziemlich verständlich gestaltet. Klarer Lösungsweg. Aber für den späteren Satz des Pythagoras hat es mir nicht viel geholfen.	Die kleine Interpretation war lustig und lehrreich gestaltet.	Es ist eine gute Idee, dass die Schüler den Beweis präsentieren. Indem man ihn vor der ganzen Klasse erklärt, vertiefen wir uns noch mal in den Beweis. Der Beweis von Euklid wie er auf dem Blatt dargestellt wurde, war nicht ersichtlich. Er erzählt viel zu viel unnötiges Zeug, was den Text noch komplizierter machte.		Es ist immer wieder gut, Übungsblätter auszuteilen. Wir konnten den Lehrstoff nochmals für uns oder mit anderen repetieren und uns eine gewisse Sicherheit für die Probe schaffen. Es wäre gut, wenn sie noch mehr Übungsblätter verteilen würden.	a) Eigentlich ersichtlich, aber das mit den Möndchen war nicht ganz klar. b) Es ist gut, dass wir es bildnerisch darstellen konnten. Das Motiv das sich am Schluss ergab, war für mich sehr hilfreich. c) Logisch und ersichtlich dargestellt.	
Michael E. (10)	Dieser Teil war als Einleitung sehr gut. Man konnte sich die Möglichkeiten des Satzes so sehr gut einprägen. Besonders, weil wir lange im Dunkeln tappen und so alle studieren und nach Lösungen suchen mussten. Es hätte aber ein bisschen kürzer sein können. Sonst wirklich super.	Der Teil, als der Freund von Pythagoras kam, hat mir sehr gut gefallen. An den Beweis und Anwendung erinnere ich mich nicht.	Der Teil mit der Dreiergruppe war gut, meinen eigenen Beweis (der meiner Gruppe) konnte ich mir nämlich auch am besten einprägen.		Auch hier fehlte ich am Anfang. Sonst war es gut. Ich hätte einfach noch gerne ein Theorieblatt über die Wurzelgesetze erhalten.	Gut und einleuchtend.	Solche kleine Showeinlagen tun der Stimmung gut. Auch, dass wir oft in Gruppen oder im Plenum und selten selbständig arbeiteten, gefiel mir. Der Unterricht gefällt mir im Allgemeinen sehr gut, das Lerntempo meistens auch.
Adrian (11)	Ich fand es gut, dass wir am Anfang selber probieren mussten, die Quadrate zu vereinen. Es war ziemlich schwierig, da wir vorher dieses Thema noch nie behandelt hatten. Die Quadrate zu entzweien, war dann nicht mehr so schwer.	Die kleine Aufführung war eine gute Idee, besser als wenn wir alles auf Papier gehabt hätten. Es war ziemlich leicht, diesen Beweis zu studieren und aufzuschreiben.	Das mit den Dreiergruppen war gut, man konnte Meinungen und Lösungen austauschen. Es war aber manchmal schwer, den Erklärungen der anderen Gruppen zu folgen.	Der Beweis des Euklid war anfangs schwer zu begreifen, aber durch die Analyse wurde er dann verständlich.	Teilweise (Wurzelgesetze) ging es etwas zu schnell, mehr Beispiele hätten evtl. geholfen.	a) War nicht schwer zu begreifen und leuchtete mir sofort ein. b) Das mit den 9 / 13 Figürchen in die Gesetzmässigkeit bringen, war spannend. c) Für mich noch etwas unverständlich, ich werde mir die Quadratschnecke nochmals ansehen.	
Simon (12)	Es war gut, das Problem selbst zu lösen. Aber wir brauchten dafür etwas lang, vielleicht könntest du uns ein bisschen mehr auf die richtige Spur verhelfen.	Es war gut mal ein Bisschen Abwechslung. Es war nicht einfach nur Erzählen.	War gut, jetzt konnte man sicher gehen, dass dieser Satz immer stimmt. Auch die Arbeit in verschiedenen Gruppen war gut.		Jetzt können wir den Satz gut anwenden, war gut, auch mal selbständig zu arbeiten.	a) Alles jetzt in der Übersicht (gut). b) Interessant, wann die Quadrate wie gross sind. c) Es sieht schön aus.	Selber Probleme lösen, auch mal selbständig arbeiten. Die Beweise von Pythagoras waren sehr lehrreich.
Jasmin (13)	Ich fand es ein bisschen zu lange, als wir den ganzen Donnerstagmorgen versucht haben, 9 grosse und 11 kleine Quadrate zu einem grossen Quadrat zusammen zu fügen. Aber schlussendlich leuchtete es mir ein.		Es war gut, dass wir Dreiergruppen machten und es so die Stunde etwas auflockerte.	Dieses Blatt mit dem Beweis von Euklid fand ich ziemlich schwer verständlich und sehr kompliziert. Ich denke, dass es eigentlich gar nicht so schwierig wäre, aber es ist einfach so schwierig formuliert.	Das Konstruktionen-Blatt konnte ich gut lösen und auch die Probe ist mir dieses Mal nicht schlecht gelungen. Aber dann das mit diesen Wurzelberechnungen u. s. w. habe ich nicht wirklich begriffen.	a) Das finde ich sehr logisch und es war gut erklärt (in meinem Tempo; nicht zu schnell). b) Ganz klar ist es mir noch nicht, aber ich denke, wenn ich „das" noch genauer studiere, kann ich „das" dann (hoffentlich…). c) Ging mir zu schnell.	Bei mir ist es oft der Fall, dass ich noch bei der vorherigen Aufgabe bin (am Überlegen und/oder der Aufgabe abschreiben), während „wir" schon bei der nächsten sind. Also mir ist das Tempo, mit dem wir arbeiten, allgemein zu schnell.
DDD (14)	Der Einstieg war gut, doch 3 Lektionen überlegen, wie man zum Ziel käme, fand ich ein bisschen mühsam.	Abwechslung durch Verkleidung gut, auch dass mit musikalischen Mitteln etwas gemacht worden ist.	Eigener Beweis ist einem in Erinnerung geblieben, andere Beweise fanden bei mir kaum Interesse.	Beweisen wie Euklid benötigt enormes Grundwissen. Wie man einen Beweis aufschreiben kann, verstehe ich heute besser, jedoch komplexe Angelegenheiten könnte ich noch nicht in Angriff nehmen.	Anwendungen gut begriffen, selten Probleme.	Guter Bogen vom Schluss zum Anfang. Beweislage nicht ganz einleuchtend, warum man einen Kreis nicht in ein Quadrat verwandeln kann, sonst alles gut begriffen.	

Roman (15)	**Ich finde, wir sind zu lange einfach im Kreis gesessen und haben keinen Erfolg gehabt. Nach 3 Lektionen wussten wir erst, wie wir zwei Quadrate vereinen können.**	**Der Anhänger kann gar kein Echter sein, er wäre schon lange gestorben.**	**Es war gut, verschiedene Beweise zu sehen. Sie waren leicht verständlich.**		**Ein Teil war Repetition von der Sekundarstufe, ein kleiner Teil war neu. Gut, dass es repetiert wurde, da ich einiges nicht mehr konnte oder vergessen habe.**	**a) Es war eigentlich nur noch eine kleine Ergänzung. b) Wir haben herausgefunden, dass es nur mit rechtwinkligen Dreiecken geht. c) Erstaunlich, dass es immer funktioniert.**	**Etwas anderes: Ich finde 3 Lektionen Math sind nicht zu viel, aber in der 3. Lektion ist die Konzentration nicht mehr gut. Auch bei mir. + Wir haben nicht so viel Aufgaben. + Die bisherigen Themen sind nicht so schwer, dass man zu Hause noch lange nachdenken muss.**
David (16)	**Die Lösung war interessant, nur war der Lösungsweg in meinen Augen zu lang. D.h. wir hätten die Lösung früher präsentiert gekriegt haben sollen, denn von uns entdeckte sie niemand und das Interesse liess nach.**	**War interessant und abwechslungsreich. Man lernt besser, wenn der Stoff nicht nur als trockene Theorie vermittelt wird. Ich fand dies gut, um einen (geschichtlichen) Hintergrund über die ganze Geometrie der alten Griechen zu erhalten.**	**Die Beweise waren verwirrend und meist auch unverständlich präsentiert. Ich brauchte eine Woche später nur noch ca. 10 Minuten, um 2 Beweise zu verstehen und auswendig zu lernen, In der Schule gelang mir dies indes nicht.**		**Zu den Wurzelgesetzen: Die Hausaufgaben auf dem 2. Übungsblatt waren relativ schwierig und zeitintensiv.**	**Nützlicher Überblick, ich fand dass dies ein brauchbarer Abschluss ist.**	**Ich finde es von Vorteil, wenn wir nach jeder Lektionseinheit (2h am Mo oder 3h am Do) Aufgaben zum Lösen bzw. Theorie zum Vertiefen und Verstehen besitzen. Dies müssen keine Hausaufgaben sein. Nur z.B. nach den ersten Stunden zum Thema Quadrate vereinen: Ich hatte es nicht vollkommen verstanden und wäre um etwas theoretisches Material durchaus froh gewesen.**
Fabian (17)		**Schön gezeigt worden mit dem Instrument des Anhängers von Pythagoras.**	**Durch die Beweisvielfalt wirklich die Möglichkeit sich einen Beweis einzuprägen. Positiv war die Gruppenarbeit. Im Gespräch mit anderen merkt man sich eher etwas, als beim bloßen Zuhören.**	**Es hat mich erstaunt, wie sehr z.T. Mathematik und Philosophie zusammenhängen.**		**Gut war das Möndchen des Hippokrates (verblüffend). Etwas weniger gut war die Verallgemeinerung des Satzes auf beliebige Dreiecke, da mir noch nicht bewusst ist, was das eigentlich soll.**	**Besonders lehrreich war die Gruppenarbeit zur Beweisvielfalt. Sehr gut waren auch die Übungsblätter, dank den übertragbaren Aufgaben.**
EEE (18)	**Ich fand den Einstieg in die Geometrie gut.**	**Ich möchte mich bei diesem Anhänger der pythagoräischen Lehre bedanken, denn nun kenne ich den Hintergrund des Satzes des Pythagoras.**	**Die Beweisvielfalt ist überwältigend. Der Beweis 3 (Garfield) war sehr gut und ist eine der wenigen guten Leistungen der Amerikanischen Präsidenten.**	**Die Beweisführung war sehr komplex und schwer verständlich, aber an sich gut.**	**Es ist schön, wenn man auch Aufgaben lösen kann und nicht immer mitdenken muss. Wieso kommt nun wieder Algebra?**	**Endlich kann man einfach eine Wurzel berechnen, wie aber kann man dies mit Zahlen machen?**	**Die Übungsblätter waren sehr nützlich und lehrreich. Vielleicht könnte auch ein Anhänger des Euklid kommen während Herr Brüngger da ist.**
FFF (19)	**Ich fand das gemeinsame Rätseln /Ausprobieren gut, ich fand die dafür verwendete Zeit ein wenig zu lang.**		**Die verschiedenen Beweise waren interessant und zeigten die Vielfalt der Geometrie. Den „Euklid“ fand ich eher überflüssig, weil, entweder habe ich nicht aufgepasst, oder ich habe sonst nicht viel Wesentliches mitbekommen.**	**Das war eine gute Abwechslung, man sah wie weit der Mensch damals schon denken konnte.**	**Fand ich sinnvoll und hatte eigentlich auch keine Probleme damit, obwohl die Probe dann nicht so berauschend herauskam.**	**Interessante, wenn vielleicht auch nutzlose Tatsachen, die einen guten Abschluss machten. (nutzlos nicht unbedingt, da wir ja später Trigonometrie (oder so) haben, aber zu diesem Zeitpunkt kann ich es nicht wirklich brauchen.)**	**Für mich war das Kennenlernen der verschiedenen Sätze/Beweise etc. wichtig und natürlich das darauf folgende Üben des Stoffes. Am lehrreichsten fand ich die Lektionen mit den Beweispräsentationen. Ich finde, du solltest ein wenig schneller/ direkter zur Sache kommen (z.B. nicht etwas an die Tafel malen und fragen, was das ist und niemand aus der Klasse antwortet, und du wartest einfach … Sag, was es sein soll!)**
Beatrice (20)	**Ich fand gut, dass wir zuerst ausprobieren durften, denn dadurch erfuhren wir, dass es für uns keinen anderen Lösungsweg gab. Wir probierten und das Resultat war dann umso einleuchtender!**	**Dass ein Anhänger auftrat und dies uns so erklärte, fand ich sehr gut und lustig!!! Den Beweis dann erklären können oder sogar selbst lösen, fand ich schwer. Alleine wäre ich sicher nie auf die algebraische Gleichung von Beweis 6 gekommen. (Ich meine bei den Hausaufgaben)**	**Die Beweise waren für mich oft nicht auf den ersten Blick verständlich! Ich hätte gut gefunden, wenn wir die Beweise (jeden) auf einem Blatt hätten und dazu eine Aufgabe mit Anwendung des Beweises. Die Hausaufgabe war spannend, weil man erfuhr, wie der Euklid geschrieben wurde und es war machbar (wenn man konzentriert ist) den Worten zu folgen!**	**Die Beweiserklärung fand ich weniger spannend, aber doch notwendig und hilfreich.**	**Kathetensatz und Höhensatz waren für mich nicht sofort verständlich, aber bald. Von den Wurzelgesetzen habe ich fast nichts im Unterricht verstanden (zu schnell), nachdem ich es aber lange studiert habe, geht es!**	**a) Spannend, hilfreich und anwendbar! Gute Erklärungen! b) Gute Erklärungen, einleuchtend. c) Finde ich sehr gut, sehr einleuchtend!**	**Die Quadratschnecke war sehr einleuchtend! Besonders hilfreich fand ich den Stoff von den Scherungen (Fünfeck → Quadrat). Sehr hilfreich! Sehr gut fand ich, dass wir selber drauf kommen müssen und ausprobieren können.**
GGG (21)	**+ Ich fand diese Form von Arbeiten sehr gut. Man sah an dem Bild wie der Beweis aufgebaut war und so war es einfacher, ihn wieder anzuwenden. - Ich denke, dass wir mit dieser Methode aber zu viel Zeit verloren haben.**	**Wir lernen den Satz des Pythagoras näher kennen und hinterfragen, sehr viele, für mich bisher noch unbekannte Beweise und Behauptungen.**	**+ Sehr grosse Auswahl, welchen Beweis man als Lieblingsbeweis nehmen wollte. – Ich hätte es besser gefunden, wenn wir uns auf einen Beweis konzentriert hätten, damit wäre auch keine Verwirrung entstanden.**	**Diese Beweisführung fand ich ein bisschen zu wenig ausführlich erklärt (oder ich habe nicht genug gut aufgepasst). Deshalb wusste ich in der Probe auch nicht, was die „euklidische Geometrie“ ist.**	**Ich denke, den Satz des Pythagoras kann ich jetzt in- und auswendig.**	**a) + War sehr gut und ausführlich erklärt. Deshalb ein bisschen schwer zu verstehen. b) Es war nur anhand von Bildern und keine Formeln. c) War bildnerisch dargestellt, daher nimmt man viel mehr auf als wenn man es nur hört.**	**Ich finde die 3fach Stunde manchmal sehr anstrengend. + Mit der Darstellung von Bildern oder wenn man etwas jemandem erklärt oder bastelt, nimmt man viel mehr vom Lernstoff auf.**

I. Akt: Quadrate vereinen – Quadrate entzweien

Dieser Einstieg wird mehrheitlich (13-mal) als gut bezeichnet. Vor allem das selbsttätige Suchen und Herausfinden, das Ausprobieren und das gemeinsame Experimentieren werden hervorgehoben, weil es zu besserem Verständnis und nachhaltigem Einprägen beiträgt. So meint AAA (2): „Dass wir es selber herausfinden mussten, war gut, denn so kann man es sich besser einprägen, als wenn der Lehrer es einfach erklärt." oder BBB (6): „Durch das Basteln konnte man sich die Vorgänge besser vorstellen." Für Beatrice (20) war das Ausprobieren ein Erkenntnisweg: „Ich fand gut, dass wir zuerst ausprobieren durften, denn dadurch erfuhren wir, dass es für uns keinen anderen Lösungsweg gab. Wir probierten und das Resultat war dann umso einleuchtender!" Gabriel (8): „Ich fand sehr gut, dass wir die Probleme nicht gerade serviert bekamen, sondern wir selber das Problem lösen konnten. Aus diesem Grund ist es mir gut geblieben, weil wir das Ganze immer vor uns hatten und praktisch vorgingen und nicht alles auf theoretischer Stufe." Für Patrice (5) war es interessant, „da man einfach etwas experimentieren musste, um auf die richtige Lösung zu kommen". Dagegen findet David (16) die Lösung zwar interessant, er hat aber den Eindruck, „wir hätten die Lösung früher präsentiert gekriegt haben sollen, denn von uns entdeckte sie niemand und das Interesse liess nach." Nach seiner Wahrnehmung wurde die Lösung von mir präsentiert. Azra (4) und CCC (7) finden es gut, „dass wir es alle zusammen gemacht und studiert hatten."

Mehr als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler merken an, diese erste Phase mit der Dreifachlektion sei zu lang gewesen. Knapp hören wir von CCC (7): „Ich denke, wir haben zuviel Zeit für dies aufgewendet." Differenzierter lesen wir bei Simon (12): „Es war gut, das Problem selbst zu lösen. Aber wir brauchten dafür etwas lang, vielleicht könntest du uns ein bisschen mehr auf die richtige Spur verhelfen." Für Jasmin (13) war die Phase am Donnerstagmorgen „ein bisschen zu lang", aber sie sieht darin Positives: „Aber schlussendlich leuchtete es mir ein." Bei GGG (21) tönt es schon fast widersprüchlich: „Ich fand diese Form von Arbeiten sehr gut. Man sah an dem Bild, wie der Beweis aufgebaut war und so war es einfacher, ihn wieder anzuwenden. – Ich denke, dass wir mit dieser Methode aber zu viel Zeit verloren haben." Wer gut hinschaut, kann tatsächlich im Bild den durchlaufenen Prozess und den Beweis ablesen. Aber kann eine sehr gute Form von Arbeiten Zeitverschwendung sein? Manuela (3) hat erfahren, dass sich das Durchhalten lohnt: „Am Anfang glaubte ich nicht, dass dies möglich sei, aber ich bin überzeugt worden, dass es trotzdem geht. Es ist zwar eine etwas komplizierte Art, aber dennoch wir haben es geschafft." Hier hören wir die Freude, ja den Stolz heraus, dass wir es gemeinsam schlussendlich doch geschafft haben.

Fragen drängen sich auf: Lohnt sich der zeitliche Aufwand? Kann oder darf man den Prozess durch mehr Hilfe abkürzen? Werden Konzentration und Ausdauer der Schülerinnen und Schüler zu sehr strapaziert? In diesen drei Stunden wurde doch viel ausprobiert, nachgedacht, zugehört und argumentiert. Bezüglich der Hilfe höre ich im Hintergrund Ruth Cohn (1981), die Begründerin der Themen zentrierten Interaktion (TZI): „Zuwenig geben ist Diebstahl, zuviel geben ist Mord." Ohne beharrlich dranzubleiben, könnten die Schülerinnen und Schüler das stolze Erlebnis des Durchbruchs und der selbst gewonnen Einsicht nicht erringen. Aber es braucht künftig eine bessere Vorinformation der Schülerinnen und Schüler, über den Wert des Suchens, Ausprobierens – in der Wissenschaft, im Alltag – und dass wir im Gymnasium ab und zu dieses vertiefende Entdecken, Erforschen erleben wollen. Die vielen positiven Schülerreaktionen bestätigen ja auch den Ansatz. *Trotzdem werde ich nächstes Mal mit einer Doppelstunde beginnen und sehen, wie sich dies auf den Prozess und auf das Befinden auswirkt. Vielleicht werden beharrlichere Schülerinnen in die folgende Stunde einen Lösungsvorschlag für die Vereinigung von zwei verschieden grossen Quadraten mitbringen.*

II. Akt: Pythagoras und „sein“ Satz

Im II. Akt erleben wir die Durchführung des Beweises und den Auftritt des Anhängers des Pythagoras. Der Beweis wird in der Erinnerung überschattet vom Auftritt, der durchwegs als Abwechslung (6,12,16) und Bereicherung, von einigen Schülern auch als lehrreich (2,4,5,9,16,18) erlebt wurde. So meint AAA (2): „…, denn so bekamen wir Informationen aus erster Hand.“ oder EEE (18): „Ich möchte mich bei diesem Anhänger der pythagoräischen Lehre bedanken, denn nun kenne ich den Hintergrund des Satzes des Pythagoras.“

Knapp dosiert und in 15 Minuten auf das Wesentliche beschränkt, hinterlässt der Auftritt grossen Eindruck. Er sollte allerdings mehr sein als nur „mal ein Bisschen Abwechslung“ (Simon 12). Wer sich interessierte, konnte im Nachgang mein Informationsblatt lesen. Wie die Nachfrage bei einer anderen Klasse fast zwei Jahre später zeigt, ist zwar der Auftritt noch lebhaft in Erinnerung, inhaltlich aber fast nichts mehr abrufbar. *Künftig will ich die auftretenden Personen womöglich immer wieder verknüpfen über das Bild von Raffael: „Schule von Athen“, das hinten in meinem Zimmer hängt! Zum ersten Beweis müsste konkret ein Feedback erbeten werden! Sonst geht er in der Erinnerung unter zwischen Einstiegsprozess einerseits und Auftritt sowie Beweisvielfalt anderseits.*

III. Akt: Beweisvielfalt

Der III. Akt steht ganz im Zeichen der Beweisvielfalt. Die Schülerinnen und Schüler haben die Herausforderung angenommen, intensiver einen weiteren Beweis zu studieren, um ihn dann präsentieren zu können. Die Erinnerung ist noch so lebhaft, dass sich alle zu diesem Akt geäussert haben. Die Beweisvielfalt war für EEE (18) „überwältigend“, sie zeigte nach FFF (19) „die Vielfalt der Geometrie“, bot Fabian (17) die echte „Möglichkeit, sich einen (Lieblings-) Beweis einzuprägen.“ AAA (2) fand Interesse daran, „wie unterschiedlich die Leute den Satz bewiesen haben.“ GGG (21) hätte sich allerdings lieber auf *einen* Beweis konzentriert, „damit wäre auch keine Verwirrung entstanden.“ Beatrice (20) hätte sich alle Beweise präsentiert auf einem Blatt gewünscht. Gerade dies möchte ich aber nicht. Es ist nicht nötig, dass jede Schülerin jeden Beweis bis in alle Detail versteht, aber einen sehr gut und bei den andern mindestens die Hauptideen. Wer wollte, fand genügend Zeit, sich die Präsentationen zu notieren und anschliessend bei der entsprechenden Gruppe nachzufragen.

Die angeordnete Arbeit in Dreiergruppen wurde geschätzt. Michael E. (10) begründet: „…, meinen eigenen Beweis (den meiner Gruppe) konnte ich mir nämlich auch am besten einprägen.“ und Adrian (11): „…man konnte Meinungen und Lösungen austauschen.“ Oder Fabian (17): „Im Gespräch mit anderen merkt man sich eher etwas, als beim blossen Zuhören.“ Jasmin (13) erlebte die Dreiergruppen allerdings primär als Auflockerung. Die intensive Beschäftigung mit einem Beweis in der Kleingruppe führt zu einer Vertiefung und Konzentration auf einen Beweis, birgt anderseits die Gefahr, dass man sich den andern Beweisen verschliesst wie DDD (14): „Eigener Beweis ist einem in Erinnerung geblieben, andere Beweise fanden bei mir kaum Interesse.“

Eng zur Arbeit in den Kleingruppen gehört die Präsentation des Beweises. Gabriel (8): „Ich fand interessant, dass man auch einmal den Klassenkameraden etwas beibringen konnte.“ David (16), der ein langsamer Denker ist und sich während der Stunden schlecht konzentrieren kann, erlebte das so: „Die Beweise waren verwirrend und meist auch unverständlich präsentiert.“ Später zuhause hat er sie allerdings rasch verstanden. Zusammenfassend meint Monique (1): „Diese Lektionen fand ich von den besten des ganzen Themas. Denn zu forschen, Lösungen finden und den anderen präsentieren, macht Spass. Die Ideen der andern zu hören ist auch sehr interessant und lehrreich." Kleingruppenarbeit und Präsentation verlangen viel Eigenaktivität und Eigenverantwortung, sie erlauben vertiefte Auseinandersetzung mit einem Beweis. Erst diese Vielfalt gestattet eine individuelle Auswahl.

IV. Akt: Beweisführung als Prinzip bei Euklid

Dieser Akt ist ganz Euklid, seinen „Elementen" und grundsätzlichen Fragen gewidmet. Zum anspruchsvollen Beweis von Euklid gibt es sehr unterschiedliche Reaktionen. Thierry (9) meint: „Er erzählt viel zu viel unnötiges Zeug, was den Text noch komplizierter machte." Bei FFF (19): „Den ‚Euklid' fand ich eher überflüssig, weil, entweder habe ich nicht aufgepasst, oder ich habe sonst nicht viel Wesentliches mitbekommen." Im Gegensatz dazu haben sich Beatrice (20) und Monique (1) bei der gemeinsamen Bahnfahrt zur Schule, mit dem Satz intensiv auseinandergesetzt und ein Erfolgserlebnis gefeiert. Beatrice schreibt: „Die Hausaufgabe war spannend, weil man erfuhr, wie der Euklid geschrieben wurde, und es war machbar (wenn man konzentriert ist) den Worten zu folgen!" Jasmine (13) hatte weniger Geduld: „Dieses Blatt mit dem Beweis von Euklid fand ich ziemlich schwer verständlich und sehr kompliziert. Ich denke, dass es eigentlich gar nicht so schwierig wäre, aber es ist einfach so schwierig formuliert." Natürlich ist der Beweis aus den „Elementen" in vielem ungewohnt, aber nach der Vorbereitung durch Beweis 8 und mit entsprechender Konzentration ist er verständlich. Wenn ich an Beatrice (29) und Monique (1) denke, übrigens beide mässige Mathematikerinnen, so kann die Auseinandersetzung mit diesem Beweis die stolze Erfahrung vermitteln, einen 2300 Jahre alten mathematischen Text aus der Blütezeit der griechischen Wissenschaft gelesen und verstanden zu haben.

Auf die wissenschaftstheoretischen Aspekte folgen praktisch keine Reaktionen. Fabian (17): „Es hat mich erstaunt, wie sehr z. T. Mathematik und Philosophie zusammenhängen." Auch FFF (19) ist beeindruckt: „…man sah wie weit der Mensch damals schon denken konnte." Azra (4) fand es immerhin interessant, „… dass wir auch ein bisschen von Euklid und euklidischer Geometrie erfuhren. Am ausführlichsten erwähnt Monique (1) diesen Teil: „Ich finde es gut, etwas von früher zu erfahren. Beispielsweise eben von Euklid. Ich finde auch die Querblicke sehr interessant, denn so kann ich mir Verknüpfungen machen und mir vieles besser behalten."

Der Beweis des Euklid steht an der Schwelle vom III. zum IV. Akt. Deshalb wurde auf ihn teils im III. Akt und teils im IV. Akt geantwortet. Dies weist auf eine Kompositionsschwäche hin! Dieser Beweis wird nicht in den Dreiergruppen bearbeitet und sicher auch von niemandem zum Lieblingsbeweis auserkoren. *Deshalb muss nach Beweis 8 bereits die Wahl des Lieblingsbeweises erfolgen und die Diskussion über sie den III. Akt beenden. Der Beweis des Euklid, zuhause vorbereitet, eröffnet dann den IV. Akt.* Mit den historischen und wissenschaftstheoretischen Aspekten konnte ich anscheinend nur wenige Schülerinnen und Schüler erreichen. Aber sehr aufmerksam waren Monique (1) und Fabian (17), die auf diese Blicke in die Tiefe und in die Weite besonders gut ansprachen.

V. Akt: Üben führt zu Vertrauen in die geschaffenen Pfade

Im V. Akt wird mit geometrischen und algebraischen Aufgaben geübt. Das sehr freie Üben wird geschätzt, bringt Vertrautheit und Sicherheit im Umgang mit den Sätzen. GGG (21): „Ich denke, den Satz des Pythagoras kann ich jetzt in- und auswendig." Nur mit den Wurzelgesetzen können sich einige Schüler nicht anfreunden, obwohl wir sie eingehend behandelten und ein Theorieblatt verteilt wurde. *Dem Umgang mit Wurzeln werde ich das nächste Mal noch mehr Aufmerksamkeit schenken.*

VI. Akt: Finale a) Verwandlungen b) Verallgemeinerung c) Quadratschnecke
Im dreiteiligen Finale geht es um Zusammenfassung und Verallgemeinerung. Was der einen logisch und offensichtlich ist, ist dem andern zu schnell. *Insbesondere Wurzelschnecke und Quadratschnecke werde ich ein andermal etwas eingehender studieren lassen, zu Gunsten von Schülerinnen wie Azra (4), Gabriel (8), Adrian (11) und Jasmin (13).* Die Quadratschnecke ist wohl ein wenig meinem Wunsch bzw. meiner Notwendigkeit zum Opfer gefallen, unbedingt noch den Fragebogen ausfüllen zu lassen. Der Abschluss im Sinne eines Überblicks und eines Bogens zum Anfang wird in ein paar Voten gewürdigt, so z. B. von AAA (2): „Ich finde es gut, dass wir noch so einen Überblick bekamen über das, was wir bisher getan haben. Es war interessant zu sehen, wie alles irgendwie zusammenhängt." David (16) schreibt: „Nützlicher Überblick, ich fand, dass dies ein brauchbarer Abschluss ist." und DDD (14): „Guter Bogen vom Schluss zum Anfang."

Weitere Bemerkungen und Anregungen
Generell gesehen wird diese Inszenierung des Lehrstücks sehr positiv beurteilt. Vor allem das praktische Arbeiten wird nochmals lobend erwähnt, so von Beatrice (20), die sich wirklich in ein Problem vertiefen kann: „Sehr gut fand ich, dass wir selber drauf kommen müssen und ausprobieren können." oder GGG (21): „Mit der Darstellung von Bildern oder wenn man etwas jemandem erklärt oder bastelt, nimmt man viel mehr vom Lernstoff auf." und Gabriel (8): „Am lehrreichsten für mich war, dass wir auch praktisch arbeiten konnten." Auch die Beweisvielfalt will nochmals erwähnt sein. FFF (19) betont: „Am lehrreichsten fand ich die Lektionen mit den Beweispräsentationen." Fast ebenso tönt es bei AAA (2), bei Simon (12) und bei Fabian (17). Besonders erwähnenswert für Beatrice (20) ist nebst der Quadratschnecke noch der „Stoff von den Scherungen (Fünfeck → Quadrat). Sehr hilfreich!" Offenbar hat sie in diesen Bereichen eindrücklich Neues erfahren. Die Lerntempi sind sehr unterschiedlich, was bewirkt, dass einzelne Schülerinnen und Schüler zwischendurch den Faden verlieren. Mit genügend Eigeninitiative und Eigenverantwortung sowie etwas intensiverem Einsatz zuhause ist es aber auch für schwächere Schüler möglich, voll dabei zu sein.

Die Dreistundenblöcke am Donnerstagvormittag sind für einige Schüler ein Problem, oder werden vielleicht manchmal auch als einfache Problemursache vorangestellt. Letztes Jahr, als ich sie erstmals durchführte, erhielt ich von den Klassen, fast durchwegs positive Reaktionen auf die Dreistundenblöcke.

Es tut gut zu hören, dass es Schüler gibt wie Patrice (5), die realisieren, dass hinter einem derartigen Lehrstück ein grosser Vorbereitungsaufwand steckt: „Ich finde es gut, dass du dir so viel Mühe gibst, uns diese Unterrichtseinheit so interessant wie möglich zu gestalten, wie z.B. mit dem Anhänger."

Zusammenfassung
Im Feedback zeigt sich bei den 21 Schülerinnen und Schülern eine vorwiegend positive Beurteilung des Lehrstücks. Auch wenn die erste Phase als zu lang erlebt wurde, bleibt das Experimentieren, das selber Herausfinden als wichtiger Prozessschritt betrachtet. Der Auftritt des Pythagorasanhängers wirkt auf verschiedene Schüler eher als Auflockerung, bei einigen wird

damit aber doch zusätzliches Interesse geweckt. Die Beweisvielfalt und ihre Bearbeitung werden als ein zentral wichtiger Bestandteil des Lehrstücks wahrgenommen. Mit Euklid sind neue Dimensionen angesprochen, die sehr unterschiedlich tiefe Spuren hinterlassen. Die Übungsphase mit Aufgaben ist etwas Gewohntes und verlangt wieder viel Eigentätigkeit. Im Finale wird vor allem das sonst nicht Übliche geschätzt: Ein Überblick über das Ganze mit der Verdichtung in einem Schlussbild. *Dies müssen wir uns merken für andere Lehrstücke!*

Wie hat das Lehrstück auf einzelne Schülerinnen und Schüler gewirkt?
Monique (1) ist eine willige und einsatzfreudige Person, die aber trotz Einsatz und guter Ideen immer wieder sehr Mühe hat zu folgen. Sie findet die Idee des Einstiegs gut und hat auch nach zwei Stunden die Hoffnung nicht aufgegeben: „…in der dritten wird's sicher klappen!" Für historische und philosophische Bezüge ist sie offen und kann in diesen Bereichen öfters profitieren. Deshalb hat sie gerne dem pythagoräischen Anhänger zugehört und die Vertiefungen und Querblicke beim Euklid geschätzt, „…denn so kann ich mir Verknüpfungen machen und mir vieles besser behalten." Dreimal hören wir das Wort „Spass", wenn es darum geht, selbständig etwas zu studieren, frei zu arbeiten, sich weiterzuhelfen. Das Zuhören und Mitdenken mag sie weniger, weil sie lange braucht, bis sie etwas verstanden hat. Trotzdem findet sie: „Diese Lernphase war sehr gut!!"

Roman (15) hat das 9. Schuljahr bereits einmal in der Sekundarschule absolviert. Er ist zielorientierter Realist, rasch mit sich selbst zufrieden und eher träge. Schon in der ersten Runde ist er „einfach im Kreis gesessen" und hat auf den Erfolg gewartet. Wer sich nicht auf den Prozess einlässt, muss enttäuscht sein: „Nach den 3 Lektionen wussten wir erst, wie wir zwei Quadrate vereinen können." Der Anhänger ist nicht ernst zu nehmen, da es ihn heute nicht geben kann. Die Ansicht der Seelenwanderung hört der Rationalist nicht. Immerhin fand er es „gut, verschiedene Beweise zu sehen. Sie waren leicht verständlich." Trotzdem waren konstruktive Beiträge von seiner Seite sehr selten. Über Euklid und den Aufbau der Mathematik äussert er sich nicht. Die Aufgaben betrachtete er distanziert, aus der Warte der Repetition, obwohl ich öfters bemerkte, dass er vieles nur vage verstand. Seine Bemerkungen sind so oberflächlich und unpräzise wie seine Haltung im Unterricht. Er ist ein Extrembeispiel von Schülern, die sich kaum auf Prozesse einlassen, vorgeben das ginge sie nichts an, sie bräuchten das nie oder wüssten fast alles.

Simon (12) ist ein aufgeweckter, humorvoller Junge mit viel Potential, der sich leider von seinen Kollegen allzu oft in der Aktivität zurück binden lässt. Er findet es „gut, das Problem selbst zu lösen." Allerdings fehlt ihm in diesem Umfeld die nötige Ausdauer. Immerhin wünscht er nicht die fertige Lösung des Problems, sondern „vielleicht könntest du uns ein bisschen mehr auf die richtige Spur verhelfen." Je nach Gruppenzusammensetzung wäre dies wohl auch gerechtfertigt gewesen. Den Auftritt zum Pythagoras sieht er unter dem Aspekt der Abwechslung, aber auch als lebendige Darstellung, die über das blosse Erzählen hinausgeht. Die Gruppenarbeit findet er gut. Vielleicht spricht er auch die Veränderung der Gruppenzusammenstellung durch die zufällige Zuteilung der Beweisblätter an. Seine Bemerkung zur Beweisvielfalt ist interessant: „War gut, jetzt konnte man sicher gehen, dass dieser Satz immer stimmt." Nach wie vielen Beweisen war wohl bei Simon genügend Sicherheit gegeben? Ob es andern Schülern auch so ging mit dieser Gewissheit? Gilt auch in dem Bereich: Einmal ist keinmal? …

1.6 Didaktische Interpretation

a) Methodentrias

Exemplarisch
„*Exemplarisch* ist der Lehrgang, wenn ein erstaunliches und möglichst alltägliches Phänomen die Fragequelle ist und bleibt und wenn die Antworten in die Weite der Welt und in die Tiefe der Philosophie führen (Physik ohne Metaphysik bliebe oberflächlich).“ (Berg/Schulze 1998, S. 356)

Der Satz des Pythagoras nimmt im Gefüge der Mathematik eine beziehungsreiche Schlüsselstellung ein. Die Menschheit erlebte an diesem Beispiel erstmals das klare Aufleuchten der Beweisidee, ja der Beweisnotwendigkeit. (Pythagoras feiert und opfert.) Das Beweisen als grundlegendes Prinzip wurde samt dem zuunterst liegenden Unbeweisbaren, Hinzunehmenden, Selbstverständlichen von Euklid in seinen „Elementen“ vervollkommnet und bildet bis heute den Aufbau der Geometrie, ja der ganzen Mathematik als Wissenschaft. Mit diesem Lehrstück verfolgen wir exemplarisch zwei miteinander verknüpfte Funktionsziele (Wagenschein 1980, S. 262f):
1. „Erfahren, was es in der Mathematik heisst, einer Sache gewiss zu sein.“
Wagenschein (ebd. S. 263) schreibt dazu: „Das ‚Funktionsziel’: zu erfahren, was es in der Mathematik heisst, einer Sache gewiss zu sein, wird *ganz* erst klar, wenn wir nicht nur den ‚Pythagoras’, wenn wir die Mathematik selbst verlassen und vergleichen: Nirgendwo anders nämlich gibt es das berauschende Mass von Gewissheit, das uns in der Mathematik erreichbar ist. Denn hier sind wir alle uns schliesslich einig, weil wir alle dieselben Axiome anerkennen und dieselben Schlussweisen, die uns von dort zu den – anfangs – undurchsichtigen und deshalb erstaunlichen komplexen Wahrheiten geleiten. *Hier gibt es keinen Streit.*“ Und nirgends ausserhalb der Mathematik gibt es dieses hohe Mass an Gewissheit, auch wenn es angestrebt wird wie in der Physik zurück bis zum Urknall, in der Evolutionslehre, im Rechtswesen . . .
2. Die „Einsicht in das Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“. (ebd. S. 262)
Dass die Griechen nicht nur eingesehen haben, dass die mathematischen Sätze aufeinander ruhen, sondern dies noch in letzter Konsequenz zwischen 500 und 300 v. Chr. durchdacht und durch Euklid dargestellt haben, ist eine nicht hoch genug einschätzbare Leistung, die den Beginn wissenschaftlicher Tätigkeit markiert. Wagenschein schreibt (ebd. S. 262): „Diese Einsicht betrifft das Ganze der Mathematik. Wer sie am ‚Pythagoras’ begriffen hat, der hat etwas begriffen, was mehr ist als der ‚Pythagoras’. Und zwar nicht noch so etwas wie er ist, sondern etwas Übergeordnetes. Das Ganze, ohne dass es inhaltlich durchlaufen zu werden braucht, ‚spiegelt sich’ also in diesem Einzelnen.“

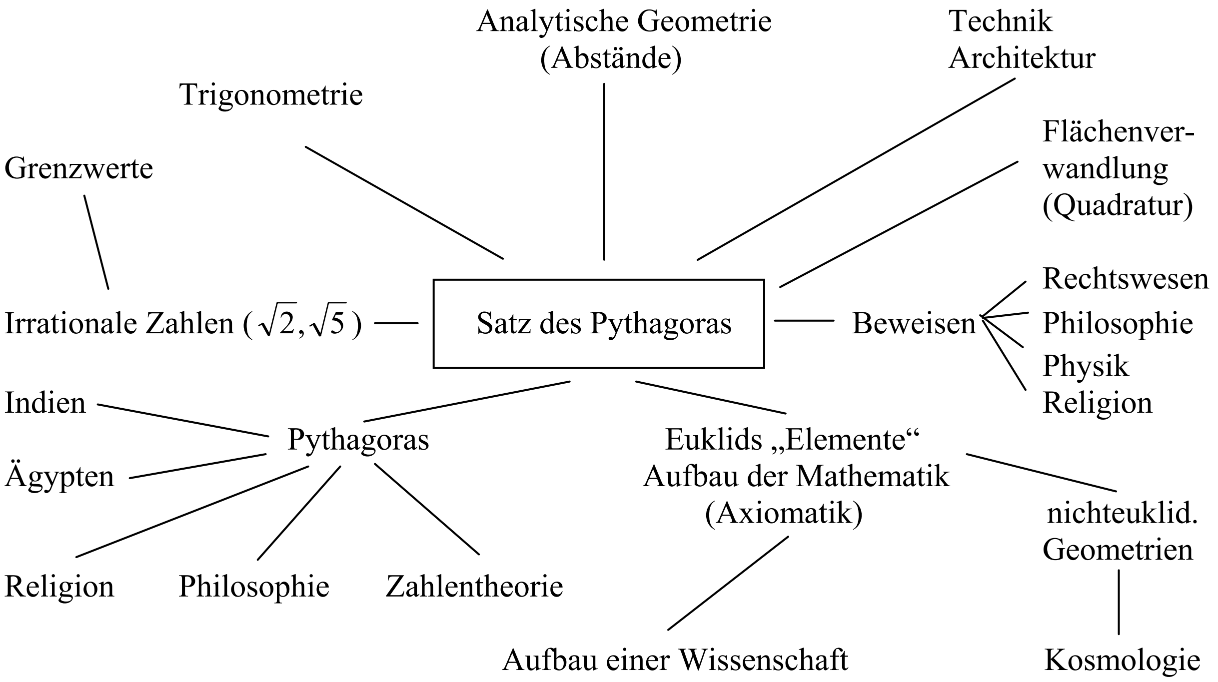
„Euklid oder Sokrates?: Beide! Aber die Möglichkeit einer axiomatischen Darstellung will zuerst sokratisch entdeckt sein.“ (Wagenschein 1982, S. 106) Mit dem Einstieg „Quadrate vereinen“ tauchen wir mitten in eine komplexe Herausforderung. Kindheitserinnerungen kommen hoch an Puzzles und an Stunden des Papier Schneidens und Klebens. Und wie damals: Die Lösung ist nicht offensichtlich, es braucht Zeit, Geduld, Probieren und Verwerfen, Erfolg und Scheitern, Kooperation mit andern… Die Problemstellung ist einfach zu verstehen und doch komplex im Lösungsweg. Wir erfahren, dass grundsätzliche Strategien, wie teilweises Lösen des Problems (Reduktion der Anzahl Quadrate), Bewältigung eines Spezialfalls (zwei gleich grosse Quadrate vereinen) uns dem Ziel näher bringen. Und wenn wir die letzte Klippe, das Vereinen von verschieden grossen Quadraten schaffen, dann gelingt uns die Lösung des Problems. Mit etwas Kletterhilfe ist diese Route begehbar, lässt sich dieser lange Gang zum

Thema durchschreiten. Dabei haben wir einen der zentralsten Sätze der Elementarmathematik entdeckt!
Zur Verdeutlichung und Vertiefung braucht es das Hin und Her, das Vereinen und Entzweien. So werden wir vertrauter mit dem eben Gefundenen. Die Vertrautheit reicht aber nicht; wir brauchen Verständnis und Gewissheit. Entsteht da wirklich ein einziges Quadrat? Das Begründen, das Beweisen beginnt. Und nur mit dem genaueren Hinterfragen erfahren wir Gewissheit, erkennen wir, warum es so sein muss! Wir erleben eine Rollenumkehr: Sind es sonst die fünf bis achtjährigen, welche die Erwachsenen dauernd mit der Frage „Warum?“ bedrängen, ist es jetzt der Lehrer, der den sechzehnjährigen Schülerinnen und Schülern fast penetrant Fragen stellt: „Warum sind diese Dreiecke kongruent?“ – „Warum liegt ein rechter Winkel vor?“ – „Ist dies wirklich ein Quadrat?“… Das Ringen um Gewissheit gehört zur Mathematik und findet ihre Vollendung im Beweis. Hier gehen wir aufs Ganze. Wir wollen wissen und einsehen, *warum* diese besondere Beziehung beim rechtwinkligen Dreieck, und zwar bei *jedem*, so sein muss!

Nach dem Prinzip „Einmal ist keinmal“, wenden wir uns dem Beweisen zu, üben und vertiefen diese mathematische Begründungsform und lernen gleichzeitig an ein und demselben Gegenstand eine Vielfalt unterschiedlicher Beweise kennen. So erfahren wir nicht nur die Beweisführung als Methode der Mathematik, sondern lernen bei Euklids Beweis das Strukturprinzip der Mathematik kennen, das Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten auf dem Fundament der Definitionen und Axiome, wie es in brillanter Art von Euklid in den „Elementen“ vor rund 2300 Jahren dargelegt wurde. Hier erscheint dieser Dreiecksatz als krönender Abschluss seines ersten Buches. Nur dieser streng logische Aufbau auf einem sicheren Fundament garantiert dieses hohe Mass an Sicherheit, welches in andern Wissenschaften wie Physik, Biologie, Recht, Philosophie… angestrebt, aber nicht erreichbar ist.

Ihre besondere Bedeutung erhält die Euklidische Geometrie erst, wenn wir erfahren, dass auch andere, nichteuklidische Geometrien möglich sind, wie z. B. die Kugelgeometrie, in der wir keine Parallelen kennen. Die Verlässlichkeit der Geometrie gilt also nur insofern, als wir ihre Axiome akzeptieren.

Thematische Landkarte:



Thematische Landkarten zum Satz des Pythagoras, welche die Bezüge zu anderen Bereichen darstellen, finden wir bei Wagenschein (1980, S.260) und bei Nölle (1997, S. 76). Schwergewichtig habe ich für obige Darstellung diejenigen Bezüge herausgegriffen, die in meinem Lehrstück direkt oder indirekt angesprochen sind.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Lehrstück „Quadrate vereinen – Quadrate entzweien" zwei grundlegende Funktionsziele der Mathematik bearbeitet, verschiedenste methodische Verfahren beinhaltet und exemplarisch ist für wissenschaftliches Vorgehen und Denken per se.

Genetisch

Das Lehrstück beginnt mit einer kulturauthentischen Fragestellung, der Vereinigung von Quadraten. Diese Frage wurde lange vor unserer Zeitrechnung von den Babyloniern und den Indern gestellt und gelöst. Wir finden sie in Form der Quadratverdoppelung bei Platon im Menondialog von Sokrates. Zentral verbunden ist der Satz mit Pythagoras und seiner Lehre, auch wenn wir nicht wissen, welchen Beweis Pythagoras gefunden haben soll. Aber das Bedürfnis, ja die Notwendigkeit eines Beweises wurde zu jener Zeit drängend. So ist es denn nahe liegend, sich mit dem Namensgeber dieses zentralen Satzes auseinanderzusetzen. Dieser soll ja bei den Ägyptern und ihren Seilspannern, bei den Babyloniern und vielleicht sogar bei den Indern gelernt haben.

Über Pythagoras und diesen ersten Beweis gelangen wir zu Euklid, der in seinen „Elementen" das Beweisen perfektioniert und als zentralen Bestandteil eines grösseren Ganzen, der mathematischen Wissenschaft, hinstellt. Das Ringen um die Fundamente, insbesondere um das Parallelenpostulat, dieser Geometrie führte erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts, also mehr als zweitausend Jahre nach Euklid, zur Erkenntnis, dass auch andere, „nichteuklidische" Geometrien denkbar sind und wirft ein neues Licht auf die Geometrie von Euklid.

Individualgenetisch knüpfen wir mit unserem Ausgangsproblem an bei Kindheitserfahrungen, Kinderfragen und Rätseln. Neben dem Denken sind auch die Augen und die Hände angesprochen. Es findet eine direkte Begegnung mit der jahrtausende alten Frage statt. Etwas Uferhilfe lässt den Erkenntnisdurchbruch erfahren und führt zur Lösung des Problems. Wir haben es geschafft! Anhand von einigen der gegen 400 Beweise üben wir unsere Denkfähigkeit und streifen verschiedene Persönlichkeiten, die sich ebenfalls mit dem Satz auseinandergesetzt haben.

Gegen Schluss rücken wir das Quadraturproblem in einen grösseren Zusammenhang. Wir sind jetzt in der Lage, jedes Vieleck, ja sogar beliebige Vielecke zusammen in ein einziges Quadrat zu verwandeln. Aber die Quadratur des Kreises: Diese geht nicht! Umso erstaunlicher ist es, dass sich die Möndchen des Hippokrates quadrieren lassen. Was doch die Mathematik für Überraschungen bereithält!

So erfahren die Schülerinnen und Schüler im lebendigen Prozess viel darüber, zu was die Griechen vor mehr als 2000 Jahren fähig waren und wie sich damals wissenschaftliches Denken entwickelte, das auch heute noch als vorbildlich gilt.

Dramaturgisch
Dieses Lehrstück umfasst mit seinen ca. 22 Lektionen, inbegriffen 8 Übungslektionen, das gesamte Kapitel der Satzgruppe des Pythagoras samt einer wesentlichen Vertiefung im Bereich des Beweisens und des Aufbaus der euklidischen Geometrie.

Im I. Akt führt uns der steile Einstieg mitten ins zentrale Problem: „Quadrate vereinen". Auch wenn der einzelne Schüler noch nicht weiss, wohin das führen wird (wer weiss das schon beim wissenschaftlichen Arbeiten?), die Aufgabe ist klar und sie wirkt herausfordernd. Die Quadrate sind die widerspenstigen Hauptdarsteller, denen die ganze Aufmerksamkeit gilt. Im Hin und Her zwischen Plenum und Kleingruppe läuft der für die Schüler ungewohnt lange dauernde Prozess. Er erfordert Geduld und Durchhaltevermögen. Doch wir kommen vorwärts, ein Weg zeichnet sich ab. Wir reduzieren die Anzahl der Quadrate in drei wesentlichen Stufen: Erst ergeben sich grosse Quadrate gemäss den Quadratzahlen, dann vereinigen wir je zwei gleich grosse Quadrate zu einem einzigen und schliesslich gelingt es uns, zwei verschieden grosse Quadrate zu einem einzigen zu vereinen und damit das Problem im Gemeinschaftswerk zur Vollendung zu bringen. Vermehrte Vertrautheit mit dem Gewonnenen ergibt sich im Hin und Her von Vereinen und Entzweien.

Im II. Akt will diese Vereinigung von zwei verschiedenen Quadraten zu einem dritten genauer untersucht, begründet, bewiesen werden. Der Schwerpunkt verlagert sich auf das rechtwinklige Dreieck, um welches sich die drei Quadrate scharen, auf das Beweisen als Methode und damit verknüpft auf ihren „Urheber" und Namensgeber Pythagoras samt seiner Lehre.

Im III. Akt steht das Beweisen, konzentriert auf diesen einen Satz, im Zentrum der Beweisvielfalt. Hier wird besonders viel Eigentätigkeit der Schüler verlangt, dafür erhellt sich der Satz von den verschiedensten Seiten. Und sehr oft wird derjenige Beweis, mit dem sich die Schüler am intensivsten befasst haben, zu deren Lieblingsbeweis.

Der letzte Beweis führt uns zum IV. Akt und zu Euklid, unserem zweiten Akteur, der 200 Jahre nach Pythagoras das Beweisen perfektionierte. Er sammelte das ganze mathematische Wissen der damaligen Zeit und stellte es systematisch zusammen. Sein Werk wurde Weg weisend und gilt bis heute als vorbildliches wissenschaftliches Gebäude auf klar definiertem Fundament. Vom Höhepunkt des ersten Buches der „Elemente", dem Satz des Pythagoras, schreiten wir über andere Sätze hinunter bis zum Fundament am Anfang dieses Buches, auf dem er abgestützt ist, und dann wieder hinauf zu diesem Höhepunkt.

Im V. Akt sind endlich vielfältige geometrische und algebraische Anwendungen des behandelten Satzes gefragt. Dafür muss allerdings eine Auseinandersetzung mit den Wurzelgesetzen eingeschoben werden.

Das Finale, abgestützt auf die vielfältigen Übungen, bringt nochmals eine Verdichtung in der Quadraturfrage und einen Ausblick in der Verallgemeinerung des Satzes auf beliebige Dreiecke, bevor wir mit der Wurzelschnecke die Brücke zum Ausgangsproblem herstellen. Dies ist dann auch Anlass zur Reflexion über das Gelernte und über den Prozess.

b) Die Kategorialbildungskonzeption Klafkis

In seinen „Studien zur Bildungstheorie und Didaktik“ von 1959 hat Wolfgang Klafki eine mehrstufige Bildungstheorie entwickelt. Er unterscheidet drei Ebenen: Historische Bildungstheorien (unterteilt in vier Teilaspekte), Kategorialbildung und Fundamentale, Elementare Kategorialbildung.

Die historischen Bildungstheorien ergeben die Grundlage der Kategorialbildung. Unter der *materialen Bildung* wird das Inhaltliche, Objektive der Bildung zusammengefasst. Es geht also um die konkret gelernten Inhalte, das Objekt an sich ist bildungswürdig. Bei der *formalen Bildung* steht im Zentrum das Subjektive der Bildung mit Blick auf den Sich-Bildenden. Es sind die Kräfte im Menschen, welche anhand bestimmter Inhalte gebildet werden.

Bei der materialen Bildung unterscheidet Klafki die objektivistische und die klassische Bildung.

1.1 Der bildungstheoretische Objektivismus
Bei diesem Aspekt der Bildung geht es um die Aufnahme von Inhalten, von wissenschaftlichen Erkenntnissen, von sittlichen Werten und ästhetischen Gehalten mit dem Ziel „auf der Höhe der Kultur Stehen“ (ebd. S. 28). Der rechte Winkel gehört fundamental zu unserer Kultur. Kein Bauwerk bei uns kommt ohne ihn aus. Beim vorliegenden Lehrstück geht es sicher einmal darum, diesen bekanntesten mathematischen Satz (bzw. die ganze Satzgruppe des Pythagoras) über das rechtwinklige Dreieck kennen zu lernen, sich Anwendungsbereiche im konstruktiven und rechnerischen Bereich zu erschliessen. Das Kennenlernen des Satzes zieht sich durch das ganze Lehrstück hindurch, das vielfältige Anwenden ist primäres Ziel des V. Aktes.

1.2 Die Bildungstheorie des „Klassischen“
Hier geht es um die Erfahrung des Klassischen, des Exemplarischen in der reinen, erhabenen und prägnanten Form und Gestalt. Dargestellt wird im Lehrstück das Prinzip der Vereinigung zweier Quadrate durch das Dreieck in der einprägsamen Pythagorasfigur. Diese Verwandlung in eine einfache Grundform ist eine Grundfrage aus dem klassischen Altertum. Es gelingt uns, eine beliebige Anzahl Vielecke in einem Quadrat zu vereinen. Sogar gewisse krummlinig begrenzte Flächen lassen sich quadrieren, aber für den Kreis geht es nicht! Die Redeweise „Die Quadratur des Kreises“ für ein unlösbares Problem ist Bestandteil unserer Kultur. In der Begegnung mit den „Elementen“ des Euklid erfahren wir am klassischen Beispiel das „Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“, den Aufbau einer Wissenschaft, ihre Begründung auf Fundamenten und ihren systematischen Aufbau. Dieser ist geprägt durch eine Reihe von Sätzen, welche nach klassisch gewordenem Schema Voraussetzung – Behauptung – Beweis miteinander verknüpft sind.

Bei der formalen Bildung unterscheidet Klafki zwischen funktionaler und methodischer Bildung.

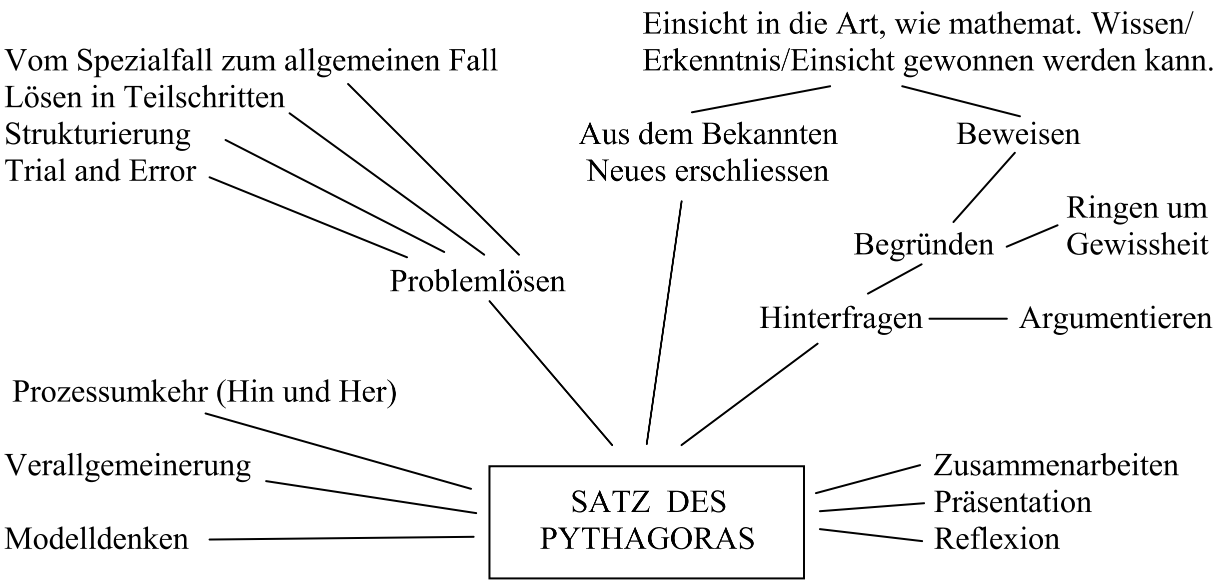
1.3 Die Theorie der funktionalen (Kräfte-)Bildung
Bei der funktionalen Bildung ist das Wesentliche „nicht Aufnahme und Aneignung von *Inhalten*, sondern Formung, Entwicklung, Reifung von körperlichen, seelischen und geistigen *Kräften*.“ (ebd. S. 33) Idealerweise ist eine Übertragung der neu gebildeten Kräfte auf andere Inhalte und Situationen möglich. Im Lehrstück wird die Macht klarer Argumentation in Form von Beweisen erarbeitet und geübt. Es ist zu hoffen, dass diese Fähigkeit des klaren Denkens

und Argumentierens auch in anderen Bereichen zur Geltung kommt. Der Schüler erfährt, dass es verschiedene Erklärungsarten gibt für ein und denselben Satz und realisiert, welcher Zugang ihm persönlich am besten entspricht. Es wird erlebt, dass andere Menschen auf andere Methoden besser ansprechen. Nachhaltig ist sicher die Erfahrung, wozu die Griechen vor über 2000 Jahren fähig waren und dass ich einen Text aus jener Zeit verstehen kann.

Stärkend wirkt das Erleben, dass unsere ursprüngliche Aufgabe, die vorerst nicht lösbar schien, nach längerem Suchen und zeitweiligem Verzweifeln in der Gemeinschaft bewältigt wurde. Wie weit sich derartige Erfahrungen auf andere Situationen übertragen lassen, ist schwer zu sagen.

1.4 Die Theorie der methodischen Bildung

Bei der methodischen Bildung geht es um die Gewinnung und Beherrschung von „Denkwiesen, Gefühlskategorien, Wertmassstäben“ oder kurz von Methoden zur Bewältigung späterer Lebenssituationen. Bei Heinz Klippert (1994, S. 27) lesen wir: „In dem Masse, wie sich sein Methodenrepertoire erweitert und festigt, wächst auch seine Selbststeuerungs- und Selbstbestimmungsfähigkeit – und damit seine Mündigkeit.“ – „…ohne Methodenbeherrschung ist Mündigkeit sicherlich nicht wirkungsvoll erreichbar.“ Methodische Bildung findet aber nicht im luftleeren Raum statt, sondern braucht ein interessantes Thema, einen herausfordernden Gegenstand. Da in diesem Lehrstück viele methodische Bereiche gefördert werden, sei hier eine *methodische Landkarte* angefügt:



Natürlich hat das Lehrstück nicht das Ziel, diese Methoden zur Perfektion zu trainieren, aber in all diesen methodischen Bereichen werden Erfahrungen gesammelt und Fortschritte erzielt. Das Mass der Mündigkeit wird erhöht.

2. Kategorialbildung

In der Kategorialbildung nimmt Klafki einen den vier historischen Bildungstheorien übergeordneten Standpunkt ein. Auf dieser höheren Ebene geht es um umfassendere Kategorien, welche zur wechselseitigen Erschliessung von Mensch und Welt gehören.

Die Kategorie, die im Lehrstück gewonnen wird, ist das, was Wagenschein als *Funktionsziel* bezeichnet, nämlich „Diese Einsicht in das Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten" (Wagenschein 1980, S. 262). Diese Einsicht umfasst jetzt aber mehr als nur das zur Kenntnis Nehmen. Es schliesst die Erfahrung ein, wie von einem zentralen, klassischen Satz ausgehend die Begründung, oder eben der Beweis, in die Tiefe führt, zu früheren bewiesenen Sätzen und schliesslich zu gewissen, als gegeben angenommenen Fundamenten. Zu ihr gehört auch die Fähigkeit, einen derartigen Satz beweisen oder allenfalls einen Beweis nachvollziehen zu können, die Methoden zu kennen und womöglich auch zu können. Nur so wird dieses in Jahrtausenden gewachsene und sich ständig weiterentwickelnde Modell des Raumverständnisses im einzelnen Menschen erfahrbar und lebendig. Der Raum erschliesst sich dem Menschen durch seine Fundamente, seine Sätze und seine einleuchtenden Zusammenhänge und der Mensch erschliesst sich den Raum durch seine gewonnen Fähigkeiten und Methoden, Beweise zu führen, Zusammenhänge zu erkennen, Sätze anzuwenden und vielleicht sogar das System weiterzuentwickeln. Wo diese Geometrie nicht mehr ausreicht, wird dem Menschen eine Änderung der Grundlage nahe gelegt, auf der er sich eine andere Geometrie erbaut und sich damit bisher unerreichte Dimensionen des Kosmos erschliesst.

3. Fundamentale und elementare Kategorialbildung

Bei der fundamentalen und elementaren Kategorialbildung stossen wir in eine noch tiefere Schicht des Bildungsgehaltes vor. Sie ist dann gegeben, wenn sie „… den Durchstoss zum Fundamentalen, zu den tragenden Kräften der Grundbereiche unseres geistigen Lebens erlaubt" (Klafki 1959, S. 45).

An unserem Beispiel sollte dem Jugendlichen klarer werden, wie der hinterfragende, ergründende, mit dem Verstand die Dinge durchdringende Mensch im Kosmos zu einem fundierten logischen System kommen kann, welches aber nicht nur in seinem Geiste existiert, sondern ihm diesen Kosmos weiter erschliesst. Es ist ein Prozess zwischen menschlichem Geist und Kosmos, der selbst nie abgeschlossen ist. Wir haben hier die wissenschaftliche Methode *an sich* exemplarisch vor Augen. Der Mensch sollte schliesslich die Methoden und Fähigkeiten entwickeln, um aktiv in diesen Prozess einzutreten. Nur so wäre Bildung als „doppelseitige Erschliessung" durch „Erschlossensein einer dinglichen und geistigen Wirklichkeit für einen Menschen" und „Erschlossensein dieses Menschen für diese seine Wirklichkeit" (Klafki 1959, S. 43) gegeben.

1.7 Das Lehrstück in der Fachschaft

Seit 2002 gehört das Lehrstück zum Pythagoras in dieser Form in mein Repertoire. Am liebsten steige ich bei einer neuen Quarta direkt mit dieser Unterrichtseinheit ein. So sind wir von Beginn weg interaktiv mit der Geometrie verbunden und erleben in kurzer Zeit die Entstehung eines ersten anspruchsvollen Gemeinschaftswerks.

In der Fachschaft habe ich dieses Lehrstück am Mittwoch, 4. Dezember 2002 vier anwesenden Kollegen präsentiert. Der älteste von ihnen hat sich erstaunt gezeigt über die Länge, aber auch über die Vielfältigkeit und den Tiefgang dieses Lehrstücks. Mit meiner Übersicht (S. 19) musste ich darlegen, wo ich die Zeit für dieses Lehrstück nehme.

Der jüngste der Kollegen, Heiner Rohner, hat sich intensiver interessiert, weiteres Material von mir studiert und in seiner Quarta zwei Monate später einen ersten Versuch gewagt. Seine

Unterrichtseinheit dauerte etwa 15 Lektionen. Den Einstieg gestaltete er anders, da er davon ausging, dass der Satz des Pythagoras allen bekannt sei. Er bildete bald sechs gut durchmischte Gruppen, wobei je ein anderer Beweis erarbeitet wurde. Eine Doppellektion stand zur Verfügung, um sich diesen Beweis zu erarbeiten, über den Urheber auf dem Internet zu recherchieren und auf einem Blatt „A4 Quer" das Wesentliche zusammenstellen. Die Beratungsmöglichkeit wurde von einzelnen Gruppen eifrig genutzt. In der folgenden Einzellektion wurde gemeinsam der Ähnlichkeitsbeweis samt Katheten- und Höhensatz erarbeitet. Die darauf folgende Doppellektion begann Herr Rohner mit dem Sonett von Chamisso (Baptist 1998, S. 32f), worauf die Präsentationen der sechs Beweise folgten, die gemäss seinen vorgegebenen Präsentationszielen mehrheitlich gut dargestellt wurden. Als nächstes stand Euklid mit seinem Beweis im Zentrum, gefolgt von einem längeren Übungsblock. In dieser Zeit wurde auch mit den einzelnen Gruppen deren Präsentation nachbesprochen.

Da ich seinen Unterricht nicht verfolgt habe, kann ich nur auf Grund des vorliegenden Berichtes und seiner Schilderungen einen Kommentar abgeben. Mir fehlt im Einstieg ein spannendes Phänomen, ein Rätsel. Die Verwandlungskraft des rechtwinkligen Dreiecks ist nur im Prozess erfahrbar. Die Beweisvielfalt scheint mehrheitlich zu gefallen. Für die Recherche im Internet samt der verschiedenen Autoren formuliert Herr Rohner klare Aufträge zum Verfassen eines A4-Blattes: „Das Info-Blatt hat den Umfang von zwei A4-Seiten, die auf eine A4-Seite verkleinert werden. Es enthält eine ausformulierte Version des Beweises, zum Verständnis desselben nötige Skizzen sowie Hintergrundinformationen zum Beweis; eine kurze Biographie des Verfassers, ev. Geschichte des Beweises sowie mindestens eine Antwort auf die Frage, was euch an diesem Beweis besonders gefallen (oder missfallen) hat." Das an die Schüler verteilte Blatt enthält eine kurze Übersicht über den zu bearbeitenden Beweis und eine hilfreiche Internetadresse. Dank der klaren Auftragserteilung resultieren recht gute Zusammenstellungen. Wir erhalten kurze Informationen über Personen, die sich in den letzten 2500 Jahren mit diesem Satz auseinandergesetzt haben. Als wichtiger erachte ich allerdings die Konzentration auf die zwei wesentlichen Personen, Pythagoras und Euklid, samt deren Grundideen, für die sie stehen.

Eine Kollegin des Literargymnasiums, Bärbel Schöber, hat meine Präsentation am Luzerner Kongress zur Unterrichtsentwicklung (30. 04. – 2. 05. 2003) erlebt und ist inzwischen in die neue Berner Lehrkunstwerkstatt eingestiegen. Demnächst möchte sie in einer ihrer Klassen das Lehrstück zum Pythagoras inszenieren. Deshalb habe ich im Rahmen der 7. Lehrkunstwerkstatt nochmals mein Lehrstück zum Pythagoras der Kleingruppe vorgestellt. Frau Schöber arbeitet mit einem Lehrbuch aus dem Cornelsen Verlag und sucht einen Kompromiss zwischen Lehrstück und Buch. Sie möchte vorerst Architekturprobleme in den Vordergrund stellen und erst später Quadrate vereinen. Die Komposition muss völlig neu überdacht werden. Ob die offene Lernsituation, das Vereinen und Entzweien immer noch die Leistungskraft des Satzes zeigen wird? Finden wir etwas, was die Verwandlungskraft beinhaltet? Soll das rechtwinklige Dreieck im Zentrum bleiben oder gehen wir von Quadraten aus? Wie muss das Lehrstück komponiert sein, wenn es das Unterrichtsbuch ergänzen soll? Dies sind Kompositionsfragen, die es neu zu klären gilt.

Eine Woche später erhalte ich von Frau Schöber eine schriftliche Rückmeldung auf mein Lehrstück:
1. Quadrate vereinen – Quadrate entzweien: Ein spannender und mutiger Einstieg. Probleme: Der Prozess kann stagnieren und das Interesse an der Fragestellung verloren gehen. Der zeitliche Rahmen und Nutzen für alle Schüler ist unklar. Hinweise zur Erfüllung der Hausaufgabe sind notwendig.

2. Der Lehrsatz des Pythagoras: Die Beachtung der historischen und philosophischen Dimension ist sehr sinnvoll. Das Auftreten der Lehrperson als Anhänger des Pythagoras erscheint mir bezüglich der Unterstützung des Lernprozesses als nicht so entscheidend.
3. Beweisvielfalt: Entwicklung der Fähigkeit zum Führen mathematischer Beweise wird sehr gut gestaltet.
4. Die Beweisführung als Prinzip in den „Elementen“ des Euklid: Der Blickwinkel wird gut erweitert.
5. Übung führt zu Vertrauen in die geschaffenen Pfade: Die Übungsblätter erfassen die notwendige Vielfalt und enthalten im Schwierigkeitsgrad abgestufte Aufgaben. Der Bezug zur Lektion 12 könnte mehr beachtet werden (Hebelpresse, Fachwerkbau, Berechnungen in der Archäologie, Trinkhalm …)
6. Das grosse Finale zum Satz des Pythagoras: Es ist sehr eindrücklich, wenn die Mehrheit der Schüler dem inhaltlichen Bogen ständig folgen konnte.
Weitere Bemerkungen und Anregungen: Ich habe das Material mit grossem Interesse und Freude gelesen. Die Gestaltung der Lektionen zur Beweisvielfalt finde ich besonders gelungen.

Kommentar: Frau Schöber setzt Fragen hinter den Einstieg. M. E. genügt es für den Anfang, dass die Lehrkraft vom Sinn und Nutzen dieser drei Lektionen für die Schüler überzeugt ist. Der Auftritt als Anhänger des Pythagoras kann sicher durch entsprechende Informationen ersetzt werden. Im Bereich der Übungen gibt Frau Schöber interessante Anregungen. Ansonsten ist sie dem Lehrstück sehr angetan. Trotzdem will sie einen ganz anderen Weg wählen, weil sie glaubt, das Lehrbuch einbeziehen zu müssen. Warum nicht zu Beginn ein kurzes Lehrstück durchführen, das die wesentlichen Erfahrungen beinhaltet, und anschliessend mit dem Lehrbuch ergänzen?

1.8 Die Ideengeschichte im Lehrstück

Im Zentrum dieses Lehrstücks steht die Grundidee [1] (vgl. Seite 13): Das Begründen, das Beweisen als zentrale Tätigkeit im Denkgebäude der Mathematik. Bevor es allerdings etwas zu beweisen gibt, muss der zu beweisende Satz, bzw. die Hypothese gefunden werden. Was Euklid in seinen Elementen mit fatalen Folgen für die gesamte Mathematik weglässt, versuchen wir im I. Akt zu erleben. Auf heuristischem Weg gelangen wir über die Problemstellung „Quadrate vereinen“ zu einem allgemeinen Verfahren, das sich als Satz formulieren und erst dann beweisen lässt. Bei Archimedes werden wir später noch die Wertschätzung für das heuristische Finden eines Satzes erfahren. Viele Schülerinnen und Schüler stehen diesem Vorgehen positiv gegenüber. AAA (2): „Dass wir es selber herausfinden mussten, war gut, denn so kann man es sich besser einprägen, als wenn der Lehrer es einfach erklärt.“ Beatrice (20): „Wir probierten und das Resultat war dann umso einleuchtender!“ GGG (20): „Man sah an dem Bild wie der Beweis aufgebaut war und so war es einfacher ihn wieder anzuwenden.“ Nach dem gemeinsamen Beweisbeispiel setzen sich die Schüler in der Beweisvielfalt intensiver mit dem Prinzip des Beweisens auseinander. Dabei lernen sie auch verschiedene Argumentationsweisen kennen und erfahren, welche ihnen am besten zusagt. Zudem werden sie erst jetzt empfänglich für das Vorgehen von Euklid. Ausgehend vom Ende des ersten Buches der „Elemente“ lässt sich die Kette zurückverfolgen bis zu den Fundamenten, zu den Definitionen, Axiomen und Postulaten. Damit wird das „Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“ (Wagenschein 1980, S. 262) erfahrbar. Mit Pythagoras und Euklid wird auf die Zeit des Entstehens dieser Grundidee verwiesen, wobei Euklid mit seinen „Elementen“ die Mathematik klar strukturiert und für die Verbreitung zusammenstellt, womit die Mathematik erst zu einer fundierten Wissenschaft mit Vorbildcharakter werden lässt. Der Hinweis auf „nichteuklidische Geometrien“ und der Querblick in andere Wissenschaften vertieft erst die Einzigartigkeit mathematischer Denkgebäude und lässt erfahren, „was es in der Mathematik heisst, einer Sache gewiss zu sein“ und was Wagenschein meint, wenn er schreibt: „Nirgendwo anders nämlich gibt es das berauschende Mass von Gewissheit, das uns in der Mathematik erreichbar ist. Denn hier sind wir alle uns schliesslich einig, weil wir alle dieselben Axiome anerkennen und dieselben Schlussweisen, die uns von dort zu den – anfangs – undurchsichtigen und deshalb erstaunlichen komplexen Wahrheiten geleiten. Hier gibt es keinen Streit.“ (ebd. S. 263) – Monique (1) äussert sich so: „Ich finde es gut, etwas von früher zu erfahren. Beispielsweise eben von Euklid. Ich finde auch die Querblicke sehr interessant, denn so kann ich mir Verknüpfungen machen und mir vieles besser behalten.“

In diesem Lehrstück sind noch weitere Grundideen angesprochen. Da rechte Winkel in unserer Umgebung allgegenwärtig sind, lässt sich der Satz einfach und ohne komplizierte Modellierung [3] in der Realität anwenden. Auf die Idee der Zahl [4], welche den Alltag durchdringt, verweist der Einbezug von Pythagoras mit seiner Lehre, in der die Zahlen mystische Qualitäten besitzen und ganzzahlige Verhältnisse allüberall postuliert werden, bis hin zu Musik und Astronomie. Formen, Ästhetik und Gesetzmässigkeiten des euklidischen Raumes [6] finden wir nicht nur in der Satzgruppe des Pythagoras, sondern auch beim klassischen Problem der Quadratur, wo sich eine umfangreiche Klasse von Figuren zeigt, die alle konstruktiv in ein Quadrat verwandelt werden können und somit – bei gleicher Fläche – ineinander übergeführt werden können. Das in diesem Zusammenhang geübte Konstruieren ist eine intensive Auseinandersetzung mit dem euklidischen Raum. Die Konstruierbarkeit selbst und das Quadraturproblem verweisen auf die Idee hinter den Gegenständen [2]. Die Grundidee [7], die Formel als Kurzschrift, ist in den Sätzen über das rechtwinklige Dreieck präsent, am einprägsamsten und bekanntesten in $a^2 + b^2 = c^2$. Bei der Ausweitung dieser Gesetzmässigkeit auf beliebige Dreiecke werden neue Zusammenhänge erfahrbar. Die funktionale Abhängigkeit der Quadrate über den Seiten des beliebigen Dreiecks wird aber noch nicht formuliert, sondern erst in den Ungleichungen angedeutet. Ein „geometrischer Algorithmus“ [8] taucht in der Wurzelschnecke auf, die uns erlaubt, die Wurzel aus einer beliebigen natürlichen Zahl zu konstruieren. Einem potentiell unendlichen Prozess [9] begegnen wir nicht nur bei der Wurzelschnecke, sondern auch beim Ansinnen, die Quadrate zu pulverisieren und beim Leitbild dieses Lehrstücks, beim Pythagorasbaum.

Im Überblick mag eine Tabelle die Repräsentanz der zentralen Ideen in diesem Lehrstück verdeutlichen:

(geringe [•] bis hohe **[•••]** Repräsentanz)

Grundidee	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**	**[6]**	**[7]**	**[8]**	**[9]**	**[10]**
Repräsentanz	• • •	•	• •	• • •		• •	• • •	•	•	

															2
							2				3				2
			2		3		2	3	5		2		7	5	2
	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**

															2
							3								2
	3		5				2			3	7		5		2
	3		2	7	11		2	5	13	3	2		3		2
17	2	19	2	3	2	23	2	5	2	3	2	29	2	31	2
17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**

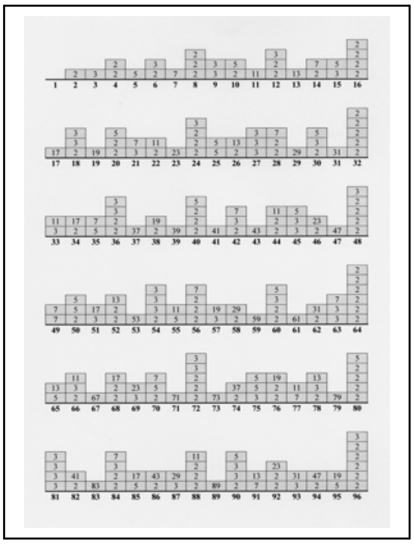
															3
			3				5								2
			3				2		7		11	5			2
11	17	7	2		19		2		3		2	3	23		2
3	2	5	2	37	2	39	2	41	2	43	2	3	2	47	2
33	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**

															2
															2
					3		7				5				2
	5		13		3		2				3			7	2
7	5	17	2		3	11	2	19	29		2		31	3	2
7	2	3	2	53	2	5	2	3	2	59	2	61	2	3	2
49	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**

							3								5
							3								2
	11		17		7		2			5	19		13		2
13	3		2	23	5		2		37	5	2	11	3		2
5	2	67	2	3	2	71	2	73	2	3	2	7	2	79	2
65	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**

															3
															2
3			7				11		5						2
3			3				2		3		23				2
3	41		2	17	43	29	2		3	13	2	31	47	19	2
3	2	83	2	5	2	3	2	89	2	7	2	3	2	5	2
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**

2. PRIMZAHLEN – BAUSTEINE DER MULTIPLIKATION
Ein Lehrstück über das Nichtabbrechen der Primzahlfolge für die 9. Klasse des Gymnasiums



2.1 Einleitung

Primzahlen sind etwas Elementares und gleichzeitig Faszinierendes. Wie wir dem erfolgreichsten Werk der mathematischen Weltliteratur, den Elementen des Euklid entnehmen, haben sich schon vor mehr als 2300 Jahren die mathematischen Denker intensiv mit den Primzahlen auseinandergesetzt. Die Primzahl, die „πρωτος αρυϑμος“ (protos arythmos) definiert Euklid zu Beginn seines siebten Buches der „Elemente“ als Zahl, die sich nur durch die Einheit messen lässt. Diese Primzahlen sind also die ersten, die wichtigsten, ursprünglichen Zahlen, die „Prototypen“, wie die Elemente in der Chemie. Aus diesen multiplikativen Urbausteinen entsteht durch Synthese jede zusammengesetzte Zahl („συνϑετος αρυϑμος“, synthetos arythmos). Die Erforschung der Primzahlen und ihrer Zusammengesetzten ist heute noch in vollem Gange, am populärsten ist die Suche nach immer grösseren Primzahlen mit Computern.

Beim Bruchrechnen stossen wir unweigerlich auf die Primzahlen und die Frage nach ihrer Anzahl drängt sich auf. Dass diese Frage aber so schön und einfach beantwortet werden kann und bereits vor über 2300 Jahren von Euklid in seinen Elementen beantwortet wurde, ist erstaunlich. Wir erkennen, wozu allein logisches Denken führen kann und wie ein Beweis durch Widerspruch geführt wird. Nicht umsonst belegt dieser Satz mit seinem eindrücklichen Beweis in der 1988 gestarteten Umfrage der führenden Fachzeitschrift „The Mathematical Intelligencer“ auf der Suche nach den zehn schönsten mathematischen Sätzen den dritten Platz.

Wagenschein (1980, S. 228) würdigt diese Erkenntnis folgendermassen: „Der ebenso einfache wie geniale antike Beweis dafür, dass die Folge der Primzahlen niemals abbrechen kann, gehört zu den wenigen wirklich unentbehrlichen Stücken des mathematischen Lehrgutes. Ohne irgendwelche Vorkenntnisse vorauszusetzen, lässt er erfahren, was es heisst, mathematisch zu denken. Für die überhaupt dafür Empfänglichen ist das aktive Begreifen dieses souveränen Verfahrens ein unvergessliches Erlebnis.“

2.2 Vorlagen von Martin Wagenschein und Wilhelm Werner

Wagenschein (ebd. 229): „Nur wer die Höhe gewann, weiss, was Höhe ist.“

Es gibt bei Wagenschein einige hochinteressante Beispiele, die darlegen, wie ein genetisch-exemplarischer Unterricht stattfinden könnte und sollte. Suchen wir aber die Beschreibung eines konkret durchgeführten Unterrichtsbeispiels aus dem Mathematikunterricht, so finden wir nur eines: „Ein Unterrichtsgespräch zu dem Satz Euklids über das Nicht-Abbrechen der Primzahlenfolge“ (ebd. S. 228 - 236)

Dieser geniale antike Beweis ist bestens geeignet als Beispiel zu klären, was mit dem exemplarischen Lehren gemeint sein soll, denn er bedarf nur elementarster mathematischer Vorkenntnisse und ist ohne allzu grossen Aufwand erreichbar. Das Erlebnis des Erringens, die einfache Beweisführung und die Tatsache, dass wir hier über die Unendlichkeit eine zwingende Aussage machen können, dürfte doch vielen Schülerinnen und Schülern in bleibender Erinnerung haften.

Wagenschein liefert einen Bericht über den Weg, den das Unterrichtsgespräch 1949 an der Ecole d’ Humanité in Goldern nahm. Mit einer Gruppe von 13 Jungen und Mädchen im Alter von 14 bis 17 Jahren befasste er sich während 6 Stunden mit den Primzahlen, vermutlich eine Woche lang jeden Morgen 60 Minuten.

1. Stunde: Am Anfang setzt Wagenschein die Segel, das Thema wird sichtbar gemacht, die Verbindung zwischen Thema und Gruppe herausgestellt. Wie dies geschehen ist, wird leider nicht genauer berichtet. Früh muss jedenfalls bereits der Ansatz $2n\pm1$ als Formel zur Bestimmung von Primzahlen aufgetaucht sein.
2. Stunde: Die Gruppe ist auf der Suche nach Primzahlen. Ein Schüler formuliert einen Satz (1): „Jede Primzahl hat die Form 6n+1 oder 6n-1.“ Zur Verifizierung dieses Satzes wird eine Primzahltabelle verteilt und durchmustert. (In der Anmerkung (ebd. S. 230) meint Wagenschein: „Besser wäre es gewesen, wir hätten sie selber gemacht.“) Bald einmal steht die Frage nach der letzten Primzahl im Zentrum. (Leider verschweigt er, wie diese Frage aufgetaucht ist.) Zur Klärung der Frage kann der erste Satz allerdings keinen Beitrag leisten; vielleicht hilft seine Umkehrung, der Satz (2): „Alle Zahlen der Form $6n\pm1$ sind Primzahlen.“ Bereits mit $n = 4$ erweist er sich aber als falsch, denn $6\cdot4+1 = 25$ ist keine Primzahl.
3. Stunde: Dieser „falsche“ Ansatz wird durchleuchtet. $2\cdot3\cdot n$ ist teilbar durch 2 und 3, deshalb ist $2\cdot3\cdot n \pm 1$ weder durch 2 noch durch 3 teilbar. Ein neuer Ansatz taucht auf: $6p + 1$ (p sei Primzahl) soll eine neue (grössere!) Primzahl sein, z.B. $6\cdot5+1 = 31$, $6\cdot7+1=43$, $6\cdot11+1=67$, usw. ... Nach einigem hoffnungsvollem Probieren taucht mit $6\cdot29+1=175$ ein Versager auf, denn diese Zahl ist durch 5 teilbar.

2 + 1 =	3
2·3 + 1 =	7
2·3·5 + 1 =	31
2·3·5·7 + 1 =	211
2·3·5·7·11 + 1 =	2311
2·3·5·7·11·13 + 1 =	30031 ???

Im Anschluss an diese Stunde und über Nacht gären diese Beispiele weiter und schon am Morgen kommt ein Schüler strahlend zum Frühstück: Ich hab’ die Lösung!

4. Stunde: Im Unterricht verkündet er Satz (3): Wenn p die grösste Primzahl ist, die ich kenne, dann ist $N = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ .\ .\ .\ .\ \cdot p + 1$ (wobei das Pro-

dukt *alle* Primzahlen bis p enthalten soll) bestimmt auch eine Primzahl, und zwar eine grössere als p!

Zustimmung! Das Rechnen geht los und die Proben scheinen die Behauptung zu bestätigen: Die letzte Zahl ist zu gross für die Primzahltabelle, wird aber wohl auch eine Primzahl sein. Wagenschein bleibt zögernd und mahnt zu schärfster Kritik und Prüfung.

Und wieder bringt es die Musse zwischen den Stunden: Am Morgen verkündet Gabi jubelnd, sie könne nun beweisen, dass es keine letzte Primzahl geben könne!

5. Stunde: Im konzentrierten Gespräch erweist sich, dass N zwar nicht unbedingt eine neue Primzahl ist, dass die Zahl N aber, wenn sie selbst keine neue Primzahl ist, zusammengesetzt ist aus neuen Primzahlen, die zwischen p und N liegen, wie das Beispiel 30031 = 59·509 illustriert. Und Marianne formuliert es so: „In *beiden* Fällen ist bewiesen, dass es keine letzte Primzahl gibt, da man dies weiterführen kann." Der erledigte Satz (3) bringt so die erstaunliche Wende. Zwar haben es erst wenige wirklich begriffen; aber indem es andere in ihren Worten ausdrücken, entstehen nach und nach neue Anhänger. Die Stunde endet damit, dass jeder Schüler den Beweis nochmals durchdenkt und auf seine Weise alles auf einen Zettel schreibt.
6. Stunde: Aus den einzelnen Niederschriften wird in der letzten Stunde um die gemeinsame Formulierung gerungen. Im Anschluss daran legt Wagenschein die entsprechende Formulierung des Satzes aus einer deutschen Übersetzung von Euklids „Die Elemente" zum Vergleich vor. Es fehlt auch der Hinweis nicht, dass es nach wie vor keine Formel gibt, die *jede* Primzahl liefert und dass die Mathematik selbst wie die Folge der Primzahlen ohne Ende ist, indem ein Problem das andere wachruft.

Die Reaktionen im Nachhinein zeigen, wie gefesselt und aufgewühlt die Schülerinnen und Schüler ob dieser Fragen gewesen sein mussten und wie nachhaltig dieses Erlebnis wirkte.

Gute vierzig Jahre später greift Wilhelm Werner das Thema wieder auf. Seine Beschreibung liegt vor unter der Überschrift: „Primzahlen, nach Wagenschein. Eine Leiter bauen ins Unendliche" (Berg/Schulze 1995, S. 153-179). Werner spielt an auf eine erste Durchführung in einer 6. Klasse, die er schliesslich als gescheitert betrachtet und beschreibt ausführlich eine zweite Inszenierung in einer 8. Klasse im Philippinum in Marburg.

1.-4. Lektion (Vorspiel: Vier Stunden Vorbereitung): Werner zweifelt an Wagenscheins Prämisse, dass dieser Beweis „ohne irgendwelche Vorkenntnisse vorauszusetzen" erfahrbar sei. In einem Vorspiel widmet er sich deshalb der Wiederholung: Was ist ein Teiler? Wie gehen die Teilbarkeitsregeln? Was ist eine Primzahl? „Eine Zahl heisst Primzahl, wenn sie nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist." Wie geht die Primfaktorzerlegung? Was sind grösster gemeinschaftlicher Teiler (g.g.T) und kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches (k.g.V)? Was ist das Besondere an den Primzahlen? Diese werden bereits als unteilbare Bausteine aller natürlichen Zahlen erfahren.
5. Lektion, verkürzt wegen Notenbesprechung (Einstimmung und Abstimmung. Gibt es unendlich viele Primzahlen?): Heute geht's zum Kern der Sache. Werner fragt bezüglich der Primzahlen: „Was meint ihr, gibt es unendlich viele davon oder hören sie irgendwo auf?" Nach Unruhe und Meinungsdurcheinander folgt eine Abstimmung, die bei zwei Enthaltungen mit 10 : 10 unentschieden endet. Als Hausaufgabe sollen für beide Positionen Argumente gesucht werden.
6. Lektion (Die ersten Argumente. Der Keim des Euklidischen Ansatzes wird erkennbar): Die Ausgangslage ist spannend. Argumente werden mitgebracht, diese können aber die

Gegenseite nicht überzeugen. Nebst allgemeinen Begründungen gibt es ganz konkrete: „Mit 59 sei auch 159 eine Primzahl“ . . . 159 wird aber als Dreierzahl entlarvt. Ein anderer Schüler meint, mit 1001, 10001, 100001, . . . eine Folge gefunden zu haben: „Man müsse nämlich ausschliessen, dass die Zahlen durch 2 und 3 teilbar seien, und das sei ja hier der Fall.“ Zeitaufwändige Rechnung zeigt immer wieder, dass die Ansätze nicht genügen. Langsam dämmert aber die Einsicht, dass auch 5, 7 oder 11 Teiler sein könnten. Immerhin darf Werner am Schluss der Stunde feststellen: „Die Grundidee des Beweises, dass bei den Primzahlen die Teilbarkeit durch alle kleineren Primzahlen ausgeschlossen werden muss, zeichnete sich ab, ... “

7. Lektion („Import“ und eigene Leistung. Die „Lexikonfalle“ und das Sieb des Eratosthenes): Werner wird überrumpelt: Einige Schüler haben im Lexikon gelesen, es gebe unendlich viele Primzahlen. Bernhard bringt dazu eine noch falsch verstandene Begründung in die Runde, die dann aber nach längerer Diskussion zum formelmässigen Vorgehen wie bei Wagenschein führt:

$$\begin{aligned} 2\cdot3\cdot5 + 1 &= 31 \\ 2\cdot3\cdot5\cdot7 + 1 &= 211 \\ 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11 + 1 &= 2311 \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

Werner weicht jetzt vom begonnenen Prozess ab, und liefert den Schülerinnen und Schülern, wie er es sich in der Vorbereitung zurechtgelegt hat, mit dem Sieb des Eratosthenes ein Mittel, um einfach Primzahlen zu finden. Als Regel wird herauskristallisiert, dass auf einem Blatt mit den ersten n natürlichen Zahlen nur Vielfache der Primzahlen $\leq \sqrt{n}$ gestrichen werden müssen. Die Stunde endet mit dem Verteilen einer Tabelle der ersten 2500 Primzahlen.

8. Lektion (Neue Hoffnung und Enttäuschung. Der viel versprechende Ansatz scheitert): Einige Schüler und Schülerinnen haben zuhause die Tabelle angeschaut und waren erstaunt über die Vielfalt und die Unregelmässigkeit der Primzahlen. Deren Dichte nimmt bedeutend langsamer ab als erwartet. Im Chaos der Primzahlen tauchen Zwillinge (11 und 13, 17 und 19, 29 und 31, ...) auf als Faszinosum und ungelöstes Problem. Andere Schüler haben nachgeschaut und die errechneten Zahlen 31, 211 und 2311 als Primzahlen verifiziert. Nach der Wiederaufnahme dieses Gesprächs wird klar, dass für den Nachweis einer Primzahl ausgeschlossen wird, dass sie durch alle kleineren Primzahlen teilbar ist. Und Werner lenkt den Fortgang mit der Frage: „Was wäre gewonnen, wenn die Vermutung stimmt, dass es sich bei allen von Bernhards Zahlen um Primzahlen handelt?“ Es leuchtet ein, dass damit das Nichtabbrechen der Primzahlfolge bewiesen wäre. Die Überprüfung geht weiter mit $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13 + 1 = 30031$. Die Primzahltabelle hört früher auf, also müssen wir die Teilbarkeit bis 173 überprüfen, denn 173 ist die grösste Primzahl kleiner als $\sqrt{30031} = 173.3$. Die Kontrollarbeit wird aufgeteilt, die Enttäuschung ist gross: 30031 ist Produkt von 59 und 509, beides Primzahlen.

9. Lektion eine Woche später (Das Feuer ist nicht erloschen. Die Wiederholung): Es dauert eine Lektion, um den Faden wieder aufzunehmen. Sonst eher schwächere Schüler übernehmen die Hauptlast der Wiederholung, einiges wird ausführlicher besprochen und Missverständnisse ausgeräumt. Die Stunde endet mit der Frage, ob mit den Trümmern noch etwas anzufangen sei.

10. Lektion (Glück im Unglück. Scheitern als Voraussetzung des Erfolgs): Einigen Schülern ist aufgefallen, dass ja *neue* Primfaktoren aufgetaucht sind.
Werner notiert an der Tafel:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 1 &= 7 \text{ PZ} \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 &= 31 \text{ PZ} \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 &= 211 \text{ PZ} \end{aligned}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311 \text{ PZ}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509 \text{ keine PZ}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = ?$$

„Welche Möglichkeiten gibt es denn für die nächste Zahl?“ Die Frage ist fast zu banal, führt aber nach längerem Überlegen zum Durchbruch. Es ist eine Primzahl, oder eine Zahl, die Primfaktoren enthält, die grösser sind als 17. Einige Schüler formulieren die Erkenntnis auf ihre Art. So setzt sich nach und nach die Erkenntnis durch. Das Ganze wird gemeinsam zusammengefasst und zuhause soweit verstanden aufgeschrieben. Mit einer sehr schönen Beweisniederschrift hört der Unterrichtsbericht auf. Ob wohl die verschiedenen Schülerfassungen in einer folgenden Lektion vorgelesen, verglichen und zu einer gemeinsamen Niederschrift optimiert wurden, wie dies Wagenschein eindrücklich beschreibt?

2.3 Struktur des Lehrstücks

Rund zehn Jahre nach der Inszenierung der Primzahlen durch Werner greife ich das Thema wieder auf, um ein Lehrstück für unser 9. Schuljahr am Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld zusammenzustellen. Die Beschreibungen von Wagenschein und Werner werden zusammen mit Prof. Berg in Marburg und in der Berner Lehrkunstwerkstatt V mehrfach diskutiert.

Wagenschein beschreibt einen kompakten Kurs, den er mit einer kleinen Gruppe von Jugendlichen während sechs Stunden vermutlich in einer Woche durchführte. Zu Beginn setzt er die Segel, doch leider dürfen wir nicht erfahren, wie er dies in so kurzer Zeit geschafft hat. Werner ist der Ansicht, dass es vier Stunden Vorbereitung braucht, um die Vorkenntnisse bereitzustellen. Nach meiner Erfahrung liegen die Primzahlen den Jugendlichen recht fern und es braucht einige Zeit, um diese besonderen Zahlen erst im Raum präsent und in den Köpfen lebendig werden zu lassen. In diesem Sinne müssen meines Erachtens die Primzahlen erst ins Blickfeld geholt werden, müssen wir uns bei ihnen einwurzeln. Der Zahlenstrahl reicht nicht aus, um die Kernfrage ins Zentrum zu rücken. Die Abnahme der Primzahldichte ist nicht evident und warum sollen die Primzahlen nicht genau so ins Unendliche gehen wie die Quadrat- oder die Kubikzahlen? Darum denke ich, ist es angezeigt, dass wir uns gemeinsam auf die Suche nach Primzahlen begeben und uns eine Tabelle erarbeiten, wie es von Eratosthenes überliefert ist. Damit folgen wir der Anregung von Wagenschein: „Besser wäre es gewesen, wir hätten sie selber gemacht.“ Damit nehmen wir aber einen grossen Anlauf, wir bauen die vertraute Umgebung erst auf, in der die Kernfrage dann zwingend und herausfordernd entsteht. Wir springen nicht wie dies beim Pythagoras, beim Achilles, beim Barometer, … möglich ist, gleich zu Beginn in lockende Fluten.

Ist erst das Umfeld vertraut, die Kernfrage aufgelodert, dann kann der Findungsprozess in Gang kommen, wie er eindrücklich bei Wagenschein und Werner beschrieben ist. Erstaunlich ist, wie dieser Prozess immer wieder vergleichbar abläuft und fast jedes Mal durch Überraschungen genährt wird. Das Gären zwischen den Unterrichtsstunden, besonders im kompakten Kurs bei Wagenschein, macht diese Unterrichtseinheit auch für die Lehrkraft spannend und ein Stück weit unberechenbar. Bei Werner gefällt mir die vorläufige Meinungsumfrage, die besonders hilfreich ist, wenn sich Befürworter und Gegner des Abbrechens die Waage halten. Eindrücklich ist bei Wagenschein beschrieben wie nach und nach die Einwände und Bedenken schwinden, wie sich die Erkenntnis langsam aber unaufhaltsam durchsetzt. Und doch, erst die Hälfte kann sie auch richtig formulieren. Es folgt in der letzten Stunde die notwendige Optimierungsrunde, die abschliessend vertieft und klärt. Die gemeinsam erarbeitete Formulierung steht ebenbürtig neben derjenigen von Euklid. Sie darf sich dem Vergleich stellen. Ein Hinweis auf die indirekte Argumentationsweise sollte nicht fehlen. Zudem scheint mir zur Abrundung eine kurze Auseinandersetzung mit ein paar herausragenden gelösten und ungelösten Fragen rund um die Primzahlen angebracht. Damit soll erfahrbar werden, „dass die Mathematik selbst ohne Ende ist, indem ein Problem das andere wachruft." Und: „Es macht dem Anfänger grossen Eindruck zu hören, dass Fragen, die – als Fragen – jedes Kind verstehen kann, unlösbar schwierig sein können." (Wagenschein ebd. S. 235)

Für mein Lehrstück ergibt sich die folgende Struktur, die sich im Wechselspiel von Inszenierung und Analyse herauskristallisiert hat:

Ouvertüre: **Der Zahlenstrahl. Besondere Zahlen leuchten auf. Die Primzahlen.**
Am Zahlenstrahl befassen wir uns mit besonderen Zahlen wie gerade Zahlen, Dreierzahlen, Fünferzahlen, Quadratzahlen, Kubikzahlen, Primzahlen. Die einen erscheinen regelmässig, die andern nicht.

I. Akt: **Vertrauter werden mit den Primzahlen. Bei der Suche nach Primzahlen entdecken wir schöne Muster und das Sieb des Eratosthenes.**
Die Unregelmässigkeit der Primzahlen fordert heraus, unsere Zuwendung führt uns schliesslich zur systematischen Bestimmung der Primzahlen bis hin zu einer eindrücklichen bildlichen Darstellung, aus der sich die Kernfrage aufdrängt.

II. Akt: **Die Kernfrage: „Gibt es unendlich viele Primzahlen?" Der lange Weg, das Scheitern und dann der unerwartete Durchbruch zum selbst gefundenen Beweis.**
Die Kernfrage ist gestellt, die Meinungen sind geteilt. Wenn nicht, so denken wir uns eine aussenstehende Person mit gegenteiliger Meinung, die überzeugt werden soll. Das Argumentieren beginnt. Verschiedene Vorschläge für Formeln tauchen auf; alle scheitern. Zwischendurch nehmen Verzweiflung und Resignation überhand. Schliesslich gelingt der unerwartete Durchbruch zur Erkenntnis.

Finale: **Die gemeinsame Formulierung als Höhepunkt und der Vergleich mit dem Beweis bei Euklid und Wagenschein. Ein Essay.**
Der Beweis konkretisiert sich und wird verdichtet in einer gemeinsamen Niederschrift. Jetzt verstehen wir auch die Versionen von Euklid und Wagenschein. Ein Essay rundet das Finale ab.

Nachspiel: **Geheimnisvolles und Besonderes rund um die Primzahlen.**
Einige besondere Hinweise und Aufgaben verweisen auf die rätselhaften Primzahlen und auf bisher ungelöste Probleme.

2.4 Unterrichtsverlauf: 12 Lektionen in der Quarta

Meine 9. Klasse 4A, die ich seit dem Sommer 2002 in Mathematik unterrichte, besteht aus 5 Mädchen und 17 Knaben. Im Grossen und Ganzen herrscht eine wohlwollende, angenehme Lernatmosphäre, so dass ich gerne in dieser Klasse unterrichte. Das Semester haben wir mit dem Lehrstück zum Satz des Pythagoras gestartet. Anschliessend haben wir uns einige Zeit den Zahlen und Mengen gewidmet: Ausgehend von den natürlichen Zahlen sind wir zu den ganzen Zahlen, zu den rationalen und irrationalen Zahlen weiter geschritten und haben auch die komplexen Zahlen erwähnt. Bevor wir uns in die Algebra mit den Bruchtermen begeben, möchte ich mit der Klasse einen Blick auf die Primzahlen werfen mit dem einfachen wie genialen Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wir beginnen das Lehrstück am 31. Oktober und beenden es gute zwei Wochen später nach 12 Lektionen.

Das Lehrstück im zeitlichen Überblick:

Ouvertüre	I. Akt: Die Suche nach Primzahlen	II. Akt: Gibt es unendlich viele Primzahlen?	Finale: Beweis in Briefform	Nachspiel: Besonderheiten der Primzahlen
1/2 Lektion	4 1/2 Lektionen	3 Lektionen	1 Lektion	3 Lektionen

Lektionen 1/2

Ouvertüre:
Der Zahlenstrahl. Besondere Zahlen leuchten auf. Die Primzahlen

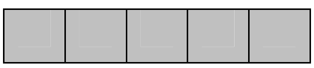
Die Stühle sind in zwei Reihen angeordnet. Auf dem Boden entrolle ich von einer Fadenspule ein Band mit den natürlichen Zahlen quer durch den Raum. Die Schülerinnen und Schüler schauen gespannt zu. Ich bemerke dazu: „Dies sind die natürlichen Zahlen, wir kennen sie ja bereits. Leopold Kronecker, ein deutscher Mathematiker, hat einmal gesagt: ‚Die ganzen Zahlen hat Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.' Beim Zählen tauchen wir ja schon mitten in die natürlichen Zahlen hinein. Wir erinnern uns: Schon vor 2500 Jahren befassten sich die Pythagoräer intensiv mit diesen Zahlen und ihren mystischen Qualitäten. – „Was gibt es denn hier für besondere Zahlen?" Erwähnt werden gerade und ungerade Zahlen, Dreierzahlen – alle kennen die Dreierreihe – Fünferzahlen, Quadratzahlen, Primzahlen, Kubikzahlen . . .

Hier öffnet sich das Feld nach verschiedenen Richtungen: Was sind die Kennzeichen der geraden Zahlen, der Dreierzahlen, der Viererzahlen, der Fünferzahlen, der Neunerzahlen, der Elferzahlen . . . Der Zahlenstrahl lässt sich durchschreiten in Zweier-, Dreier-, Vierer-, Elferschritten. „Das sind aber nur kleinere oder grössere

Wellen innerhalb der Zahlenreihe, die, einmal entstanden, eintönig weiterrollen.“ (Peter 1984, S. 61) Die Schüler rufen sich gegenseitig Teilbarkeitsregeln in Erinnerung. Wo finden wir die Quadratzahlen? Ihre Abstände werden immer grösser. Wir entdecken, dass sie von Abstand zu Abstand um zwei zunehmen, und dies bis in die Unendlichkeit. Und da sind ja noch die Primzahlen. Ist 1 auch eine Primzahl? Diese Primzahlen scheinen sehr unregelmässig verteilt, sie bergen Überraschungen und Geheimnisse. Wir finden Primzahlzwillinge (wie 11, 13 oder 17, 19) und „Primzahldrillinge“ (3, 5, 7). Wie bestimmt man Primzahlen und wie geht es weiter mit ihnen: Bricht ihre Folge ab oder gehen sie ebenfalls bis ins Unendliche wie die geraden Zahlen und die Quadratzahlen? Wenn diese Frage noch nicht hier auftaucht, dann sicher später. Ich bemerke: „In der Mathematik gilt die Zahlentheorie als Königsdisziplin und die Primzahlen bilden das Herzstück darin. Wir können an ihnen viel lernen an mathematischem Entdecken, Denken und Argumentieren. Darum werden wir uns in einem kurzen Lehrstück von etwa einem Dutzend Lektionen mit diesen Primzahlen befassen.“ Die natürlichen Zahlen sind ausgebreitet, mit 1 beginnend und sich ins Unendliche erstreckend. Mit verschiedenen Reihen sind die Primzahlen als Ursprung und Quellen erfasst, als multiplikative Vielfache dieser Urbausteine ergeben sich die zusammengesetzten Zahlen. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen bedingen sich gegenseitig. Erste Strukturen sind im Blickfeld.

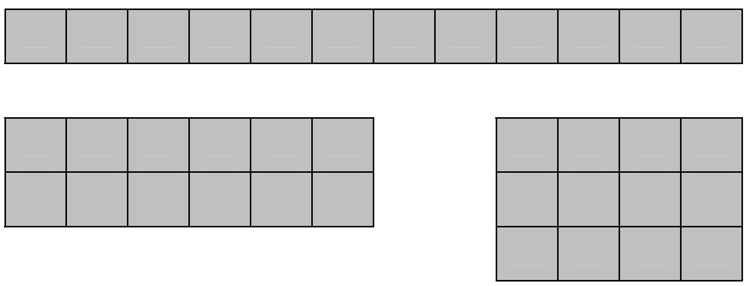
I. Akt: Vertrauter werden mit den Primzahlen. Bei der Suche nach Primzahlen entdecken wir schöne Muster und das Sieb des Eratosthenes.

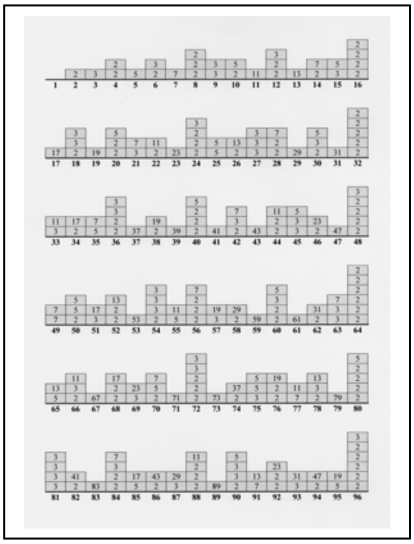
Um mit den Primzahlen etwas vertrauter zu werden, sammeln wir Bekanntes und Vermutungen. Es folgt das Übliche: „Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind.“ – „Primzahlen braucht man beim Bruchrechnen für den grössten gemeinschaftlichen Teiler (g.g.T) und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (k.g.V).“ Michael, einer der interessiertesten und aktivsten Schüler: „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“ Er hat das gelesen, weiss aber nicht, warum das so ist. Thomas: „Ein alter Grieche hat die Primzahlen ausgesiebt.“ Aber auch er weiss nicht mehr darüber zu berichten. Dafür erwähnt er noch die Primzahlzerlegung. – Ich erkundige mich konkret nach der Primzahlzerlegung von 72. „Man teilt durch die kleinste Primzahl 2, also 72 durch 2 ergibt 36, dann wieder durch 2 ergibt 18, dann wieder durch 2 ergibt 9 , solange das geht; dann teilt man durch 3 und erhält so: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$ “ Ebenso zerlegen wir jetzt rascher: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ Die Primzahlen erscheinen hier als multiplikative Bausteine der natürlichen Zahlen. Genauso lässt sich jede andere zusammengesetzte Zahl zerlegen. Erstaunlich ist, dass diese Primfaktorzerlegung eindeutig ist. Dies geht aber nur, wenn wir die 1 von den Primzahlen ausschliessen. Ich definiere deshalb etwas abweichend von der erwähnten Definition die Primzahlen als *natürliche Zahlen mit genau zwei Teilern*. Michael wendet ein, man müsste sagen: „Mit genau zwei verschiedenen Teilern.“ Ich nicke: „Genau so ist es zu verstehen.“ Zur Verdeutlichung der Definition und des Unterschieds zwischen Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen zeichnen wir an der Tafel rechteckige Flächendarstellungen von Zahlen im Quadratgitter.



$5 = 5 \cdot 1$

$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$





Für zusammengesetzte Zahlen gibt es mehr als eine Rechteckdarstellung, für Primzahlen ist sie eindeutig. Bildlich ist diese Unteilbarkeit, diese Individualität der Primzahlen nebenstehend dargestellt! Die Primzahlen genügen sich selbst. Im Gegensatz dazu ist jede zusammengesetzte Zahl das Produkt einiger wohl bestimmter Primbausteine.

Zum vorherigen Beispiel ergänzen wir:
g.g.T(60,72) = 12 und k.g.V(60,72) = 360
Dies ist Grundlage für die nächste kleine Rechnung:

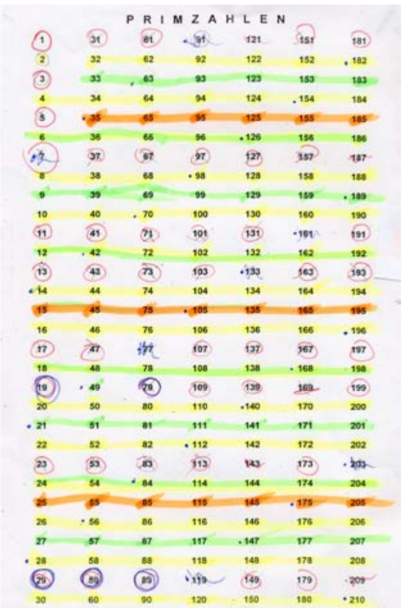
$$\frac{7}{60}+\frac{11}{72}=\frac{42}{360}+\frac{55}{360}=\frac{97}{360}$$ Sind wir damit fertig?

„Wir müssen sehen, ob sich dieser Bruch kürzen lässt." – „Nein", ist die Antwort. Ich frage nach: „Warum nicht?" – „97 geht nicht durch 2 , 3 , 5 , 7 ; 98 geht durch 7." Ich: „Müssen wir da nicht mit dem Überprüfen weiter fahren?" Michael: „Nein, nur bis zur Wurzel dieser Zahl." Ich bin sehr erstaunt über diese Antwort und frage nach. „Mein Vater hat es gesagt." Als ob im Alter von 16 Jahren die Schüler ihrem Vater immer alles glauben würden! Erstaunlich, dass so etwas überhaupt zuhause zwischen Vater und Sohn Thema ist; sicher ein Einzelfall! Nach einer Weile des Nachdenkens erklärt er richtigerweise, dass, wenn wir durch eine Zahl grösser als Wurzel n teilen würden, der zweite Faktor bereits wieder kleiner als Wurzel n herauskäme.
Beispiel: 72 = 3·24 = 4·18 = 6·12 = 8·9 = 9·8 = 12·6 . . .

P R I M Z A H L E N

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104
105	106	107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128
129	130	131	132	133	134	135	136
137	138	139	140	141	142	143	144
145	146	147	148	149	150	151	152
153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168
169	170	171	172	173	174	175	176
177	178	179	180	181	182	183	184
185	186	187	188	189	190	191	192
193	194	195	196	197	198	199	200

Wir begeben uns jetzt auf die Suche von Primzahlen. Jede Schülerin und jeder Schüler bekommt ein Blatt mit den natürlichen Zahlen von eins bis etwa zweihundert. Es sind Blätter mit verschiedener Anordnung der Zahlen: mit 8, 9, 10, 11, 12, 20, 30 Zahlen in einer Spalte oder Zeile. Möglichst systematisch sollen Primzahlen bestimmt werden; ohne Tabelle (Tobias blättert bereits in der gelben Formelsammlung!) und ohne Taschenrechner. Primzahlen sind mit Bleistift zu umrunden. Die Klasse verteilt sich auf die vorbereiteten kleinen Tischgruppen. Es geht zügig voran. In zwei Gruppen wird systematisch abgestrichen, in anderen wird Zahl um Zahl unter die Lupe genommen. Zwischendurch gongt es. Pause? Wir arbeiten weiter mit Aussicht auf frühere Beendigung der zweiten Lektion. Nach ca. 10 Minuten, noch keine Gruppe ist fertig, rufe ich alle in die Runde, um den Zwischenstand auf den Blättern zu präsentieren. Da und dort sind Muster sichtbar. Es wird erkannt, dass wegen der unterschiedlichen Anordnung der Zahlen auf den Blättern auch unterschiedliche Muster erscheinen. Z.B. lassen sich die geraden Zahlen einmal auf vertikalen, einmal auf geneigten, ein andermal auf horizontalen Linien wegstreichen.



Michael ist wieder rasch. Er hat rechts oben die 12; deshalb lassen sich die Vielfachen von 2, 3, 4 und 6 in vertikalen Linien abstreichen. „Von welchen Zahlen müssen wir auch noch die Vielfachen abstreichen?“ Michael: „Bis zur Wurzel von etwa 200.“ Die genaue Zahl wird nicht genannt. Ich lasse dies und baue auf die Erfahrungen, die kommen werden. Ich bitte die Schülerinnen und Schüler weiterzuarbeiten, und Vielfache möglichst mit verschiedenen Farben abzustreichen.

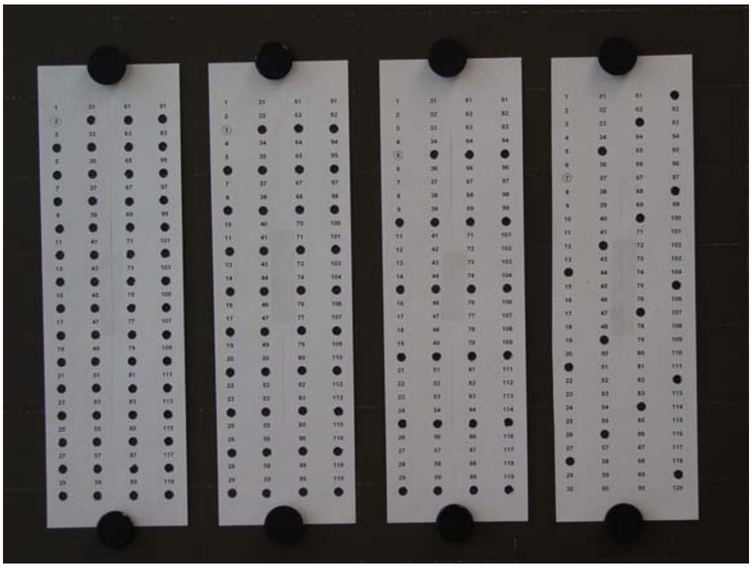
Nach einiger Zeit sind die ersten Schüler fertig. Die Anzahl der Primzahlen wird auf dem Blatt notiert. Unterschiedliche Anzahlen werden festgestellt: 50, 48, 53, 46. Ich werde gefragt, wie viele es seien, weiche aber der Antwort aus. Der Unterschied wird vorerst mit der unterschiedlichen Anzahl natürlicher Zahlen (zwischen 200 und 210 Zahlen) auf den Blättern begründet. Allerdings erweist sich dies nicht als der wahre Grund. Beim Vergleichen werden die Fehler entdeckt und schliesslich stehen 46 Primzahlen auf jedem Blatt. Die ersten 46 Primzahlen von 2 bis 199 und damit der Anfang einer Primzahltabelle sind gefunden! (Nach grosser Lücke folgt die nächste Primzahl erst mit 211!)

Kaum sind mehrere Gruppen fertig, rufe ich die Klasse wieder in den Kreis zusammen. Wir legen die Blätter in die Mitte und vergleichen. Ich erläutere, speziell an Thomas gerichtet: „Mit diesem Abstreichen haben wir das erwähnte Sieb des Eratosthenes vor uns. Dieser Grieche, Eratosthenes von Kyrene, wirkte im 3. Jahrhundert vor Christus (275 – 194 v. Chr.), also etwas nach Euklid, als Geograph, Mathematiker und Vorsteher des Museions in Alexandria.“ *In einer nächsten Inszenierung werde ich an dieser Stelle bereits mein Modell präsentieren, das die Siebeigenschaft des Verfahrens veranschaulicht.* Stattdessen kündige ich jetzt unser grosses Gemeinschaftswerk an: „Unter den ersten gut 2000 natürlichen Zahlen wollen wir alle Primzahlen bestimmen. Welche Blatteinteilung ist wohl am besten geeignet?“ Als erste, vorschnelle Antwort: „Das Blatt mit den 10 Spalten.“ Auf meine konkrete Nachfrage wird die 30er-Einteilung bevorzugt, da dort die 2er-, 3er- und 5er-Zahlen durch horizontale Linien sofort abgestrichen werden können. „Wir werden uns an die 30er-Einteilung halten und uns auf ein gemeinsames Abstreichverfahren einigen, damit am Schluss ein schönes, übersichtliches Gemeinschaftswerk entsteht.“ Um nicht in allzu grosse Zahlen hineinzugeraten, verteile ich von jedem Blatt zwei Exemplare. Da sich auf jedem Blatt $7 \cdot 30 = 210$ Zahlen befinden, erfassen wir so alle Primzahlen kleiner als $11 \cdot 210 = 2310$. Für die ersten Zahlen legen wir die Farben fest. Die Beschreibung der geneigten Linien mit z.B. „eins nach rechts und 2 nach oben“ folgt bald einmal. Wie selbstverständlich kommt also so etwas wie ein Steigungsdreieck ins Spiel. So legen wir bis 31 alles fest. Da die Zeit um ist, bitte ich die Schülerinnen und Schüler auf den nächsten Tag wenigstens die 2er, 3er, 5er und 7er abzustreichen. Morgen kann es weitergehen.

Drei Schülerrückmeldungen zu dieser ersten Doppellektion:
Toni (3, vgl. S. 90): „Es war gut, dass wir langsam ins Thema hineinkamen und mit ganz einfachen Beispielen begannen.“ Manuel (14): „Von mir aus gesehen ein guter Einstieg in die Primzahlen. Weckte bei mir Interesse an den Primzahlen.“ Lisa (12): „Guter Einstieg! Man konnte gerade am Anfang selbständig ausprobieren und seine Ideen testen.“

Bei diesem Einstieg treten die Primzahlen bereits als besondere Zahlen im Meer der natürlichen Zahlen deutlich hervor. Ihre Bedeutsamkeit und Unregelmässigkeit fordern heraus. Die Kernfrage, ob es endlich viele Primzahlen gibt, stellt sich natürlicherweise als Leitfrage.

„Gestern haben wir das Primzahlsieb wieder entdeckt, das vom Griechen Eratosthenes von Kyrene im 3. Jahrhundert vor Christus beschrieben wird. Es dient zum Auffinden von Primzahlen. Damit das Sieb besser zum Ausdruck kommt, habe ich Lochschablonen angefertigt.“



Ich zeige den ersten Zahlenstreifen, auf dem alle geraden Zahlen grösser 2 mit kleinem Instrument weggelocht sind. Auf dem Hellraumprojektor liegt das Blatt mit den ersten 210 natürlichen Zahlen. Die 1 fällt als Primzahl ausser Betracht. Die 2 ist also unsere erste Primzahl und wird eingekreist. Jetzt können wir alle Vielfachen davon aussieben. Ich lege meinen ersten Papierstreifen hin. Sichtbar durch die Löcher sind nur noch die geraden Zahlen ab 4. Diese fallen durch das Sieb. Mit einem Filzstift kann ich diese jetzt markieren und das Papier wieder wegnehmen. Die nächste nicht markierte Zahl ist die 3, sie wird umrahmt als zweite Primzahl. Dann folgt mein nächster Siebstreifen usw. So werden nach und nach die zusammengesetzten Zahlen „ausgesiebt“, übrig bleiben nur noch die Primzahlen. Um die 25 Primzahlen im ersten Hunderter zu bestimmen braucht es nur die vier Siebe bis zum Siebnersieb, die Vielfachen von 11, 13, … sind damit nämlich gemäss unserer Wurzelregel bereits gestrichen!

Jetzt kann ich die Klasse weiter arbeiten lassen. Ein Schüler hat sein Blatt nicht dabei und drei andere gestehen, dass sie bereits Fehler gemacht haben. Also gehe ich rasch weitere Blätter vervielfältigen, um den Prozess in Gang zu bringen. Michael fragt dazwischen, warum bei ihm und bei seinem Nachbarn die siebte Zahl auf dem Blatt eine Siebenerzahl, aber die elfte Zahl keine Elferzahl ist? – Nach kurzem Nachdenken wird es ihm klar. Weil es auf jedem Blatt 210 Zahlen hat, und diese Zahl durch 7 teilbar ist, lassen sich die letzte Zahl von jedem Blatt und damit die siebte Zahl des folgenden Blattes durch 7 teilen. Nicht so aber bei den Elferzahlen. Toni möchte wissen, ob es auf jedem Blatt gleich viele Primzahlen hat. Er vermutet: „Wohl schon, da auf jedem Blatt gleich viele Zahlen stehen.“ Raffael merkt, dass er noch ein Vielfaches von 37 auf seinem Blatt hat, ebenso eines von 41. Wir haben bis dahin ja nur bis zur Reihe der 31er Zahlen abgestrichen. Da er sonst fertig ist, bitte ich ihn und seinen Nachbarn Thomas, herauszufinden, welche andern zusammengesetzten Zahlen ebenfalls noch auf den Blättern abzustreichen seien. Es läutet, aber die Klasse arbeitet weiter, erst nach ein paar Minuten fragt ein Schüler, ob sie Pause machen dürften.

In der folgenden Lektion, der vierten unseres Lehrstücks, vervollständigen Raffael und Thomas die Liste der noch zusätzlich abzustreichenden Zahlen:
$37\cdot43$; $41\cdot41$; $43\cdot43$; $47\cdot47$; $43\cdot47$; $37\cdot43$; $37\cdot41$; $37\cdot37$; $37\cdot59$; $37\cdot53$; $43\cdot53$; $37\cdot61$.
Schade: Die fehlende Systematik verhindert zu sehen, ob dies wirklich alle sind.

Nach und nach werden die Blätter mit Magneten an die Tafel gehängt. Da jedes Blatt zweifach bearbeitet ist, können die Schülerinnen und Schüler jetzt vergleichen. Insbesondere soll auch die Anzahl der Primzahlen auf dem Blatt notiert werden. Mitte Stunde zückt Tobias seine dicke Formelsammlung, in der die Primzahlen tabelliert sind. Einen Ausdruck davon habe ich bereit und hänge ihn an die Tafel. Kopien liegen bereit. Die Tabelle basiert auf ähnlichem Prinzip wie unsere Blätterserie und ist somit leicht verständlich.

Ich lasse noch kurz Zeit für Fragen bezüglich der am Montag stattfindenden Probe über Zahlmengen. Erstaunlicherweise sind kaum Fragen da und so wird an den Blättern weitergearbeitet. Gegen Ende der Stunde sind die meisten Blätter bearbeitet, auch wenn ich nicht sicher bin, dass alle die Problematik mit den zusätzlichen zusammengesetzten Zahlen schon verstanden haben. Zum Abschluss bitte ich die Schülerinnen und Schüler zu notieren, was ich am Vortag an die Tafel geschrieben habe. Michael möchte noch wissen, warum die Teilbarkeitsregel für die 11 funktioniert. Ich vertröste ihn auf das nächste Mal.

Einige Rückmeldungen von Schülerinnen und Schülern zu dieser zweiten Doppellektion:
Fritz (20): „Es ist interessant, solche Geheimnisse' zu entschlüsseln." – Manuel (14): „Mit dem Sieb wurde das Verfahren verbildlicht (tolle Idee)." – Tamina (9): „Die durchlöcherten Papierstreifen fand ich gut, aber das mit dem Abstreichen fand ich mühsam, vielleicht lag es daran, dass ich so hohe Zahlen hatte (2100-2300)." – Marina (5): „Ich habe es komisch gefunden, dass die Primzahlen keine richtige Reihenfolge haben."

Das Abstreichen führt zum Erlebnis, wie einfach und rasch die ersten Primzahlen ermittelt werden können. Für die Blätter mit grossen Zahlen ist es allerdings etwas mühsamer. Auch ist noch lange nicht allen Schülerinnen und Schülern klar geworden, welche Zahlen zusätzlich abgestrichen werden müssen. Das Gemeinschaftswerk nimmt aber gute ästhetische Form an und wird uns als eigenhändig erstellte Primzahltabelle dienen. Zudem zeigt sich jetzt schon, dass es nicht auf jedem Blatt gleich viele Primzahlen hat.

Lektionen 5/6

In den ersten 60 Minuten schreibt die Klasse die angekündigte Probe über die Zahlmengen. Dadurch wird die zweite Mathematiklektion von heute stark verkürzt. Vorerst greife ich Michaels Anliegen, die Teilbarkeit durch 11, nochmals auf. Raffael erinnert sich: „Jede zweite Ziffer zählen wir zusammen. Die beiden Summen müssen übereinstimmen oder um ein Vielfaches von 11 verschieden sein." Zur Verdeutlichung beobachten wir, was bei der Multiplikation mit 11 passiert, wie sich die Anzahl der Einer (E), der Zehner (Z), der Hunderter (H) und der Tausender (T) verändert. Beim Übertrag (letztes Beispiel!) zeigt sich, dass die eine Position um 10 verkleinert, die Nachbarposition davor aber um 1 vergrössert wird, d.h. der Unterschied der Summen wächst um 11 !

Beispiele:

T H Z E	T H Z E	T H Z E
1 3 2 x11	3 2 5 x11	6 2 8 x11
1 3 2	3 2 5	6 2 8
1 4 5 2	**3 5 7 5**	**6 8 10 8** also **6908**
(1 + 5 = 4 + 2)	(3 + 7 = 5 + 5)	(6+0 = 9+8 – 11)

Die Beispiele verdeutlichen die Regel. Dann bitte ich die Schüler, im Taschenrechner eine siebenstellige Zahl einzutippen, mit 11 zu multiplizieren und unsere Regel anzuwenden. *Besser wohl würde man dies schriftlich rechnen lassen!*

Anschliessend folgt dazu eine kleine Zahlenzauberei (vgl. dazu Martin Gardner: Spektrum der Wissenschaft, Nov. 1998). Ich bitte jede Person im Taschenrechner eine dreistellige Zahl einzugeben und die drei Ziffern in der Eingabe zu wiederholen, z.B. 295295. Ich behaupte, diese Zahl sei durch 11 teilbar. Alle bestätigen dies, ausser Michael, der die beiden Zahlen multipliziert hat. Ich behaupte weiter, das Resultat sei durch 13 teilbar, und das neue Resultat durch 7. David stellt als erster fest, dass die ursprüngliche Zahl wieder erscheint. Erstaunlich schnell merken einige, dass dahinter die Zahl 1001 = 7 x 11 x 13 steckt. Tobias meint, man könnte es auch mit einer fünfstelligen Zahl probieren, das Resultat wäre durch 11 teilbar. Er verallgemeinert sogar, es könnte eine beliebige Zahl mit ungerader Anzahl von Stellen sein und begründet richtig! Die Teilbarkeit durch 7 und 13 ginge allerdings verloren! Erfreulich, wie da mathematisch weitergedacht wird!

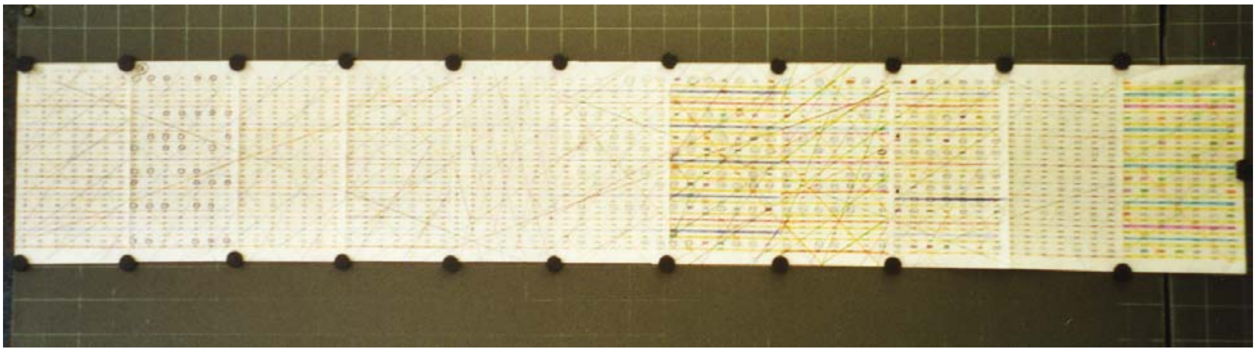
In der sechsten Lektion unseres Lehrstücks hängen wieder unsere Primzahlblätter an der Tafel und darunter die Anzahl der Primzahlen jedes Blattes:

46 35 33 32 30 29 27 31 27 27 26

Raffael P. und Thomas hatten das letzte Mal bereits diejenigen Zahlen an der Tafel notiert, die noch zusätzlich abgestrichen werden müssen. Um Übersicht zu schaffen lasse ich diese Zahlen in einer Tabelle an der Tafel notieren und so wird klar, warum genau diese Zahlen noch abgestrichen werden müssen. Zudem zeigt es sich, dass den beiden das letzte Mal eine der Zahlen entgangen war.

	37	41	43	47	53	59	61
37	1369	1517	1591	1739	1961	2183	2257
41		1681	1763	1927	2173	(2419)	
43			1849	2021	2279	(2537)	
47				2209	(2491)		

Damit haben wir alle 501 Primzahlen kleiner als 2310 bestimmt. Das farbige Gemeinschaftswerk hängt vor uns, eine leuchtende Darstellung des Siebs von Eratosthenes.

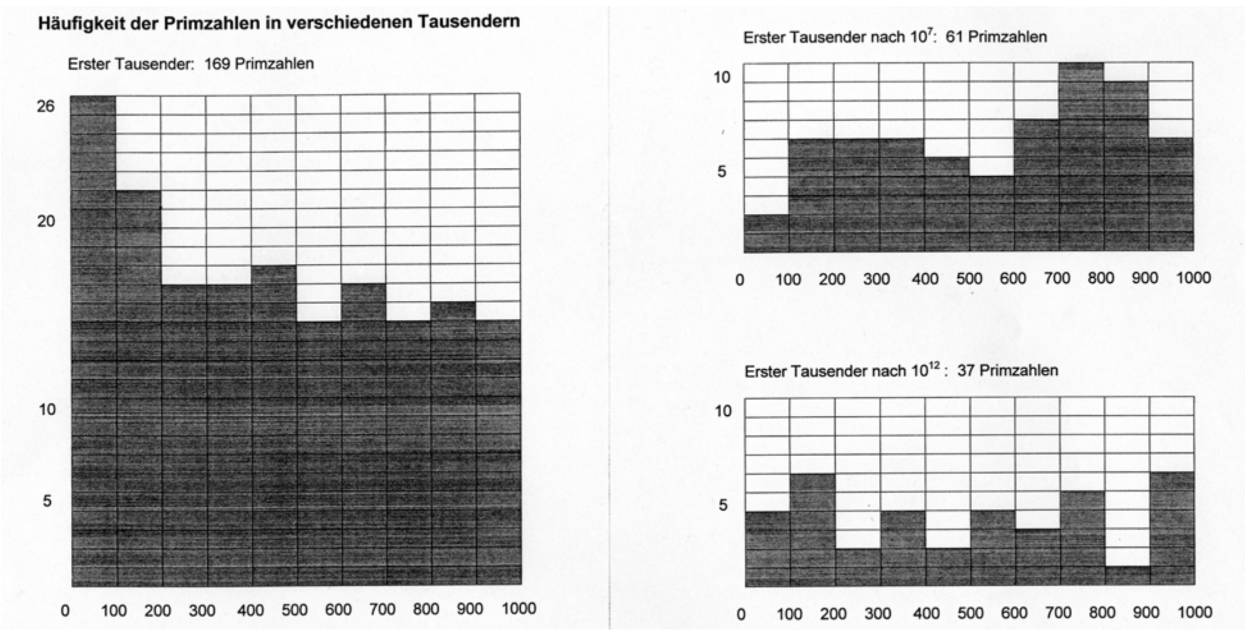


Rückmeldungen aus der Schülerschaft: Alissa (10): „Ist auch spannend, was man alles mit Zahlen anstellen kann. Auch, dass diese Regel wirklich funktioniert. Faszinierend!“ Marino (6): „Ein verblüffender Zahlentrick, gibt Ansporn zum selber Ausprobieren.“ Die Teilbarkeitsregel und die Zahlenspielerei regen offenbar zum Weiterdenken und Experimentieren an. Was kann uns besseres passieren?

II. Akt: Die Kernfrage „Wie viele Primzahlen gibt es?“ Der lange Weg, das Scheitern und dann der unerwartete Durchbruch zum selbst gefundenen Beweis.

Ich zeige auf unser Gemeinschaftswerk an der Tafel. „Jeder Primzahl entspringt ein Strahl, wie ein Laserstrahl, und durchleuchtet den Rest des ganzen Zahlenraumes. . . .   Und wie geht das weiter mit diesen Lichtquellen, mit den Primzahlen?“ Tobias: „Die Primzahlen nehmen immer ab! Sie werden immer seltener.“ Michael kritisch: „Warum so unregelmässig, dazwischen haben wir wieder ein Blatt mit mehr Primzahlen als vorher, 31 gegenüber 27.“ Marino: „Das hört einmal auf.“ Ich mache eine kurze Umfrage: 15 glauben, dass die Primzahlen nicht aufhören; einer denkt, dass sie aufhören, ein paar Enthaltungen. Einige davon neigen eher zur Endlichkeitsaussage. Michael will wissen, auf welcher Seite ich stehe. Im Moment äussere ich mich nicht dazu. Thomas: „Die Zwischenräume werden immer grösser. Also muss es unendlich viele Primzahlen geben.“ Eine interessante Begründung! Michael schmunzelnd: „Von Unendlich kennen wir die Wurzel nicht, also muss es unendlich viele Primzahlen geben.“ Sämi: „Vielleicht hat es unendlich viele Primzahlen, aber wir wissen es nicht, können es nicht beweisen.“ Noch jemand hakt nach: „Wir können es nicht wissen.“ Bemerkenswert diese Antwort: Es gibt also Schüler, die glauben, gewisse mathematische Dinge könnten wir nicht wissen. Wie modern das für einen Mathematiker tönt!

Ich zeige eine graphische Darstellung mit Angaben über die Abnahme der Primzahlen. Es gibt
im ersten Tausender insgesamt 169 Primzahlen,
pro Hunderter 14 bis 26 Primzahlen,
im ersten Tausender nach einer Million 62 Primzahlen,
pro Hunderter noch 2 bis 10 Primzahlen,
im ersten Tausender nach einer Billion 37 Primzahlen,
pro Hunderter noch 1 bis 7 Primzahlen.



Die Primzahlen werden also immer seltener. Aber ob sie wirklich aufhören? Ob es eine letzte Primzahl gibt? Ich versuche Mut zu machen: „Wir können es herausfinden, wir können sogar beweisen, wie es sich verhält. Schon vor 2300 Jahren hat ein Grieche dazu einen Beweis geliefert.“

Fritz liefert den ersten guten Ansatz: „Wir sollten überlegen, was wir abstreichen können: alle geraden Zahlen, alle Dreierzahlen, . . .“ Ich: „Können wir konkreter werden?“ Fritz: „Wir können Vielfache ausschliessen: $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 7 = 14$, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$“ Ich denke: „Dieser Ansatz mit dem Ausschliessen wird uns noch weiterhelfen.“ Ich beobachte, wie Marina und Manuel, zwei die im Mathematikunterricht eher am Rande stehen, zusammen diskutieren. Sie glauben, dass es zwischen den Strahlen immer wieder Löcher hat, können es aber nicht begründen. Ich versuche zu verunsichern: „Aber nach 1000 Primzahlen hat es durch jedes folgende Blatt mindestens 1000 Strahlen. Und da soll noch etwas übrig bleiben?“

Das Problem ist lanciert. Michael kündigt bereits an, dass er der Sache nachgehen will. Ich muss nächstes Mal auf alles gefasst sein. In der École d’Humanité diskutieren und grübeln die Schülerinnen und Schüler abends und in der Nacht weiter, hier ist es eher so, dass sie auf dem Internet nach Unterstützung suchen. Oder wird Michael den Vater befragen? Ich bin sehr froh, dass es an dieser Stelle einen Unterbruch gibt. Erste Ansätze und viel Verunsicherung sind vorhanden; in der Zwischenzeit kann das Problem gären. Natürlich muss ich damit rechnen, dass in der nächsten Stunde ein neuer Lösungsansatz daherkommt. Dass jemand den Beweis in seiner ganzen Klarheit mitbringt, ist mir in meinen bisherigen sechs Durchführungen nicht passiert.

Lektionen 7/8

Unser Gemeinschaftswerk präsentiert sich vor uns an der Tafel. Es gilt den Faden vom Montag wieder aufzunehmen, und festzustellen, wo die einzelnen und die ganze Klasse in der Beschäftigung mit den Primzahlen stehen. Dabei erhalten wir eine Standortbestimmung als neue Plattform. Von da soll sich der Prozess wieder neu in Gang setzten. "Wir haben das Sieb des Eratosthenes entdeckt, mit geraden Linien die Vielfachen der Primzahlen durchgestrichen. Es hat immer mehr Linien wie Laserstrahlen gegeben, die den Zahlenraum bis ins Unendliche durchleuchten und die zusammengesetzten Zahlen streichen. Die Frage ist aufgetaucht, ob es da in der Ferne des Zahlenraumes überhaupt ungestrichene Zahlen, also Primzahlen gibt. Oder anders gefragt: Geht die Primzahlfolge immer weiter oder finden die Primzahlen irgendwo ein Ende?“

Jan kommt zu spät und übernimmt pflichtschuldig das Protokollieren des Dialogs. Wir nehmen den Faden wieder auf: "Was haben wir bisher über die Primzahlen herausgefunden; wo stehen wir jetzt?" Marina: "Die Menge der Primzahlen nimmt stetig ab, desto höher die Zahlen werden." – „Was heisst das?“ – Marina: „Die Anzahl der Primzahlen pro Blatt nimmt ab.“ Ich entgegne: „Wir haben Gegenbeispiele.“ Daniel: „Wenn man zwei Primzahlen multipliziert und 1 addiert, gibt es wieder eine Primzahl, habe ich einmal gehört.“ Da kommt also doch der richtige Ansatz, allerdings für mich von unerwarteter Seite. Daniel und Thomas haben bereits Beispiele gerechnet.

$$2 \cdot 3 + 1 = 7 \qquad 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$$

Der Unterbruch hat also Früchte getragen. Ähnliche Sprünge sind irgendwann reif und kommen bei allen bisherigen Inszenierungen, auch bei Wagenschein (S. 232) und Werner (S. 169f) vor. Die Furcht vor einem allzu „schnellen Weg“, wie Werner meint, erachte ich als unbegründet. Ich will dem Vorschlag freien Lauf lassen und bin neugierig auf den folgenden Prozess. Fragend schaue ich in die Runde. Werden diese Ausführungen verstanden? Ja, der Schritt lag im Bereich des Erreichbaren, sozusagen in der Luft.

Marina: „Die + 1 braucht es, um die Zahl nicht durch 2 , 3 , 5 teilbar zu machen. Es bleibt immer ein gewisser Rest.“ Auf meine Nachfrage ergänzt sie: „Es bleibt immer Rest 1.“
Raphael P. bringt bereits die nächste Zahl: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$
Michael schaut in der Formelsammlung, er hätte auch an der Tafel Bestätigung gefunden, dass dies eine Primzahl ist. Die Beispiele habe ich an der Tafel notiert und warte gespannt auf die Fortsetzung, die auch prompt folgt. Auch die 2311 stellt sich gemäss Tabelle als Primzahl heraus.

$2 \cdot 3 + 1$	=	7	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$	=	31	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$	=	211	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$	=	2311	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$	=	30031	???

Für die Zahl 30031 reicht die Tabelle nicht. Wie können wir überprüfen. Raphael sagt, wir müssten teilen durch die Primzahlen bis 173, gemäss unserer Wurzelregel. (Die Wurzel aus 30031 beträgt 173.29, also ist 173 die grösste Primzahl, deren Quadrat höchstens 30031 beträgt.)

Für die Überprüfung verteile ich der Reihe nach die verschiedenen Zehnerabschnitte an die Schülerinnen und Schüler. Mehrere Schüler kommen an die Tafel, um ihre Primzahlen zu finden. Ein Blick auf das am Anfang ausgefüllte Blatt hätte allerdings genügt! Bald melden sich die ersten, die Zahl sei nicht teilbar. Ausgerechnet Daniel, der diese Idee ins Spiel gebracht hat, ist durcheinander geraten. Er geht an die Tafel, spricht etwas von 59 und Primzahl, geht wieder an den Platz, tippt wieder ein, rechnet ... Eine Welt bricht ihm zusammen. Daniel verkündet aufgeregt: „Es ist keine Primzahl; 30031 ist durch 59 teilbar.“ In gespannter Erwartung ergänze ich das Ergebnis an der Tafel und frage: „Was bedeutet dies jetzt?“

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = \underline{59 \cdot 509\ !}$$

Fritz: „Dies widerlegt die Behauptung von Michael, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.“ Zum Glück versucht David seine gehörte Idee, von der er so überzeugt war, zu retten: „Vielleicht gibt $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1$ wieder eine Primzahl.“ Thomas: „Vielleicht geht es nur bei einer bestimmten Anzahl von Primzahlen zusammengerechnet.“ Joël vermutet, dass sich irgendetwas wiederholt hat. – Aber was?

Fritz bringt eine sehr logische Idee: Wir nehmen in unsere Reihe immer die neu erzeugte Primzahl und erhalten:

$2 \cdot 3 + 1$	=	7	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 7 + 1$	=	43	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1$	=		usw.

Raphael P.: „Wir könnten es ja mit -1 probieren.“ Ich notiere beide Anfänge an die Tafel und bitte die Schüler fortzusetzen und zu probieren.

$2 \cdot 3 + 1$	=	7 PZ	$2 \cdot 3 - 1$	=	5 PZ	
$2 \cdot 3 \cdot 7 + 1$	=	43 PZ	$2 \cdot 3 \cdot 5 - 1$	=	29 PZ	
$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1$	=	1807 PZ ??	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1$	=	209	= $11 \cdot 19$!!!

Die Fülle der Vorschläge überrascht mich. Es ist auch für mich spannend, da ich nicht alle Ansätze durchgerechnet habe. Umso erleichterter bin ich, dass all diese Ansätze auf die gleiche Art früh scheitern. ($1807 = 13 \cdot 139$)

Primzahlen und Faktoren

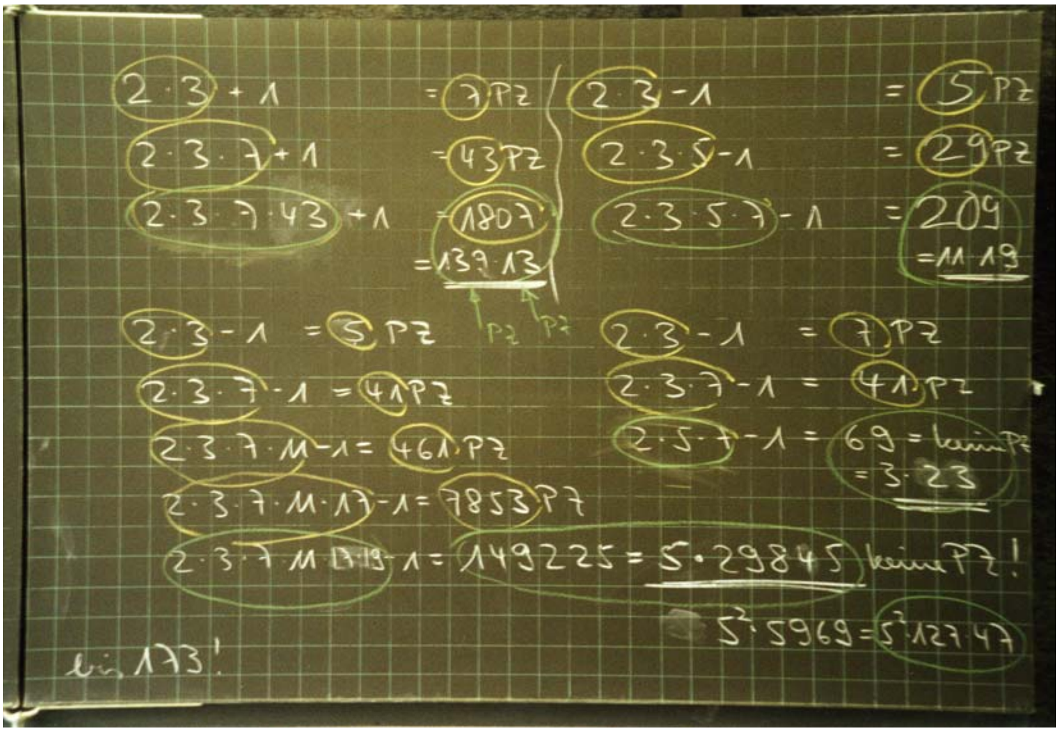
1 … 1529

n	n+1	n+7	n+11	n+13	n+17	n+19	n+23	n+29
0	1	7	11	13	17	19	23	29
30	31	37	41	43	47	7*7	53	59
60	61	67	71	73	11*7	79	83	89
90	13*7	97	101	103	107	109	113	17*7
120	11*11	127	131	19*7	137	139	13*11	149
150	151	157	23*7	163	167	13*13	173	179
180	181	17*11	191	193	197	199	29*7	19*11
210	211	31*7	17*13	223	227	229	233	239
240	241	19*13	251	23*11	257	37*7	263	269
270	271	277	281	283	41*7	17*17	293	23*13
300	43*7	307	311	313	317	29*11	19*17	47*7
330	331	337	31*11	49*7	347	349	353	359
360	19*19	367	53*7	373	29*13	379	383	389
390	23*17	397	401	31*13	37*11	409	59*7	419
420	421	61*7	431	433	23*19	439	443	449
450	41*11	457	461	463	467	67*7	43*11	479
480	37*13	487	491	29*17	71*7	499	503	509
510	73*7	47*11	521	523	31*17	23*23	41*13	77*7
540	541	547	29*19	79*7	557	43*13	563	569
570	571	577	83*7	53*11	587	31*19	593	599
600	601	607	47*13	613	617	619	89*7	37*17
630	631	91*7	641	643	647	59*11	653	659
660	661	29*23	61*11	673	677	97*7	683	53*13
690	691	41*17	701	37*19	101*7	709	31*23	719
720	103*7	727	43*17	733	67*11	739	743	107*7
750	751	757	761	109*7	59*13	769	773	41*19
780	71*11	787	113*7	61*13	797	47*17	73*11	809
810	811	43*19	821	823	827	829	119*7	839
840	29*29	121*7	37*23	853	857	859	863	79*11
870	67*13	877	881	883	887	127*7	47*19	31*29
900	53*17	907	911	83*11	131*7	919	71*13	929
930	133*7	937	941	41*23	947	73*13	953	137*7
960	31*31	967	971	139*7	977	89*11	983	43*23
990	991	997	143*7	59*17	53*19	1009	1013	1019
1020	1021	79*13	1031	1033	61*17	1039	149*7	1049
1050	1051	151*7	1061	1063	97*11	1069	37*29	83*13
1080	47*23	1087	1091	1093	1097	157*7	1103	1109
1110	101*11	1117	59*19	1123	161*7	1129	103*11	67*17
1140	163*7	37*31	1151	1153	89*13	61*19	1163	167*7
1170	1171	107*11	1181	169*7	1187	41*29	1193	109*11
1200	1201	71*17	173*7	1213	1217	53*23	1223	1229
1230	1231	1237	73*17	113*11	43*29	1249	179*7	1259
1260	97*13	181*7	41*31	67*19	1277	1279	1283	1289
1290	1291	1297	1301	1303	1307	187*7	101*13	1319
1320	1321	1327	121*11	43*31	191*7	103*13	79*17	71*19
1350	193*7	59*23	1361	47*29	1367	37*37	1373	197*7
1380	1381	73*19	107*13	199*7	127*11	1399	61*23	1409
1410	83*17	109*13	203*7	1423	1427	1429	1433	1439
1440	131*11	1447	1451	1453	47*31	1459	209*7	113*13
1470	1471	211*7	1481	1483	1487	1489	1493	1499
1500	79*19	137*11	1511	89*17	41*37	217*7	1523	139*11

$1463 = 1440 + 23 = 209 \cdot 7$

Der zweite Faktor ist jeweils der kleinste Primteiler.

Thomas: „Wir sollten nicht die gleiche Folge der Primzahlen nehmen, sondern ein bisschen vertauschen.“ Michael stellt eine neue Theorie auf: „Immer nach zwei Primzahlen eine auslassen.“ Auch hier wird die Serie notiert (im nächsten Bild unten links) und der Versuch scheitert! Längere Zeit sitzen wir vor dem Scherbenhaufen.



Da ich merke, dass einige Schülerinnen und Schüler ins Wanken kommen und aufgeben wollen, frage ich erneut: „Wer denkt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt?“ Etwa zwei Drittel der Klasse meldet sich. Fünf neigen zur Ansicht, dass es nur endlich viele PZ gibt. Vorgängig hätte ich wohl fragen sollen: „Wer denkt, dass wir überhaupt herausfinden können, ob es unendlich viele Primzahlen gibt oder nicht?“ Sicher waren einige überzeugt, dass wir es nie herausfinden würden. Umso wuchtiger könnte die Fortsetzung folgen. Der Gong bringt einen willkommenen Unterbruch in die festgefahrene Situation.

Nach der Pause erinnere ich an unser ursprüngliches Anliegen. „Wir wollten zeigen, dass es immer wieder Primzahlen gibt? Und was ist passiert? Wir sind immer wieder „gescheitert“; wir fanden immer wieder zusammengesetzte Zahlen! Und doch, wir sind der Lösung nah!“ Um das Erreichte optisch zu verdeutlichen, umrahme ich gelb die gebildeten Produkte und die neu gewonnen Primzahlen, grün die letzten Zeilen in denen wir "gescheitert" sind. Eine Weile herrscht nachdenkliche Stille. Alex: „Nachdem es einmal bei einer Zahlenfolge nicht geht, könnte es bei der nächsten Zahl wieder weitergehen. Die erhaltenen Zahlen sind aus zwei Primzahlen zusammengesetzt.“ Ich versuche etwas Uferhilfe zu geben: „Und was lässt sich über diese Primzahlen sagen?“ Nach und nach dämmert es, dass diese Teiler ja keine der bisherigen Primzahlen sind, also *neue* Primzahlen sein müssen. Tobias formuliert als erster: „Und jetzt haben wir ja wieder eine Primzahl, also gibt es unendlich viele Primzahlen.“ Die Erkenntnis ist da. Einige nicken. Aber ist das wirklich allen klar?

Ich erteile den folgenden Auftrag: „Jemand sagt, er hätte in einem Sack alle endlich vielen Primzahlen. Verfasst ihm in Dreier- bis Vierergruppen eine schriftliche Antwort. (Zeit: 10 Minuten) Eine Gruppe ist sehr rasch fertig, andere haben noch kaum realisiert, was sie tun sollten. Nach rund 10 Minuten werden die Resultate gesammelt und ich lese sie vor:

"Du bist ein grosser Lügner, denn es gibt unendlich viele Primzahlen und es lassen sich immer neue finden!!"

"Wenn man die zwei kleinsten Primzahlen miteinander multipliziert und dazu 1 addiert, erhält man eine neue Primzahl. Multipliziert man die mit der vorherigen Multiplikation und addiert die mit 1, erhält man eine neue Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl, die in neue Primzahlen zerlegt werden kann."

"Alle Primzahlen im Sack miteinander multiplizieren und mit 1 addieren, es gibt entweder eine neue Primzahl oder man kann es so zerlegen, dass es zwei neue Primzahl gibt."

Wir haben vielleicht eine Theorie

$2\cdot3 - 1$	=	5	PZ
$2\cdot3\cdot5 - 1$	=	29	PZ
$2\cdot3\cdot5\cdot7 + 1$	=	211	PZ
$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11 + 1$	=	2311	PZ
$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13 - 1$	=	30029	PZ ???

"Wir multiplizieren alle Primzahlen im Sack miteinander und addieren 1. Es entsteht entweder eine neue Primzahl oder zwei neue Teiler, die auch Primzahlen sind. Die neuen Primzahlen setzt man wieder in die Reihe der Multiplikation. Somit sind die Primzahlen unendlich."

"Es gibt unendlich viele Primzahlen. Man kann sie immer wieder in eine neue Primzahl zerlegen. $30031 = 59\cdot509$ beides Primzahlen "

Diese Antworten sind natürlich noch nicht ausgereift, aber die Grundideen sind vorhanden. Da für weitere Diskussion keine Zeit bleibt, verspreche ich, alle Briefe auf ein Blatt zu kopieren und erteile den folgenden
Auftrag auf den kommenden Montag: Paul behauptet: "Es gibt nur endlich viele Primzahlen." Schreibe Peter einen ausführlichen Brief, in dem du darlegst, warum seine Behauptung nicht zutrifft.

Als Grundlage erhalten die Schülerinnen und Schüler am Nachmittag das versprochene Blatt mit allen bisherigen Sätzen. Die verbleibenden zehn Minuten brauche ich, um die korrigierten Proben zurückzugeben und einige Schwierigkeiten daraus zu besprechen.

Die Rückmeldungen auf diese Doppelstunde fallen sehr unterschiedlich aus. Während einige das Suchen und Scheitern interessant finden, ist die Verunsicherung für andere zu viel, führt bei ihnen zu einem schwer auszuhaltenden Durcheinander, zu einem „Gestürm“. AAA (2): „Ich fand es gut, dass wir so viele Beispiele an der Tafel gemacht haben. So kam jeder für sich langsam der Lösung näher.“ Michael (1) ungeduldig: „War zu lang, um konzentriert dabei zu sein. Nach Daniels Beitrag abbrechen und zeigen wie weiter.“ Marino (6): „Trotz den ‚Rückschlägen’ war man motiviert, immer wieder Neues zu testen, dass alle andern es auch noch nicht sofort hatten und am Testen waren, gab einem Motivation, gemeinsam zu suchen.“ Manuel (14): „Und wieder waren die ersten Formulierungen der Knackpunkt der folgenden Lektionen. Die Lektionen wurden immer mehr zu einem „Gestürm“.

Finale: Der Brief als Höhepunkt und der Vergleich zum Beweis bei Euklid und Wagenschein. Ein Essay.

Nur wenige der Schülerinnen und Schüler haben ihre Aufgabe schriftlich vorliegen, einige erläutern mündlich den Inhalt des zu schreibenden Briefes. Aus den Mitteilungen entnehme ich aber, dass die Idee des Beweises vielen klar geworden ist und so wage ich es, eine gemeinsam optimierte Fassung anzugehen. Wir tragen Satz für Satz zusammen:

Lieber Paul
Deine Behauptung stimmt nicht. Es gibt unendlich viele Primzahlen. Wenn wir alle deine endlich vielen Primzahlen der Reihe nach multiplizieren und eins addieren, dann erhalten wir eine neue Primzahl oder eine Zahl, die in neue Primzahlen zerlegt werden kann. Jetzt hat sich deine endliche Menge um mindestens eine Primzahl vergrössert. Und nun kannst du diesen Vorgang beliebig oft wiederholen. Somit ist bewiesen, dass es nicht nur endlich viele Primzahlen gibt.
Mit freundlichen Grüssen
Klasse 4A

Mit dieser Version bin ich jetzt sehr zufrieden. Dank der gemeinsamen Formulierung ist wesentlich mehr Klarheit erreicht worden. Das Briefeschreiben hat bei einigen bewirkt, was Tamina explizite beschreibt: „Den Brief fand ich gut. Denn endlich wurde das „Gestürm“ in meinem Kopf (von den letzten Lektionen) ein wenig ‚geordnet'.“

Jetzt ist der Moment, um auf die grundlegende Struktur dieses Beweises hinzuweisen: „Man will zeigen, dass die Folge der Primzahlen nicht abbricht. Um dies zu beweisen, nimmt man vorerst das Gegenteil an, die Folge der Primzahlen breche ab, d. h. es gebe eine endliche Menge von Primzahlen. Bildlich gefasst haben wir diese Annahme mit dem Sack, in dem alle endlich vielen Primzahlen zusammengefasst sind. Dann haben wir logisch gezeigt, dass es ausserhalb dieses Sackes mindestens noch eine weitere Primzahl gibt, dass also dieser Sack gar nicht alle Primzahlen enthält. Damit ist unsere gegenteilige Annahme, nämlich dass es nur eine endliche Menge von Primzahlen gibt, widerlegt. Da es aber nur entweder eine endliche Anzahl Primzahlen gibt oder eben nicht (eine dritte Möglichkeit kennen wir nicht), dürfen wir folgern, dass es eben mehr als diese endliche Anzahl von Primzahlen geben muss. – Diese Art von Beweis nennen wir einen *Beweis durch Widerspruch* oder einen *indirekten Beweis*. In der Mathematik ist es oft einfacher, einen Beweis indirekt als direkt zu führen. Wir werden später weitere Beweise dieser Art kennen lernen. Auch im Rechtswesen ist es üblich, indirekt zu schliessen, dass jemand unschuldig ist: Wenn U der Täter ist, dann muss er um 19.30h am Tatort gewesen sein. Da er zu diesem Zeitpunkt aber nachweislich noch im Büro sass, befand er sich zum fraglichen Zeitpunkt nicht am Tatort und kann somit nicht der Täter sein. Also ist U unschuldig.“ Gemeinsam tragen wir das Grundprinzip dieser Beweisart zusammen:

Zu beweisen ist Aussage A
Wir nehmen an, Aussage A sei falsch, also das Gegenteil von Aussage A sei wahr.
Wir zeigen, dass diese gegenteilige Annahme auf einen Widerspruch führt.
Da Aussage A nur entweder wahr oder falsch sein kann,
schliessen wir, dass Aussage A wahr sein muss.

Zum Vergleich und zur Vertiefung verteile ich ein Blatt mit dem Beweis aus Euklids „Elementen“ (Euklid 1997, S. 204f) in Euklidscher und in modernerer Fassung sowie dem Beweis aus Wagenscheins Unterrichtsdurchgang an der École d’Humanité (Wagenschein 1980, S. 234f). Die Schülerinnen und Schüler studieren diese Sätze, können sie auf Anhieb gut verstehen und sind stolz, dass sie den Beweis selbst herausgefunden haben.

Euklid: Die Elemente.

Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Harri Deutsch Verlag.

§ 20 (L. 18).

Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

Die vorgelegten Primzahlen seien *a*, *b*, *c*. Ich behaupte, daß es mehr Primzahlen gibt als *a*, *b*, *c*.

a - - -   *b* - - - - -   *c* - - - - - - -

E - - 105 - *D* - - *F*   *g* - -

Man bilde die kleinste von *a*, *b*, *c* gemessene Zahl (VII, 36); sie sei *D E*, und man füge zu *D E* die Einheit *D F* hinzu. Entweder ist *E F* dann eine Primzahl, oder nicht. Zunächst sei es eine Primzahl. Dann hat man mehr Primzahlen als *a*, *b*, *c* gefunden, nämlich *a*, *b*, *c*, *E F*.

Zweitens sei *E F* keine Primzahl. Dann muß es von irgendeiner Primzahl gemessen werden (VII, 31); es werde von der Primzahl *g* gemessen. Ich behaupte, daß *g* mit keiner der Zahlen *a*, *b*, *c* zusammenfällt. Wenn möglich tue es dies nämlich. *a*, *b*, *c* messen nun *D E*; auch *g* müßte dann *D E* messen. Es mißt aber auch *E F*. *g* müßte also auch den Rest, die Einheit *D F* messen, während es eine Zahl ist; dies wäre Unsinn. Also fällt *g* mit keiner der Zahlen *a*, *b*, *c* zusammen; und es ist Primzahl nach Voraussetzung. Man hat also mehr Primzahlen als die vorgelegte Anzahl *a*, *b*, *c* gefunden, nämlich *a*, *b*, *c*, *g* — q. e. d.

Euklid beweist: „*Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.*“
Bekanntlich ist eine Primzahl eine natürliche Zahl mit genau zwei Teilern. Jede zusammengesetzte natürliche Zahl lässt sich (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Primzahlen zerlegen. Den *Widerspruchsbeweis*, den Euklid (um 325 v. Chr.) führt, können wir übertragen und abgekürzt wie folgt darstellen:
Nehmen wir an, dass es nur endlich viele, sagen wir n Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gibt, dann ist die Zahl $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ grösser als alle diese Primzahlen und wird von keiner dieser Primzahlen geteilt. Entweder ist diese Zahl selbst eine neue Primzahl oder sie ist zerlegbar in Primfaktoren, welche bisher noch nicht vorkamen. In beiden Fällen gibt es mehr als n Primzahlen. Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme, dass es nur n Primzahlen gibt. Nehmen wir die neue Primzahl in unsere Primzahlsammlung auf und fahren wir in derselben Weise fort, so sehen wir, dass die Folge der Primzahlen niemals abbricht.

Martin Wagenschein formuliert zusammen mit den Schülerinnen und Schülern folgendermassen (Wagenschein 1980, S. 234f):

Ein Satz über Primzahlen

1. *Frage*

Jede natürliche Zahl ist in Primfaktoren zerlegbar. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Solche Zahlen, die durch keine andere natürliche Zahl außer 1 und sich selbst teilbar sind, heißen *Primzahlen.*
Man weiß, daß die Primzahlen mit ansteigender Zahlengröße im großen und ganzen immer seltener werden.
Also entsteht die Frage: Gibt es eine letzte Primzahl?

2. *Vorbemerkungen*

a) Das Vielfache von irgendeiner Zahl, um eins vermehrt, ist nicht mehr durch diese Zahl teilbar. 4 mal 3 ist 12, also ist 13 nicht mehr durch 3 teilbar.
b) $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ist teilbar sowohl durch a, wie durch b, wie durch c, wie durch d.
$a \cdot b \cdot c \cdot d + 1$ ist also durch keine dieser Zahlen teilbar (durch andere vielleicht).

3. *Der eigentliche Beweis*

p sei die letzte Primzahl, die wir kennen.
Wir multiplizieren alle Primzahlen bis p miteinander und addieren 1 dazu. Das Ergebnis

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots p + 1$$

ist dann unteilbar durch alle diese Primzahlen.
Es gibt nun *zwei Möglichkeiten:*
Entweder ist N selbst eine Primzahl, und zwar (natürlich immer) eine größere als p (z.B. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$).

Oder N ist eine *teilbare* Zahl. Dann muß sie Primfaktoren haben, die höher sind als p (z.B.: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$).

In jedem dieser beiden Fälle taucht eine neue Primzahl auf, die *größer* ist als p. Im ersten Fall N (211), im zweiten Fall mindestens zwei Primzahlen zwischen p und N (59 und 509, zwischen 13 und 30031). Da das Verfahren fortgesetzt werden kann, indem man die *neue* größte Primzahl 211 bzw. 509 statt p setzt:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots 211 + 1$$
$$\text{bzw. } 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots 509 + 1$$

kann man immer größere Primzahlen bilden.

Zum Abschluss der Stunde lese ich meinen Primzahl-Essay vor:
„Ich sitze vor dem ausgefüllten farbigen Zahlentableau und betrachte die umringten Primzahlen, welche farbige Strahlen in die Weite des Zahlenraumes senden. Bei längerem Hinsehen verfalle ich mehr und mehr in einen Tagtraum - will sagen Nachttraum. Bei Dämmerung liege ich hoch auf einem Berg und schaue in den dunkler werdenden Abendhimmel. Einzelne Sterne beginnen aufzuleuchten, langsam werden es mehr und mehr und jeder leuchtet mit der ihm eigenen Kraft in die Tiefe des Universums. Es ist eine bunte Gemeinschaft, jeder mit seinen Besonderheiten. Einige sehe ich hell und klar, andere nur schwach und verschwommen, viele entziehen sich wohl ganz meinem blossen Auge. Immer mehr dieser Sterne leuchten auf, ich kann sie schon längst nicht mehr zählen.

„Weißt du wie viel Sternlein stehen an dem blauen Himmelszelt?
Weißt du, wie viel Wolken gehen weithin über alle Welt?
Gott der Herr hat sie gezählet, dass ihm auch nicht eines fehlet,
an der ganzen grossen Zahl, an der ganzen grossen Zahl.“

Wenn's mir nicht reichen sollte, oder wenn ich genauer hinsehen will, so liegen neben mir Feldstecher und Fernrohr. Es eröffnet sich eine neue, ungeahnte Vielfalt, fantastischer und geheimnisvoller als zuvor. Das noch tiefere Eindringen ins Unendliche des Alls (oder ist es nur endlich?) mit Satelliten und Sonden überlasse ich anderen.
Zurück aus dem Nachttraum funkeln die Primzahlen wie die Sterne, scheinbar willkürlich gestreut. Wenn ich weitere dieser Zahlen finden oder ihre Besonderheiten erforschen will, nehme ich den Taschenrechner oder den Computer. Und wie bei der Erkundung der Sterne,

sind auch hier weltweit Leute Tag und Nacht an der Arbeit. Ob einst der letzte Stern im All entdeckt werden kann? Aber eines ist uns gewiss: Die letzte Primzahl, die gibt es nicht.“

Wir lassen die Worte nachklingen und beenden die Lektion zwei Minuten früher als üblich.

Lektionen 10/11

Nachspiel: Geheimnisvolles und Besonderes rund um die Primzahlen.

Für die Fortsetzung verteile ich ein Blatt, auf dem sich einige Fragen und Knobelaufgaben über Primzahlen und natürliche Zahlen befinden. Es geht unter anderem um das Prüfen von Formeln zur Bestimmung von Primzahlen (z.B. $2^p + 1$ oder $n^2 + n + 41$) und um die Goldbachsche Vermutung (Jede gerade Zahl grösser 2 sei Summe von zwei Primzahlen). Wir fragen nach der Anzahl der Primzahlzwillinge und -drillinge; das eine so leicht zu beantworten, das andere bis heute unbekannt. Ergänzt werden diese Aufgaben durch einen Weltwocheartikel über Verschlüsselungsverfahren mit Primzahlen.

Den Rest der ersten und die ganze zweite Lektion lasse ich die Schülerinnen und Schüler an diesen Beispielen knobeln. Sie sind recht aktiv dabei und kommen da und dort mit interessanten Lösungsansätzen. Bei der Goldbachschen Vermutung sollen die Schülerinnen und Schüler 10 gerade Zahlen im Bereich von 4 bis 1000 notieren und jede als Summe von zwei Primzahlen schreiben. Dafür gehen viele nach vorn an die Tafel, wo unsere Tabelle mit den Farbstrahlen und den ausgesiebten Primzahlen aufgehängt ist. Auch jetzt ist sie noch sehr nützlich!

In der dritten Lektion von heute besprechen wir gemeinsam die verschiedenen Aufgaben, deren Ansätze und Lösungen, die Eulerschen Formeln, die ungelösten Probleme. Raffael P. ist von sich aus darauf gekommen, warum es ausser 3, 5, 7 keine weiteren Primzahldrillinge geben kann. Er erläutert uns, warum immer eine von drei aufeinander folgenden ungeraden Zahlen eine Dreierzahl sein muss!

Lektion 12

2.5 Feedback der Schüler zum Lehrstück

In der ersten Hälfte der Stunde besprechen wir ein paar ungelöste Aufgaben. Dann wende ich die Tafel: Die farbigen Primzahlblätter sowie alle andern wichtigen Blätter dieser Unterrichtseinheit sind aufgehängt, werden präsent. Sie bilden den Hintergrund für eine letzte Rekapitulation des ganzen Prozesses: Der Einstieg mit dem Zahlenstrahl, bekannte Aspekte der Primzahlen, die Suche nach Primzahlen mit der Zahlentabelle, die Frage „Gibt es unendlich viele Primzahlen?“, die Formelansätze, das Scheitern und der Durchbruch zur Erkenntnis, der Brief an Paul sowie am Schluss weitere Aspekte der Primzahlen mit lösbaren und ungelösten Fragen. So gewinnen wir den Überblick.

Ich erinnere an die Meinung: „Wir können gar nicht wissen, ob es unendlich viele Primzahlen gibt oder nicht.“ Dann begaben wir uns auf die Suche nach einer Formel für Primzahlen. Wir studierten verschiedene Ansätze, aber alle versagten. Gerade beim genaueren Betrachten der gescheiterten Versuche schafften wir den Durchbruch zur Erkenntnis, nämlich, dass wir immer wieder neue Primzahlen erzeugen können. Wir setzten uns mit der Behauptung von Paul auseinander, es gebe eine gewisse endliche Anzahl von Primzahlen. Unsere Überlegungen zeigten aber, dass dies nicht stimmen kann und somit das Gegenteil wahr ist. Euklid notierte diesen Beweis bereits vor 2300 Jahren in seinen „Elementen“, dem dauerhaftesten wissenschaftlichen Buch, dem wir ja schon im Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras begegneten.

Somit haben wir den Überblick über die insgesamt 12 Lektionen gewonnen:

L 1-2 Primzahlen: Was wissen wir? Darstellung durch Rechtecksflächen.
Anwendungen und Teilbarkeitsregeln.
Ein erstes Primzahlblatt und Grundlagen für das Gemeinschaftswerk.

L 3-4 Durchlöcherte Papierstreifen als Sieb des Eratosthenes.
Beendigung der Blätter: Welche Zahlen sind noch abzustreichen?

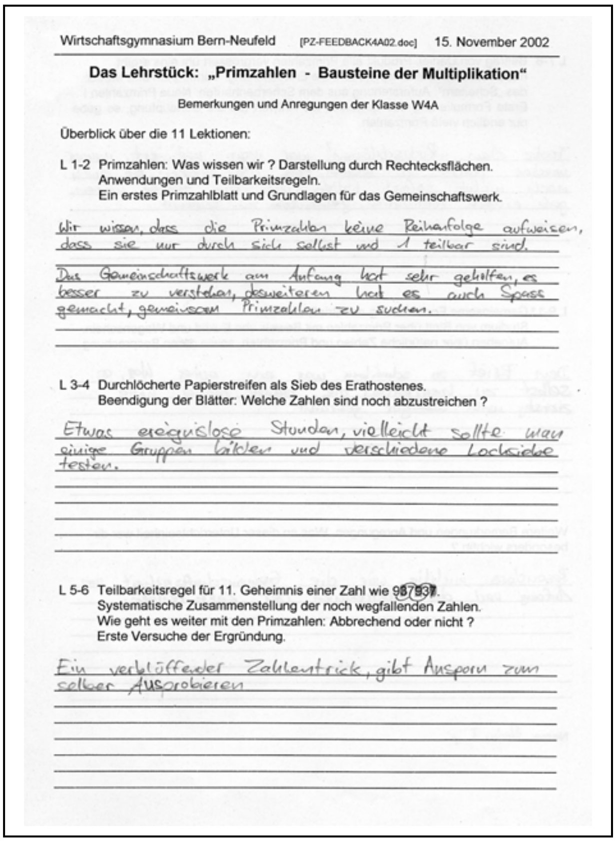
L 5-6 Teilbarkeitsregel für 11. Zusammenstellung der noch wegfallenden Zahlen.
Wie geht es weiter mit den Primzahlen: Abbrechend oder nicht?
Erste Versuche der Ergründung.

L 7-8 Beitrag von Daniel: Alle Primzahlen miteinander multipliziert und +1 ergibt neue Primzahl. Die Beispiele und die Enttäuschung. Variationen und wieder das „Scheitern". Auferstehung aus dem Scherbenhaufen: Neue Primzahlen!
Erste Formulierung des Beweises als Antwort auf die Behauptung, es gebe nur endlich viele Primzahlen.

L 9 Finale mit der gemeinsamen Formulierung des Briefs an Paul.
Studium von Blatt über Primzahlen mit Beweis von Euklid und Wagenschein. Essay.

L 10-12 Nachgang mit Aufgaben über natürliche Zahlen und Primzahlen, samt Besprechung.

Dies dauert gute zehn Minuten und ist Einstimmung auf den Fragebogen, den ich jetzt ausfüllen lasse, um möglichst zu den einzelnen Unterrichtssequenzen vielfältige Rückmeldung zu erhalten. Er ist diesmal stärker nach Lektionen als nach Akten eingeteilt, genauso wie der Überblick oben.



Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [PZ-FEEDBACK4A02.doc] 15. November 2002

Das Lehrstück: „Primzahlen - Bausteine der Multiplikation"

Bemerkungen und Anregungen der Klasse W4A

Überblick über die 11 Lektionen:

L 1-2 Primzahlen: Was wissen wir ? Darstellung durch Rechtecksflächen.
Anwendungen und Teilbarkeitsregeln.
Ein erstes Primzahlblatt und Grundlagen für das Gemeinschaftswerk.

Wir wissen, dass die Primzahlen keine Reihenfolge aufweisen, dass sie nur durch sich selbst und 1 teilbar sind.

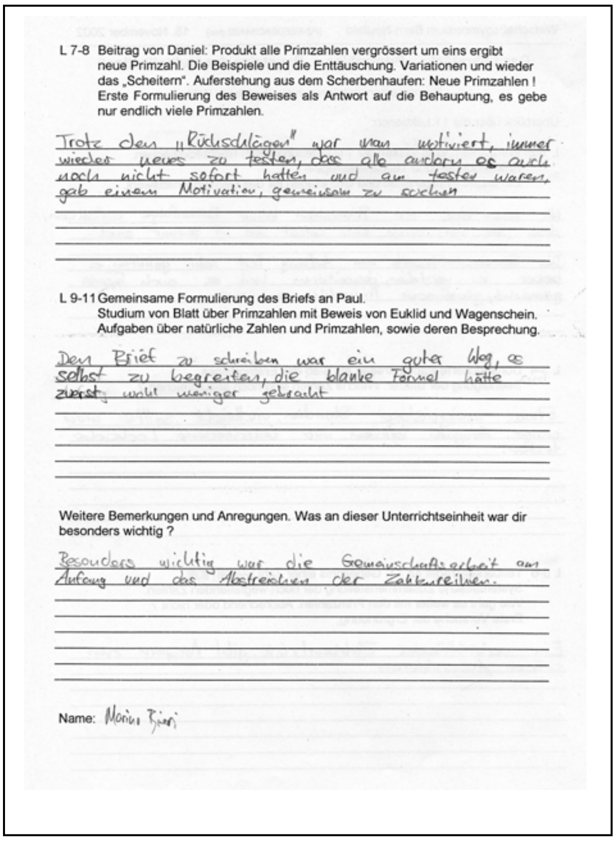
Das Gemeinschaftswerk am Anfang hat sehr geholfen, es besser zu verstehen, desweiteren hat es auch Spass gemacht, gemeinsam Primzahlen zu suchen.

L 3-4 Durchlöcherte Papierstreifen als Sieb des Erathostenes.
Beendigung der Blätter: Welche Zahlen sind noch abzustreichen ?

Etwas ereignislose Stunden, vielleicht sollte man einige Gruppen bilden und verschiedene Lochsiebe testen.

L 5-6 Teilbarkeitsregel für 11. Geheimnis einer Zahl wie 937937.
Systematische Zusammenstellung der noch wegfallenden Zahlen.
Wie geht es weiter mit den Primzahlen: Abbrechend oder nicht ?
Erste Versuche der Ergründung.

Ein verblüffender Zahlentrick, gibt Ansporn zum selber Ausprobieren



L 7-8 Beitrag von Daniel: Produkt alle Primzahlen vergrössert um eins ergibt neue Primzahl. Die Beispiele und die Enttäuschung. Variationen und wieder das „Scheitern". Auferstehung aus dem Scherbenhaufen: Neue Primzahlen ! Erste Formulierung des Beweises als Antwort auf die Behauptung, es gebe nur endlich viele Primzahlen.

Trotz den „Rückschlägen" war man motiviert, immer wieder neues zu testen, dass alle anderen es auch noch nicht sofort hatten und am testen waren, gab einem Motivation, gemeinsam zu suchen

L 9-11 Gemeinsame Formulierung des Briefs an Paul.
Studium von Blatt über Primzahlen mit Beweis von Euklid und Wagenschein.
Aufgaben über natürliche Zahlen und Primzahlen, sowie deren Besprechung.

Den Brief zu schreiben war ein guter Weg, es selbst zu begreifen, die blanke Formel hätte zuerst wohl weniger gebracht

Weitere Bemerkungen und Anregungen. Was an dieser Unterrichtseinheit war dir besonders wichtig ?

Besonders wichtig war die Gemeinschaftsarbeit am Anfang und das Abstreichen der Zahlenreihen.

Name: Marina Bieri

Das Lehrstück: „Primzahlen - Bausteine der Multiplikation“

Bemerkungen und Anregungen der Klasse W4A vom 15. November 2002

	Erste Begegnung mit Primzahlen, Teilbarkeits-regeln, Primzahlsuche (Lektionen 1/2)	Papierstreifen und das Sieb des Eratosthenes im Gemeinschaftswerk (Lektionen 3/4)	Teilbarkeit durch 11. 937937 Wie geht es weiter mit den Primzahlen? (Lektionen 5/6)	Formelsuche Primzahlprodukt + 1 Scheitern und Durchbruch (Lektionen 7/8)	Brief an Paul. Aufgabenblatt über Primzahlen (Lektionen 9/11)	Rückblick Gesamtfeedback Lektion 12
Micha-el (1)	Gute Einführung. Schafft einen gewissen Überblick. Nur bis Wurzel x war gut.	Nach L1-2 fast überflüssig. Haben Wurzel x ja schon besprochen. Die grosse Anzahl an Primzahlen war später nützlich.	War nötig. Besser anschauen schon bei L 1-2. Hätte es mehr Tipps von dir verlitten.	Hätte es nach L5-6 nicht mehr gebraucht. War zu lang, um konzentriert dabei zu sein. Nach Daniels Beitrag abbrechen und zeigen wie weiter.	Sehr gut! Aufgabenblatt ein bisschen zu schwer.	**L 9-11: Vertiefen !!!**
AAA (2)	Das Abstreichen war gut, vielleicht ein bisschen zu lange.		Die Teilbarkeitsregel für 11 kannte ich noch nicht. Es ist gut, haben wir sie angeschaut.	Ich fand es gut, dass wir so viele Beispiele an der Tafel gemacht haben. So kam jeder für sich langsam der Lösung näher.	Gemeinsame Formulierung für mich unnötig. Deshalb war es ein bisschen langweilig.	
Toni (3)	Die ersten zwei Lektionen waren sehr spannend, da wir noch nicht wussten, ob sie endlich oder unendlich sind. Es war gut, dass wir langsam ins Thema hineinka-men und mit ganz einfachen Beispielen begannen.					**Ich fand diese 11 Lektionen sehr spannend, denn wir hatten die Möglichkeit selbständig neue Formeln herauszufinden. Nun bin ich froh zu wissen, dass es unendlich viele Primzahlen hat.**
Raffaël A (4)	Ich habe es gut gefunden, dass wir schritt-weise und langsam ins Thema eingestiegen sind. Wir hatten gut Zeit, die einfachen Grundlagen kennenzulernen und haben viele wichtige zusammenfassende Blätter erhalten.		Dies war ein Thema, das ich schon einmal behandelt habe. Doch es war sehr gut, eine solche Sache wieder repetieren zu können. Ich wäre froh, wenn solche wichtige Hilfsmittel öfter auch in anderen Bereichen angeschaut werden könnten.	Von da an hat sich ein grosser Teil der Klasse aufnahmefähiger gezeigt, da wir der „Lösung“ einen grossen Schritt näher gekommen sind. Die Formel der endgültigen Erkenntnis, es gäbe unendlich viele Primzahlen war auch für mich erleichternd, da es für mich ein wenig zu lange dauerte, bis wir die Lösung hatten.	Der Beweis ist nicht ganz bewiesen, weil man noch nicht alle Zahlen kontrolliert hat, ob sie eine Primzahl sind. Die Aufgaben waren recht einfach.	**Ich fand gut, dass wir zum Teil auch in Gruppen arbeiten konnten. Das gefiel mir. Auch dass uns ab und zu mit „wichtigen“ Tipps auf die Sprünge geholfen wurde, war sehr gut.**
Marina (5)	Dass die Primzahl zwei verschiedene Teiler hat. Ich habe die Aufgabe hoch interessant gefunden.	Ich habe es komisch gefunden, dass die Primzahlen keine richtige Reihenfolge haben.	Diese Regel hat uns erleichtert herauszufinden, ob eine Zahl durch 11 teilbar ist. - Wir haben angenommen, dass es weitergeht. Wir haben diskutiert darüber, wie es weitergehen könnte, aber etwas Brauchbares haben wir nicht herausgefunden.	Es wurde noch nicht festgestellt, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Nur ein Teil der Klasse hat angenommen, dass es endlich viele Primzahlen gibt. Seltsam war, dass jeder Beweis gescheitert ist.	Brief zu schreiben, war ein guter Weg, es selbst zu begreifen, die blanke Formel hätte zuerst wohl weniger gebracht.	
Marino (6)	Wir wissen, dass die Primzahlen keine Reihenfolge aufweisen, dass sie nur durch sich selbst und 1 teilbar sind. Das Gemein-schaftswerk am Anfang hat sehr geholfen, es besser zu verstehen, des weiteren hat es auch Spass gemacht, gemeinsam Primzahlen zu suchen.	Etwas ereignislose Stunden, vielleicht sollte man einige Gruppen bilden und verschiedene Lochsiebe testen.	Ein verblüffender Zahlentrick, gibt Ansporn zum selber Ausprobieren.	Trotz den „Rückschlägen“ war man motiviert, immer wieder Neues zu testen, dass alle andern es auch noch nicht sofort hatten und am Testen waren, gab einem Motivation, gemeinsam zu suchen.		**Besonders wichtig war die Gemeinschaftsarbeit am Anfang und das Abstreichen der Zahlen-reihen.**
Raphael P (7)		Es war fast nicht lehrreich, weil wir wussten, welche Linien wir anstreichen müssen. Als dann Thomas und ich merkten, dass es weitere Zahlen gibt, lernten wir etwas.	Bei der Teilbarkeitsregel waren wir fasziniert. Aber als wir 3 Lektionen nur über „abbrechend oder nicht?“ diskutierten, war es schwierig, sich zu konzentrieren.		Fast eine Erleichterung, den Beweis präsentiert zu bekommen ! Es war spannend und lustig, Beweise aufzustellen. Aber gebracht hat es uns nicht viel. Nur welche Beweise wir nicht anwenden sollen.	**Das Thema Primzahlen ist spannend und faszinierend. Aber 3 Lektionen hintereinander nur ein Thema zu besprechen, ist für mich zu anspruchsvoll wegen der Konzentration. Nach 2 Lektionen passe ich weniger auf. Ich fände es besser 1-2 Lektionen zu besprechen, dann min. 1 Lektion Aufgaben zu diesem Thema zu machen. Aber schlussendlich haben wir viel gelernt.**

Rahel (8)	Mir hat es viel gebracht, dass wir das als Gemeinschaftswerk gemacht hatten. Da bekam man auch die Überlegungen der anderen mit.	Ich fand gut, dass Sie das am Projektor mit uns gemacht hatten. Doch wenn man so etwas selber machen muss, braucht das recht viel Zeit und man käme mit Abstreichen schneller auf dieselbe Lösung.	Diese Regel erleichtert einem das Teilen von Elferzahlen sehr stark. Das hat mir gefallen.	Ich dachte zuerst nicht, dass das funktioniert, vor allem, als wir so oft gescheitert sind. - Doch als man das Ganze dann doch beweisen konnte, begriff ich es gut. Wir haben aber irgendwie fast zu lange daran gearbeitet und sind sehr lange nicht weiter gekommen, dort ist es mir etwas verleidet.	Durch diesen Brief versteht man den Beweis noch besser, denn er ist verständlicher geschrieben als die Beweise aus dem Geometriebuch.	**Ich fand es gut, dass wir oft in Gruppen gearbeitet haben. Doch als wir bei dem Beitrag von Daniel so lange nicht weitergekommen sind, wurde es in der Klasse unruhiger und ich habe weniger zugehört.**
Tamina (9)	Ich fand es gut, dass wir das in Gruppen gemacht haben. So konnte man einander helfen.	Die durchlöcherten Papierstreifen fand ich gut, aber das mit dem Abstreichen fand ich mühsam, vielleicht lag das daran, dass ich so hohe Zahlen hatte (2100-2300).	Teilbarkeitsregel für 11: Ist ein guter Trick.	Fand ich am Anfang interessant, doch dann wurde es schwierig, so lange den gleichen oder ähnlichen Vermutungen zuzuhören. 2 oder 3 Lektionen nacheinander das zu machen, war echt nervtötend.	Den Brief fand ich gut. Denn endlich wurde das „Gestürm“ in meinem Kopf (von den letzten Lektionen) ein wenig „geordnet“.	**Wie schon gesagt: Am Anfang war es echt interessant, doch mit der Zeit konnte ich's nicht mehr hören. „Ach hör mir auf mit Primzahlen.“- Ich glaube nicht, dass die Anzahl Lektionen zuviel waren, sondern dass 3 Lektionen nacheinander immer am gleichen rumsondieren einfach zu viel ist. - Ausserdem war mir erst ganz am Schluss klar, dass es wirklich unendlich viele Primzahlen gibt. Ich habe es von Anfang an vermutet. Doch ganz sicher war ich mir nie, denn du hast immer (oder viel) dagegen argumentiert. Auch deswegen hatte ich mit der Zeit ein „Gestürm“ im Kopf.**
Alissa (10)	Selbständiger Einstieg finde ich gut ! Da jeder seinen „Senf“ dazu geben konnte, wurde der Unterricht spannend.	Habe ich spannend gefunden, weil man verschiedene Zahlenreihen mit einem oder mehreren Strichen abstreichen kann.	Es vereinfacht einem das Rechnen! Ist auch spannend, was man alles mit Zahlen anstellen kann. Auch, dass diese Regel wirklich funktioniert. Faszinierend!	Diese Idee von Daniel fand ich mutig, aber so richtig begriffen habe ich es nicht, weil es gar nie richtig erklärt worden war. Begriffen haben es wahrscheinlich nur diese Leute, denen es sofort logisch war.	Ich fand es gut, wie wir „spielerisch“ auf eine Regel gekommen sind und auch dass jeder seine Meinung (ob unendlich oder endlich) vertreten konnte.	**Dass wir intensiv bei diesem Thema dabei waren und uns auch bildlich mit dem Thema befassten, kenne ich noch nicht so gut. (Wir haben immer nur Aufgaben gelöst.)**
Daniel (11)	Die Gruppenarbeit war gut. Es war gut, dass wir selber Primzahlen auf den Blättern suchen mussten.	Es gab etwas viel zu tun, weil es viele Zahlen hatte, die wir abstreichen mussten. Es war eine gute Übung.	Es hat schon sehr geholfen, weil man muss dann nicht mehr schriftlich rechnen. Es war gut zu hören, was die anderen zu den Primzahlen sagen.	Als der Beweis nicht gut ging, fand ich das schön schade, aber bis zum Schluss haben wir es ja noch herausgefunden.	Es war eine gute Repetition von dem, was wir vorige Stunde gemacht haben. Die Übungen waren gut. Bei der letzten Übung war es etwas schwierig, es zu lösen, weil es viel zu tun gab. Beim Besprechen fand ich wichtig, dass man bei der letzten Aufgabe nicht schriftlich rechnen muss.	
Lisa (12)	Guter Einstieg! Man konnte gerade am Anfang selbständig ausprobieren und seine Ideen testen.	Das Ergebnis der Blätter und das Aussieben von Zahlen, fand ich spannend.	Es fasziniert mich, dass diese Elferregel wirklich geht.	Es gab zu wenig Möglichkeit, etwas selbst zu machen und auszuprobieren. Zu lange nur reden war anstrengend und die Konzentration nahm recht schnell ab. Aber die Idee von Daniel fand ich eigentlich recht gut, nur das Besprechen ging „zu lange“.	Das mit dem Brief fand ich eine recht witzige und gute Idee. Es war dann auch der richtige Zeitpunkt mal Aufgaben dazu zu lösen.	**Der abwechslungsreiche Unterricht gefällt mir sehr gut. Nicht nur Aufgaben zu lösen, ist für mich etwas Neues. Das „im Kreis ein Thema besprechen“ finde ich eine gute Möglichkeit, etwas zu lernen, so behalte ich den Stoff auch auf Anhieb gut und der Einstieg kommt rasch.**
Tobias (13)	Das mit den Rechtecksflächen war einleuchtend.	Das war gut, aber irgendwie geht das bei den höheren Zahlen nicht mehr auf.	Ich fand das gut, und für mich war das sehr einleuchtend.	Ich fand das gut, dass wir zuerst immer wieder scheiterten, denn umso mehr war es dann eine „Erfahrung“, als wir es dann endlich „schafften“.	Dieser Beweis ist etwas kompliziert, aber wenn man sich damit auseinandersetzt …	**Ich fand es gut, dass wir manchmal etwas zusammen machten und manchmal auch etwas alleine!**
Manuel (14)	Von mir aus gesehen ein guter Einstieg in die Primzahlen. Weckte bei mir Interesse an den Primzahlen.	Weiterhin noch interessant und „informativ“. Mit dem Sieb wurde das Verfahren verbildlicht (tolle Idee).	Das Taschenrechnerspiel war eine gute Abwechslung. Aber die ersten Versuche der Ergründung sind mehr und mehr in eine verwirrende Diskussion ausgeartet.	Und wieder waren die ersten Formulierungen der Knackpunkt der folgenden Lektionen. Die Lektionen wurden immer mehr zu einem „Gestürm“.	Hat bei mir wieder etwas Licht in die Angelegenheit gebracht. Waren die Lektionen, die ich fast als die interessantesten empfunden habe.	**Man sollte schauen, dass so Erklärungsversuche nicht in einem „Gestürm“ enden. Dies sorgt nur für Verwirrung. - Noch eine kleine Anmerkung: Ich hätte es lieber, wenn man zwischen den „Diskussionen“ öfters mal ein Blatt lösen könnte. Es würde ein bisschen mehr Abwechslung in den Unterricht bringen.**
BBB (15)	Am Anfang wusste ich schon ein bisschen über Primzahlen, habe aber viel dazu gelernt.	Es ist zwar etwas Gutes, aber wenn man mit höheren Zahlen dies machen müsste, würde dies recht mühsam.	Diese Regel ist sehr gut, sie ist gut zu verstehen.	Dies war sehr interessant, zu behaupten, dass es unendlich Primzahlen gibt. Ich hätte nicht gedacht, dass es mit dieser Formel gehen würde.	War eine kleine Abwechslung.	**Ich fand es sehr gut mit der ganzen Klasse zu arbeiten und immer wieder neue Behauptungen und Formeln zu lernen. Ich finde der Unterricht ist so gut gestaltet.**

Matthias (16)	Die Einführung fand ich gut, da ich vor dieser Stunde noch nichts über Primzahlen wusste und nachher schon viel über sie gelernt hatte.	Mir ist nicht ganz klar geworden, welche Zahlen man sonst noch abstreichen muss.	Die Teilbarkeitsregel hast du gut erklärt. Ich wusste sehr schnell, wie man sie anwendet.	Die zweite Stunde war etwas langweilig. Man versuchte immer neue „Formeln" zu suchen, um die Unendlichkeit der Primzahlen zu beweisen. Aber jeder Versuch scheiterte.		**Ich habe nicht gewusst, dass man nur bis zur Wurzel einer Zahl rechnen muss, um herauszufinden, ob es eine Primzahl ist.**
Joël (17)	Dass jeder ein anderes Blatt hatte, war gut, denn so musste jeder für sich selbst (mit Hilfe der anderen) arbeiten, und konnte nicht nur abschreiben.	Das Sieb ist genial. Es ist nur schade, dass nur zwei der Klasse nach weiteren Primzahlen suchten.	Dies regte zu guten Diskussionen und Theorien an.	Dieser Beitrag war sehr interessant, weil seine Theorie ja eigentlich nicht aufgeht und doch konnten wir Schlüsse daraus ziehen.	Der Beweis des Euklid ist ein bisschen zu kompliziert, aber die Wagenscheintheorie ist interessant.	**Das „freie" Arbeiten und das Selberherausfinden der Formeln, denn so leuchtete es uns richtig ein. - Zwischendurch war aber dann ein Bisschen tote Hose und ein paar Mitschüler konzentrierten sich nicht mehr. Fazit: Das Lehrstück ist gut und interessant und ich würde gerne weiter so arbeiten!**
David (18)	Da wir nicht alle in der Klasse das gleiche Wissen über die Primzahlen hatten, war es sehr gut zu hören, was die anderen darüber wissen und können.	Das System mit den Blättern war sehr einleuchtend!	Dies mit der Teilbarkeitsregel von 11 war sehr faszinierend, genauso wie die Zahlen (z.B. 937937). Das war sehr interessant, zu sehen wie das geht.	Ja, diese Lektionen waren ein bisschen ein Durcheinander, da wir endlich glaubten, wir hätten einen Beweis oder eine Regel.	Dies mit dem Brief war eine sehr lustige Idee. Jedoch finde ich den Beweis von Euklid viel zu kompliziert, und nicht gerade einleuchtend, doch es ist interessant zu sehen, wie die Mathematiker dies früher bewiesen haben.	**Der Math-Unterricht von ihnen finde ich sehr gut gestaltet. Wir schauen nicht einfach irgend ein Thema an, arbeiten es durch, beenden es (und vergessen es), sondern wir „versinken" mit ihnen tief in dem Thema und besprechen zusammen auch, <u>warum</u> das so ist, oder probieren das Gegenteil zu beweisen. Diese Art von Unterricht finde ich Spitze!**
Thomas (19)	Interessanter, packender Einstieg.		Am Anfang war es eher kompliziert, doch mit der Zeit habe ich es begriffen.	In diesen zwei Lektionen ist die Motivation ein wenig verloren gegangen, weil wir lange nicht auf einen grünen Zweig kamen.	Sobald wir den Brief geschrieben haben, habe ich wirklich durchgesehen. Die Goldbachsche Vermutung hat mich fasziniert. Es war für mich faszinierend, dass es noch solche Sachen in der Mathe gibt, die man noch nicht beweisen konnte.	**Solche intensive Themen, die wir von Zeit zu Zeit entwickelten, machen mir Spass und sind interessant.**
Fritz (20)		Die Gruppenarbeit fand ich gut. Die Striche mit den Zahlen, die über mehrere Blätter gehen, fand ich faszinierend.	Es ist interessant, solche „Geheimnisse" zu entschlüsseln.	Diesen Schritt fand ich gut, nur das eigene Formulieren fand ich überflüssig.	War eine gute Repetition. - Ich finde es faszinierend, dass Euklid den Beweis schon vor 2300 Jahren erbringen konnte.	**Dass wir selber auf die Lösung kommen mussten.**
Jan (21)		**Ich fand das mit den durchlöcherten Papierstreifen eine gute Idee. Vielleicht solltest du nächstes Mal auf dem Projektor zum Abstreichen Farben nehmen, die man besser sieht. (Gelb sah man eigentlich gar nicht.)**	**Von dieser Teilbarkeitsregel über 11 war ich noch so beeindruckt. Hier dachte ich noch, dass es endlich viele Primzahlen gibt.**	**Hier spürte ich, wie die Motivation „den Bach runter ging". Der Grund war vielleicht, dass wir ein bisschen zu lange einfach nur diskutiert haben.**		**Heute fand ich noch sehr gut, dass du noch einmal gesagt hast, wie du dieses Lernstück gesehen hast.**

Der sanfte Einstieg in die Primzahlen wird begrüsst. So Raffaël A (4): „Ich habe es gut gefunden, dass wir schrittweise und langsam ins Thema eingestiegen sind.“ Oder Toni (3): „Es war gut, dass wir langsam ins Thema hineinkamen und mit ganz einfachen Beispielen begannen.“ Bei Manuel (14), Marina (5) und anderen hat der Anfang das Interesse geweckt. Das Abstreichen der Primzahlen wurde von Alissa (10) und Fritz (20) als spannend, von Daniel (11) und Tamina (9) eher als langweilig oder mühsam erlebt, insbesondere wenn ein Blatt mit höheren Zahlen zu verarbeiten war.

Die Regel für die Teilbarkeit durch 11 wie auch die kleine Zahlenspielerei haben verblüfft und fasziniert. David (18): „Dies mit der Teilbarkeitsregel von 11 war sehr faszinierend, genauso wie die Zahlen (z.B. 937937). Das war sehr interessant, zu sehen wie das geht.“ Alissa (10): „Ist auch spannend, was man alles mit Zahlen anstellen kann. Auch, dass diese Regel wirklich funktioniert. Faszinierend!“

Der lange Suchprozess hinterliess zwei Eindrücke: „Es war mühsam!“ und „Wir haben es geschafft!“ Die Schülerinnen und Schüler waren in sehr unterschiedlichem Tempo im Prozess. Entsprechend vielfältig sind die Rückmeldungen. Bei den einen überwiegt die Erinnerung an das Durcheinander und das mühsame Ringen, bei andern bleiben die spannenden Phasen und der Durchbruch im Vordergrund. AAA (2): „Ich fand es gut, dass wir so viele Beispiele an der Tafel gemacht haben. So kam jeder für sich langsam der Lösung näher.“ Tamina (9): „Am Anfang war es echt interessant, doch mit der Zeit konnte ich’s nicht mehr hören. ‚Ach hör mir auf mit Primzahlen.’“ Tobias (13) sieht einen Gewinn in der langen Durststrecke: „Ich fand das gut, dass wir zuerst immer wieder scheiterten, denn umso mehr war es dann eine ‚Erfahrung’, als wir es dann endlich ‚schafften’.“ Umso grösser war auch die Erleichterung bei Raffaël A (4) durch die „Formel der endgültigen Erkenntnis“.

Für mehrere Schülerinnen und Schüler war das gemeinsame Verfassen des Briefes klärend. Stellvertretend für Tamina (9), Marina (5) und andere zitiere ich Thomas (19): “Sobald wir den Brief geschrieben haben, habe ich wirklich durchgesehen.“ Für Rahel (8) war es wohl wichtig, dass der Brief aus unserem Prozess heraus entstanden war, wodurch für sie die Formulierung verständlich wurde: „Durch diesen Brief versteht man den Beweis noch besser, denn er ist verständlicher geschrieben als die Beweise aus dem Geometriebuch.“ Es gibt aber auch Schüler wie AAA (2), welche die gemeinsame Formulierung für sich unnötig finden.

Die kleinen Ergänzungen und Aufgaben im Zusammenhang mit den Primzahlen waren für mehrere Schüler willkommen. Wie die Zahlenspielerei dazwischen scheint das für einige Jugendliche geradezu das „Fleisch am Knochen“ zu sein, das Lebendige neben der Knochenarbeit rund um den Beweis. So wünscht sich Michael (1) in diesem Bereich eine Vertiefung. Die Beispiele öffnen gleichzeitig den Blick in die Tiefe und in die Weite. Thomas (19): „Die Goldbachsche Vermutung hat mich fasziniert. Es war für mich faszinierend, dass es noch solche Sachen in der Mathe gibt, die man noch nicht beweisen konnte.“

Die abschliessende Zusammenfassung mit dem Überblick wird kaum erwähnt. Einzig Jan (21) vermerkt, dass er den Überblick und die Randbemerkungen schätzte, welche wir in der letzten Stunde zusammentrugen.

Insgesamt scheint mir das Verhältnis zwischen „Knochenarbeit“ und „Fleischgenuss“ ausgewogen. Die Gesamtbeurteilungen fallen überwiegend positiv aus. Am meisten begeistert und differenziert formuliert David (18): „Der Math-Unterricht von ihnen finde ich sehr gut gestaltet. Wir schauen nicht einfach irgendein Thema an, arbeiten es durch, beenden es (und vergessen es), sondern wir ‚versinken' mit ihnen tief in dem Thema und besprechen zusammen auch, warum das so ist, oder probieren das Gegenteil zu beweisen. Diese Art von Unterricht finde ich Spitze!" Andere Schüler wie Joël (17) und Thomas (19) formulieren konkret, dass sie gerne weiter so arbeiten würden.

Schauen wir uns noch zwei Schüler und eine Schülerin genauer an:
Für *Marino* (6) war das Gemeinschaftswerk Verständnis fördernd und es hat ihm Spass gemacht. Das Abstreichen bezeichnet er im Gesamtrückblick als „besonders wichtig", die damit verbrachte Zeit aber als „etwas ereignislose Stunden". Auf die Dauer hat ihn das Abstreichen offenbar gelangweilt, auch wenn er es vielleicht für den Fortgang als wichtig erachtet. Lieber hätte er mit den Lochsieben experimentiert. *Die Idee mit den Lochsieben lässt sich sicher zu einer Experimentier- und Testphase ausbauen, vielleicht könnte man sogar mit diesem Hilfsmittel die Primzahltabelle erzeugen, statt mit dem von einigen als langweilig empfundenen Abstreichen. Die anschaulichen Strahlen gingen dabei allerdings verloren.* Auch der verblüffende Zahlentrick regt Marino an zum Experimentieren, zum selber Ausprobieren. Anfangs war Marino ein klarer Vertreter der Ansicht, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Das Suchen nach einer Formel war wohl für Marino ein gewünschtes Experimentierfeld, so dass die Rückschläge der Motivation nichts anhaben konnten: „Trotz den ‚Rückschlägen' war man motiviert, immer wieder Neues zu testen, dass alle andern es auch noch nicht sofort hatten und am Testen waren, gab einem Motivation, gemeinsam zu suchen." Über seinen intellektuellen Prozess bis hin zum Verwerfen seiner ursprünglichen Ansicht, erfahren wir nichts. Insgesamt erwähnt er immer wieder, dass er gerne mit anderen zusammen arbeitet.

Tobias (13) fand die Darstellung von Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen durch Rechtecksflächen einleuchtend. Bezüglich der Gemeinschaftsdarstellung ist ihm im Bereich der höheren Zahlen etwas unklar geblieben. Für Tobias war die Zahlenspielerei nicht nur einleuchtend, sondern sie wirkte auf ihn anregend, er dachte weiter, versuchte zu verallgemeinern. (S. 89) Das mehrmalige Scheitern taxiert er als besonders fruchtbar für den Lernprozess. Als ersten durchzuckte ihn der Blitz (S. 94): „Und jetzt haben wir ja wieder eine Primzahl, also gibt es unendlich viele Primzahlen." Der Beweis von Euklid ist zwar kompliziert, aber mit einigem Aufwand verstehbar. Insgesamt schätzte er die Abwechslung der Arbeitsformen.

Tamina (9) erwischte für das Abstreichen das Blatt mit den höchsten Zahlen und fand die Arbeit trotz Gruppenhilfe als mühsam. Sie hätte das Arbeiten mit Lochsieben vorgezogen. Die Teilbarkeitsregel für 11 und der Zahlentrick haben ihr gefallen. Das Ringen um die Kernfrage fand sie anfangs interessant, doch schliesslich war es „echt nervtötend". Dazu kam das „Gestürm" im Kopf: Was gilt jetzt und was nicht? Für sie waren „3 Lektionen nacheinander immer am gleichen rumsondieren einfach zu viel". Der zu verfassende Brief half dann allerdings, das Durcheinander etwas zu ordnen und zur Klarheit zu kommen. „Ausserdem war mir erst ganz am Schluss klar, dass es wirklich unendlich viele Primzahlen gibt. Ich habe es von Anfang an vermutet. Doch ganz sicher war ich mir nie, denn du hast immer (oder viel) dagegen argumentiert. Auch deswegen hatte ich mit der Zeit ein ‚Gestürm' im Kopf." Nun, es ist immer wieder eine Gratwanderung zwischen Verunsichern und Helfen. Wir hören ja auch Raphaël A (4): „Auch dass uns ab und zu mit ‚wichtigen' Tipps auf die Sprünge geholfen wurde, war sehr gut." Schliesslich hat sich der Sturm bei Tamina gelegt. Die Erkenntnis hat sich durchgesetzt. In der darauf folgenden Probe verfasste sie den Brief an Paul mit ausserordentlicher Klarheit:

Lieber Paul
Deine Behauptung stimmt leider nicht. Es wäre doch zu schön, wenn man die Primzahlen einfach auswendig lernen könnte … Wenn man alle deine (endlichen) Primzahlen mit einander multipliziert und +1 rechnet (z.B. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$), erhält man eine Zahl, die nicht durch diese gebrauchten Primzahlen teilbar ist. Also ist diese neue Zahl (in unserem Falle 211) entweder eine Primzahl oder sie lässt sich in Primzahlen zerlegen, die wir nicht gebraucht haben. Diesen Vorgang kann man beliebig wiederholen. Man entdeckt so immer neue Primzahlen. Deswegen musst du einsehen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
Viele liebe Grüsse *Tamina*

In der folgenden Woche erfolgt ein kurzes Nachgespräch: „Ich bedanke mich nochmals für eure ausführlichen, die wohlwollenden und die kritischen Rückmeldungen. Das Echo ist durchwegs gut bis sehr gut. Einige von euch schätzen es offenbar, bei einem Thema zu bleiben und mehr in die Tiefe zu gehen. Das Abstreichen haben einige gern gemacht, für andere, insbesondere diejenigen mit hohen Zahlen, war es zum Teil mühsam. Der Siebgedanke war einleuchtend und hat gefallen. Vielleicht werde ich in Zukunft den Siebgedanken zu Lasten des Abstreichens ausbauen. Die Elferregel und der Zahlentrick haben euch fasziniert und zum Teil zum Weiterexperimentieren animiert.“ Auf Nachfrage erfahre ich, dass ein paar wenige Schüler den Trick zuhause vorgeführt haben. Niemand hat ihn aber weiterentwickelt. „Die zeitweilige Ungewissheit, ja Verunsicherung auszuhalten, war für einige von euch schwierig, besonders am Morgen mit den drei Lektionen hintereinander. Umso eindrücklicher waren am Schluss der Durchbruch, das Aufatmen, die Erlösung, aber auch der Stolz, dass wir es selbst herausgefunden haben. Das Briefschreiben, einzeln und dann gemeinsam, hat offenbar bei vielen von euch noch wesentlich zur Klärung beigetragen. Der Beweis bei Euklid ist wirklich nicht ganz einfach zu verstehen, aber mit etwas Anstrengung geht es. Und staunen dürfen wir ja schon, dass die Griechen bereits vor 2300 Jahren diesen Beweis so knapp und präzis geführt haben. Das Blatt mit den verschiedenen Aufgaben war anspruchsvoll und bot zusätzliche Kenntnisse über die Primzahlen. Es regte viele an zum Experimentieren und Weiterdenken. Einige von euch würden gerne wieder so arbeiten. Ich kann euch jetzt schon ankündigen, dass wir nach dem Pythagoras und den Primzahlen gegen Ende dieses Schuljahres mit einem weiteren Lehrstück arbeiten werden.“ Von Schülerseite erfolgen weder Nachfragen noch Ergänzungen. Sowohl Raffaël A (4), der den Beweis noch nicht als vollständig erachtete, als auch Tobias (13), der mit dem Abstreichen bei höheren Zahlen Schwierigkeiten hatte, scheinen ihre Unklarheiten bereinigt oder das Interesse daran verloren zu haben. Dies war der letzte Schritt des mehrstufigen Abschlusses dieser Unterrichtseinheit über die Primzahlen.

2.6 Didaktische Interpretation

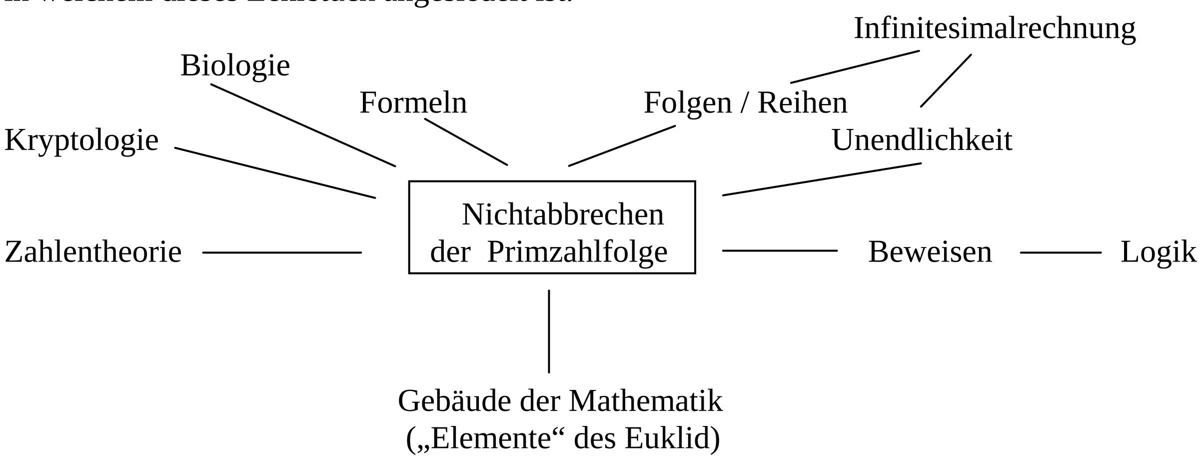
a) Methodentrias

Exemplarisch
Beim Betrachten des Zahlenstrahls mit den natürlichen Zahlen fallen zuerst die geraden Zahlen, die Dreier- und die Fünferzahlen, dann die Quadratzahlen auf. Ihre Gesetzmässigkeit ist bald einmal durchschaut, man sieht, wie es weitergeht. Aber die Primzahlen, das Herzstück der Zahlentheorie, fordern uns durch ihre scheinbare Unregelmässigkeit heraus. Zwar wird bald einmal klar, dass ihre Dichte abnimmt, aber ob sie irgendwo aufhören? Ob es überhaupt unendlich viele Primzahlen gibt, wie es unendlich viele Quadratzahlen gibt? „Wir können es nicht wissen“, ist eine immer wiederkehrende, nahe liegende Schülerantwort. Diese faszinierende Fragestellung, die schon vor mehr als 2300 Jahren die Denker beschäftigte und auf die sie eine schlüssige Antwort fanden, kann auch heute noch fesseln. Es liegt nahe, Vermutun-

gen aufzustellen, erste Erklärungen zu suchen, konkrete Formeln herzuleiten, zu prüfen, zu verwerfen, neue Wege zu gehen bis wir fast urplötzlich zur leuchtenden Erkenntnis vorstossen. Diese will schliesslich noch klar strukturiert und formuliert sein, bis dieses Musterbeispiel eines indirekten Beweises tief in uns verankert ist. Und so können wir, wenn wir uns genügend intensiv mit der Frage auseinandersetzen, an diesem speziellen Beispiel wie Wagenschein (1980, S. 228) formuliert: „erfahren, was es heisst, mathematisch zu denken.“ David (18) drückt es im Feedback auf seine Art aus: „Wir schauen nicht einfach irgend ein Thema an, arbeiten es durch, beenden es (und vergessen es), sondern wir „versinken“ mit ihnen tief in dem Thema und besprechen zusammen auch, warum das so ist, oder probieren das Gegenteil zu beweisen. Diese Art von Unterricht finde ich Spitze!“

Bei unserer Fragestellung kommen wir in Bereiche, wo unsere Wahrnehmung nur noch unscharf ist oder ganz aufhört? Wir extrapolieren mit dem Denken über unsere Sinne hinaus. An dieser uralten Fragestellung erleben wir, wie wir mit unserem Denken bis ins Unendliche hinaus Schlüssiges beweisen können. Je weiter wir in den Makrokosmos oder in den Mikrokosmos vorstossen wollen, desto mehr sind wir auf unser Denken angewiesen. Aber wir wissen jetzt, denn wir haben es erfahren, dass es möglich ist, selbst über diese unendlichen Weiten schlüssige Aussagen zu finden. Insofern ist es sicher auch eine „Sternstunde der Menschheit“, was Euklid mit seinem Beweis bereits vor 2300 Jahren in seinen „Elementen“ formulierte und was wir heute an der gleichen Fragestellung erleben können.

Gleichzeitig ist es aber auch gut zu erfahren, dass es Probleme gibt wie die Goldbachsche Vermutung oder die Primzahlzwillinge, bei denen es uns bis heute nicht gelungen ist, die letzte Wahrheit zu ergründen. Wird es uns je gelingen? Unser Denken ist nicht allmächtig, aber auch nicht ohnmächtig! Die thematische Landkarte soll das Verbindungsnetz aufzeigen, in welchem dieses Lehrstück angesiedelt ist.



Genetisch:
Die zentrale Fragestellung ist über 2300 Jahre alt. Obwohl wir über die Kulturgenese der Antwort nichts wissen, die Frage wurde bereits damals beantwortet und sie fasziniert auch heute noch. Wir durchleben und durchleiden den ganzen Werdegang von der einfachen, aber herausfordernden Fragestellung bis zur klaren Erkenntnis. Ohne grosse Vorkenntnisse und mit wenig Uferhilfe können die Klasse und darin jeder einzelne trotz Abgründen und Verzweiflung im Erfahrungs- und Erkenntnisprozess fortschreiten und den Weg zur Antwort auf die Frage finden. Dieses eigene Entdecken ist möglich ohne weit hergeholte Konzepte. Jeder kann sofort verstehen, wie es der andere meint und die Überprüfung oder Gegenargumente helfen weiter.

Mit den Händen schaffen wir unser farbiges Gemeinschaftswerk, mit den Augen betrachten wir die Quellen und ihre Strahlen, welche die natürlichen Zahlen bis ins Unendliche durchfluten. Die Frage, ob nicht in weiter Ferne alles durchleuchtet ist, hängt bildlich vor uns. Dieses Bild regt uns immer wieder zum Nachdenken an und begleitet uns durch den ganzen Prozess.

Euklids Argumentationsweise ist stärker geometrisch geprägt, die Unterschiede zu unserem Beweis sind aber nur gering. Die Schülerinnen und Schüler können seinen Beweis jetzt verstehen, auch wenn uns die Ausdrucks- und Darstellungsweise von damals ungewohnt ist.

Dramaturgisch
Beim Betrachten des Zahlenstrahls und im Vergleich mit anderen Zahlen ziehen die Primzahlen mit ihrer Unregelmässigkeit die Aufmerksamkeit auf sich. Beim Anwärmen und Vertrauen Finden in diese Primzahlen zeigt sich bald die Kernfrage: „Gibt es unendlich viele Primzahlen?“ Diese Frage erzeugt den Sog und bestimmt die ganze Unterrichtseinheit.

Der erste Akt ist stark durch das Handeln bestimmt. Die Suche nach Primzahlen benötigt Farben und Linien, ein ästhetisches Gemeinschaftswerk entsteht. Die gefundene Methode weist uns einen Weg, wie wir zu weiteren Primzahlen kommen können und sie liefert eine Primzahltabelle für den späteren Gebrauch. Zudem leuchtet die Kernfrage nach dem Abbrechen der Primzahlfolge bildlich vor Augen. Wie werden wir sie entscheiden? „Wir können es nicht wissen!“, sagen Schüler. Ins Unendliche reichen unsere Sinne nicht! Stehen wir hier etwa vor einer Frage, deren Antwort wir nicht wissen, vielleicht nie wissen können?
Im zweiten Akt gilt es, mit unserem Denken weiterzukommen. Ein langer Suchprozess mit Formeln beginnt. Gerade in diesem zentralen Teil des Lehrstücks wird das Stück immer improvisationsoffen bleiben, denn der Lehrer weiss nie, was die Schüler schon wissen oder plötzlich von aussen in eine neue Stunde hineinbringen. Das gemeinsame Probieren, das Scheitern, das Verzweifeln und das Aushalten der Unsicherheit sind für einige der Schüler und Schülerinnen zeitweise schwierig. Andere halten durch wie Marino (6): „Trotz den ‚Rückschlägen’ war man motiviert, immer wieder Neues zu testen, dass alle andern es auch noch nicht sofort hatten und am Testen waren, gab einem Motivation, gemeinsam zu suchen.“ Der Wunsch, die Wahrheit endlich erklärt und präsentiert zu bekommen, wird aber mehrfach geäussert. Dank unserer Beharrlichkeit taucht dann plötzlich beim genaueren Betrachten des Scherbenhaufens, wie der Phönix aus der Asche, die leuchtende Erkenntnis auf, abermals ein Gemeinschaftswerk der ganzen Klasse. Erleichterung und Entspannung sind zu spüren. Raffaël A (4) beschreibt sie so: „Die Formel der endgültigen Erkenntnis, es gäbe unendlich viele Primzahlen, war auch für mich erleichternd, da es für mich ein wenig zu lange dauerte, bis wir die Lösung hatten.“
Im Finale wird mit dem Brief an Paul der Höhepunkt festgehalten, die Erkenntnis als indirekter Beweis formuliert. Er dient zur Vergewisserung und Bestätigung. Schülerin Tamina: „Den Brief fand ich gut. Denn endlich wurde das „Gestürm“ in meinem Kopf (von den letzten Lektionen) ein wenig ‚geordnet’.“ Mit dem Brief gewinnt die Arbeit eine ansprechende Form. Sie lässt sich einreihen und vergleichen mit den Darstellungen bei Euklid und bei Wagenschein. Im Nachgang wird vertieft, auf Anwendungen hingewiesen, Rückschau gehalten und Ausblick gegeben: Eine Abrundung, die Perspektiven aufzeigt.
Diese Unterrichtseinheit über die Primzahlen ist sehr eigenständig, bedarf keiner grossen Voraussetzungen und muss nicht in einem bestimmten Abschnitt oder Kapitel eines grösseren Zusammenhangs platziert sein. Sie ist aber beispielhaft für mathematisches Denken und für den Umgang mit dem Unendlichen, dem Kernanliegen der Mathematik.

b) Die acht Gestaltungsschritte

Lehrstücke entstehen in Lehrkunstwerkstätten. Auf dem Weg zum gereiften Lehrstück werden üblicherweise 8 Gestaltungsschritte durchlaufen. Dieser Vorgang verläuft mit unterschiedlicher Intensität und oft nicht linear, sondern mit Schleifen und Unterbrüchen. Am Beispiel meines Lehrstücks zu den Primzahlen will ich aufzeigen, wie dieses durch die verschiedenen Schritte Gestalt gewonnen hat.

1. Wegweiser zu exemplarischen „Sternstunden der Menschheit" aufspüren
Die Unregelmässigkeit der Primzahlen (die schliesslich doch wieder gewissen Regeln gehorchen) hat auch für mich als Lehrkraft viel Anziehendes und Geheimnisvolles. Hier gibt es Zwillinge, Drillinge und rasch formulierte und verstandene Vermutungen, die zum Teil bis heute nicht bewiesen sind. Und dann die sich aufdrängende zentrale Frage: „Gibt es unendlich viele Primzahlen?", auf die Schüler öfters antworten: „Das kann man nicht wissen." Und ob: Euklid hat die Antwort gewusst und bewiesen. Wagenscheins einziges ausführlich beschriebenes Lehrstück behandelt dieses Thema und von Wilhelm Werner liegt eine schriftlich dokumentierte Weiterführung vor. Diese Vorlagen forderten mich zu einer Neuinszenierung heraus, insbesondere da Wagenschein im Einstieg einiges offen lässt und seine Anregung, eine Primzahltabelle zu erstellen, von Werner nicht aufgenommen wurde. Zudem liebe ich das Nachdenken über das Unendliche. Es ist wohl der reizendste Gegenstand der Mathematik und ein zentrales Thema unseres Lebens überhaupt. Eindrücklich lässt sich am Beispiel der Primzahlen mit geringen Vorkenntnissen eine klare Aussage über die Unendlichkeit erringen. Mit einer Klasse den Weg bis zu dieser Erkenntnis zu gehen, lockt als ein spannendes und lohnendes Abenteuer.

2. Schulpädagogik: Bildung im Kulturhorizont und Schule zusammenstimmen
In der Schule tauchen die Primzahlen schon früh beim Addieren, Subtrahieren und Kürzen von Brüchen auf. Im Rahmen der Betrachtung von Zahlmengen und deren Teilmengen erscheinen diese Primzahlen wieder und bieten sich an als Gegenstand genauerer Betrachtung. Der sich hier aufdrängende klassische Beweis ist ein Musterbeispiel einer indirekten Beweisführung. Wir betreten einen anspruchsvollen Weg, der uns zurück zu fundamentalen Quellen der Mathematik, zu Euklid und Eratosthenes führt. Wir erfahren an diesem elementaren Beispiel, „was es heisst, mathematisch zu denken." Dies alles ist es wert, dass wir uns dafür im Unterricht die Zeit nehmen, auch wenn die Auseinandersetzung mit den Primzahlen nicht explizite im Lehrplan vorgesehen ist. Zu beachten ist, dass zwischen den Lektionen nicht allzu grosse Unterbrüche liegen, da sonst das Feuer jedes Mal wieder mühsam zum Brennen gebracht werden muss und deshalb kein lebendiger Dauerprozess in Gang kommen kann.

3. Didaktik: Stoff und Kind analysieren – Lehrstück dichten gemäss der lehrkunstdidaktischen Methodentrias „exemplarisch-genetisch-dramaturgisch"
Die Primzahlen mögen wohl in den Augen der Mathematiker Perlen sein, für die Jugendlichen müssen sie vorerst ins Blickfeld geholt werden. Über den ausgebreiteten Zahlenstrahl und das handlungsorientierte Wiederentdecken des Siebs von Eratosthenes sollte eine Annäherung, ja Anfreundung mit den Primzahlen möglich sein. So wird zudem eine Primzahltabelle generiert, wie sie Wagenschein (1980, S. 230, Fussnote) anmerkt. Erst jetzt hat die Kernfrage ihren Nährboden, aus dem sie sich erheben kann, ja natürlicherweise erheben muss. Von da an kann der Prozess seinen Lauf nehmen wie bei Wagenschein und Werner. Die Forderung nach einer Formel, mit der sich die Primzahlen packen lassen, wird wach. Es lohnt sich, gemeinsam zu suchen, zu diskutieren bis zum grossen Scheitern und zur Verzweiflung;

um dann beispielhaft zu erleben, wie gerade dieses scheinbare Scheitern eine ungeahnte Wende bringt, den Durchbruch und die einfache Erkenntnis. Der Weg dazu lässt sich jetzt gemeinsam glasklar formulieren. Dramatischer kann es fast nicht gehen. Und so werden gerade zwei Dinge wieder entdeckt: das anschauliche Sieb des Eratosthenes und der eindrückliche Beweis von Euklid für die Unendlichkeit der Primzahlen.

4. Methodik: Lehrstück unterrichtshandwerklich, unterrichtstechnisch ausgestalten

Meine Unterrichtsausgestaltung passierte zu einem schönen Teil in Marburg: in der stillen Kammer, in vielen Gesprächsstunden mit Prof. Berg und im Seminar angehender Mathematiklehrer. Der ursprünglich an die Wand geklebte Zahlenstrahl wurde zur ins Unendliche abrollbaren Zahlenrolle im Zentrum der Klasse. Der Zahlenstrahl bildet den Ausgangspunkt, die Primzahlen werden zum Gegenstand des Interesses. Die Primzahlsuche führt zum „Sieb des Eratosthenes". Verschiedene Darstellungen weisen schliesslich auf die vorteilhafte Einteilung mit 30 Zahlen in jeder Kolonne. Erst später zeigte sich die Übereinstimmung mit einer bei uns verbreiteten Primzahltabelle. Das farbige Gemeinschaftswerk als erster Höhepunkt kann entstehen. Ein Siebmodell aus Papier mit Löchern, durch das die zusammengesetzten Zahlen „fallen" können, entwickelte ich erst kürzlich. Wenn sie sich nicht schon vorher aufgedrängt hat, erwächst spätestens jetzt die zentrale Frage nach dem Abbrechen der Primzahlfolge. Eine „magische" Formel soll die Lösung bringen, aber wie muss sie aussehen? Nach dem Scheitern der verschiedenen Ansätze führt uns ein unerwartetes „Aha"–Erlebnis zum Höhepunkt der Einsicht und zur klaren Formulierung eines überzeugenden Briefes an jemanden, der behauptet, es gebe nur endlich viele Primzahlen. Dies verdeutlicht die indirekte Führung des Beweises. Das Drama könnte hier mit Rückblick auf den Prozess aufhören. Das Lehrstück braucht aber zum Schluss etwas Verbreiterung und Vertiefung durch ausgewählte Aufgaben. Das Bedürfnis der Schülerinnen und Schüler, sich noch individuell mit verschiedenen Aspekten dieser inzwischen vertrauter gewordenen Primzahlen auseinanderzusetzen, bestätigt dies immer wieder. Das Gruppengeschehen wechselt zwischen Plenum und Kleingruppen, individuell geht der Prozess weiter zwischen den Stunden. Gegen Schluss formuliert jede Schülerin und jeder Schüler einzeln den Brief und bekundet damit, inwieweit die Argumentation verstanden ist. In den Inszenierungen von 2002 habe ich eine 12. Stunde als Schlussstunde für Überblick, Rückblick auf den Prozess, Feedback und weitere Hintergrundinformationen verwendet.

5. Unterricht als lebendiges Mitspielstück inszenieren

Das Lehrstück habe ich bereits viermal mit einer Quarta inszeniert, die benötigte Zeitdauer schwankte zwischen 8 und 12 Lektionen. Der Ablauf ist immer wieder sehr ähnlich. Im Anfang sind es der Zahlenstrahl, die Primzahlen als Bausteine der Multiplikation und dann die Suche nach diesen Primzahlen, welche das Geschehen bestimmen. Von da an läuft der Prozess offener. Wie bei kaum einem andern Lehrstück spielen die Phasen zwischen den Unterrichtslektionen eine Rolle: Es wird viel nachgedacht und argumentiert, mit den Eltern diskutiert, in Büchern oder im Internet recherchiert. Der Stundenanfang in der mittleren Phase ist jedes Mal ein spannendes Abenteuer: Wo stecken die einzelnen Schülerinnen und Schüler im Erkenntnisprozess? Kommt plötzlich eine neue Überzeugung, Erkenntnis ins Spiel? Die neuen Puzzleteile müssen immer wieder gesichtet, reflektiert und verarbeitet werden. So entsteht ein kontinuierlicher – aber für die Lehrkraft im Einzelnen wenig vorhersehbarer – Lernprozess. Das Neuformulieren des Erkenntnisstandes und die Auseinandersetzung mit neu eingebrachten Ideen – soweit vorhanden – bringt Schwung in die Klasse. Die Gefahr besteht allerdings, dass zwischendurch bei einzelnen Schülerinnen oder Schülern der Geduldsfaden reisst, die Resignation überhand nimmt und das Interesse erlahmt, bevor der Durchbruch gelingt und die Erkenntnis klar in Worte gefasst auf dem Papier steht. Es ist ein anspruchsvoller Weg, der uns bis zu den Wurzeln der Mathematik führt.

6. Unterricht realistisch erzählen und aufschreiben

Eine erste Fassung entstand im Herbst 2001, unmittelbar während und nach der ersten Durchführung. Sie diente mir als hilfreiche Grundlage für die folgenden Inszenierungen. Von meiner vierten und bisher letzten Durchführung im November 2002 ist die in diesem Kapitel eingefügte Beschreibung entstanden.

7. Unterricht interpretieren und evaluieren

Für die Evaluation habe ich Schülerrückmeldungen in Tabellenformat zusammengestellt. Der Einstieg wird sehr geschätzt, da viel Bekanntes wieder neu angeschaut werden kann und Neues über Primzahlen Erstaunen auslöst. Das Abstreichen der Zahlen im Gemeinschaftswerk wird von den einen als geniale Idee, von den andern als Zeitverschwendung wahrgenommen, insbesondere bei denjenigen, die sich mit den grösseren Zahlen befassten. In den ersten Inszenierungen hatte ich 20 Zahlblätter, also Zahlen bis $20 \cdot 210 = 4200$, heute beschränke ich mich auf etwa 10 bis 12 Blätter, um die mühsamen Blätter mit den grossen Zahlen auszuschalten. Die Grundideen und Grundprinzipien bleiben dieselben. Die lange Formelsuche faszinierte, löste aber Verzweiflung aus. Für einige Schüler war es schwierig, so lange an der Sache dran zu bleiben und die Unsicherheit auszuhalten. Deshalb tauchte zwischendurch öfters der Wunsch nach Aufgaben und Übungen auf, was allerdings den konzentrierten Prozess zur Erkenntnisfindung stören würde. Im Gesamtrückblick wird diese Unterrichtseinheit mit dem „Versinken“ in das Thema sehr positiv beurteilt. Am Schluss überwiegen die grosse Genugtuung und der Stolz, dass wir es trotz der zwischenzeitlich tiefen Verzweiflung doch geschafft haben. Trotzdem ist nicht zu übersehen, dass die einzelnen Teile *sehr* unterschiedlich wahrgenommen, erlebt und beurteilt werden. Für mich ist dies ein Hinweis, wie wichtig Methodenvielfalt im Kleinen wie im Grossen ist, und dass wir im Klassenverband noch öfters auf der Metaebene kommunizieren sollten.

8. Lehrstück didaktisch-methodisch-ästhetisch präsentieren

Präsentiert habe ich dieses Lehrstück drei interessierten Fachkollegen unserer Schule nach den ersten zwei Inszenierungen. Die Reaktionen waren wohlwollend, zu Änderungen des Lehrstücks gaben sie keinen Anlass. Für mich war es hilfreich, das Lehrstück für einmal als Ganzes aufzubauen und durchzugehen. Im März 2003 stellte ich dieses Lehrstück in der Berner Lehrkunstwerkstatt V vor. Dabei erhielt ich einige wichtige Hinweise zur Optimierung der schriftlichen Fassung. Erstmals präsentierte ich dort meinen Einstieg mit dem Zahlenstrahl und mein „Löchersieb“ aus Papier. Beide stiessen auf reges Interesse.

2.7 Das Lehrstück in der Fachschaft

Die bisher einzige Präsentation an der Schule fand am 15. November 2002. Grundtenor waren die Bedenken, ob wir uns das im 9. Schuljahr zeitlich leisten können, insbesondere da die Primzahlen nicht explizite im Lehrplan erwähnt sind. Einzig Daniel Wieland vom mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium zeigte sich verstärkt interessiert und studierte in der Zwischenzeit meinen Unterrichtsbericht. In den Unterricht hat er das Lehrstück allerdings noch nicht gebracht. Er erklärte mir kürzlich, dass er bis heute die Zeit nicht fand, um sich gründlich genug mit dem Lehrstück auseinanderzusetzen.

2.8 Die Ideengeschichte im Lehrstück

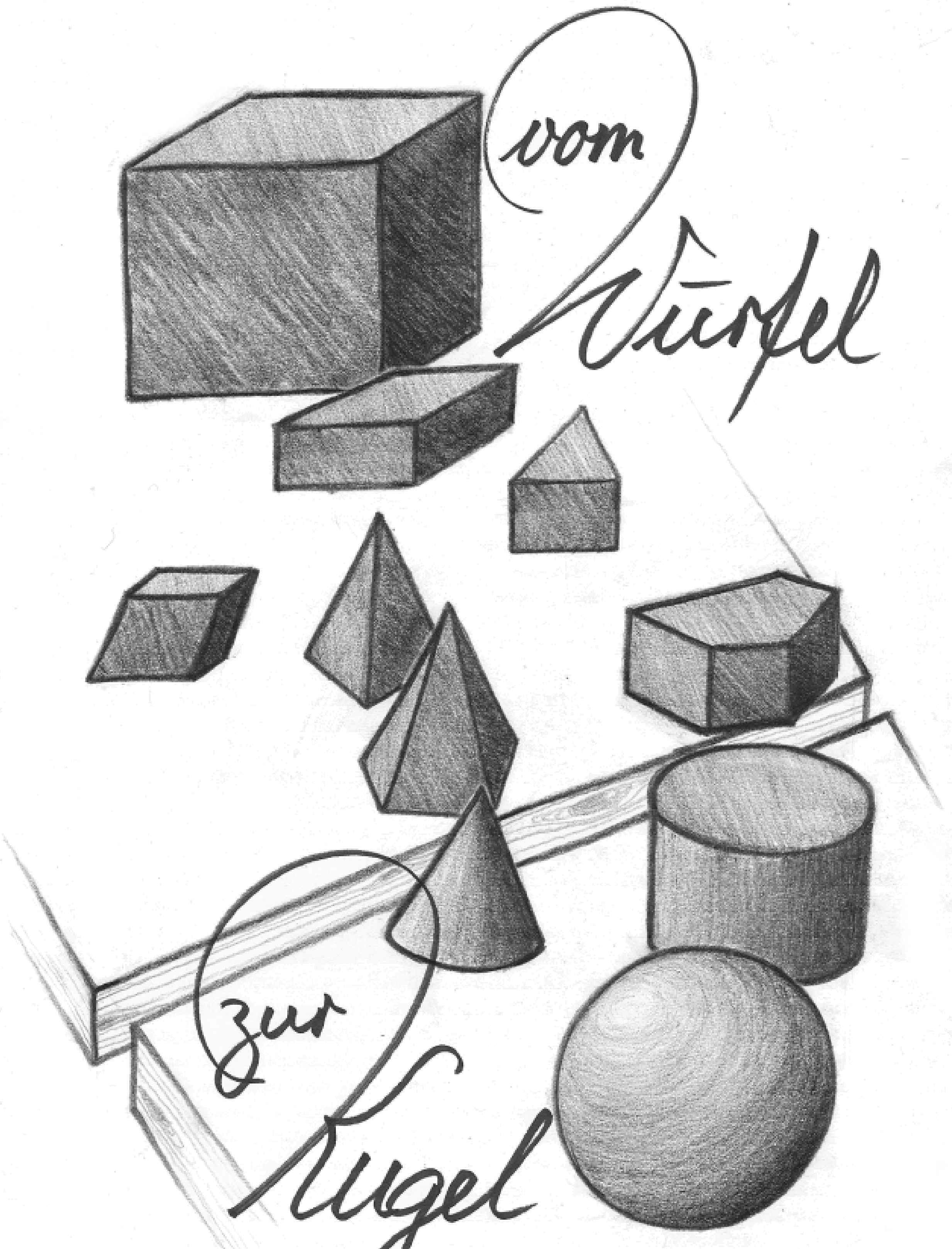
Am stärksten vertreten sind in diesem Lehrstück die Grundideen [1], [4] und [9]. Es geht hier nicht um klar definierte Grundlagen, sondern um das, was Wagenschein (1980, S. 228) meint mit „erfahren, was es heisst, mathematisch zu denken." Es geht darum, „das aktive Begreifen dieses souveränen Verfahrens" (ebd.) eindrücklich und nachhaltig zu erleben. Auch wenn wir von den sehr grossen Primzahlen nur noch einzelne kennen, gibt uns unser beschränktes Denken die Gewissheit, dass es keine letzte Primzahl gibt. Und wieder einmal landen wir beim typisch mathematischen „End-Ergebnis: ‚lächerlich klar'. – Warum lächerlich?: Aus dem Gegensatz: Das anfangs undurchdringlich dunkel Erscheinende ist am Ende völlig durchsichtig, ‚klar' geworden." (ebd. S. 217). Der intensive Denkprozess dazwischen, das zähe Ringen, Verzweifeln und Neubeginnen bis zum erlösenden Durchbruch und zur klar strukturierten Erkenntnis, das ist das Wesentliche. Zum Denkgebäude der Mathematik gehört auch das Kennen von Fragestellungen, die noch nicht beantwortet sind, mit denen sich noch heute Wissenschafter auseinandersetzen. Das Problem der Primzahlzwillinge und die Goldbachsche Vermutung sind leicht verständliche Beispiele. Für Thomas (19) war es „faszinierend, dass es noch solche Sachen in der Mathe gibt, die man noch nicht beweisen konnte."

Wir tauchen intensiv in die Welt der Zahlen [4] mit ihren multiplikativen Bausteinen, den Primzahlen, und den daraus zusammengesetzten Zahlen. Verschiedene Strukturen, Regeln und Gesetzmässigkeiten fallen auf. Alissa (10) äussert sich begeistert: „Es vereinfacht einem das Rechnen! Ist auch spannend, was man alles mit Zahlen anstellen kann. Auch, dass diese Regel wirklich funktioniert. Faszinierend!" Den Primzahlen begegnen wir im Alltag ausser beim Bruchrechnen höchstens am Rande, z.B. bei der Verschlüsselung von Nachrichten oder bei Lebenszyklen von Zikaden. Die Primzahlen sind widerspenstig und deshalb herausfordernd, sie scheinen sich jeder Gesetzmässigkeit zu entziehen. Nur durch mühsames Ringen kann man ihnen das eine oder andere Geheimnis entlocken. Ganz konkret stossen wir mit unserem Lehrstück gegen das „Unendliche" im Grossen vor [9]. „Das kann man doch nicht wissen." ist eine erste Reaktion auf die Frage, ob es unendlich viele Primzahlen gebe. Sie weicht schliesslich der überraschenden Gewissheit, dass wir wissen, ja sogar beweisen können, dass es mehr als eine endliche Anzahl, ja dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Ja noch erstaunlicher, dass den Griechen vor mehr als 2300 Jahren diese Erkenntnis und der Beweis dazu bekannt waren, obwohl damals im Alltag kaum Zahlen über 10'000 (eine Myriade) verwendet wurden.

Auf der Suche nach einer nützlichen Formel wie 2n+1 oder 6n+1 befassen wir uns mit der Grundidee [7]. Wir entwickeln und testen die verschiedensten Formeln, erleben aber deren Scheitern. Diese Erfahrungen lassen uns schliesslich mit $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ eher bei einem algorithmischen Ansatz [8] Zuflucht nehmen, der den Durchbruch bringt. Dieser Ansatz ist zwar nicht praktikabel, aber er garantiert uns theoretisch immer weitere Primzahlen und liefert damit den Beweis für das Nichtabbrechen der Primzahlfolge.

Im Überblick mag wiederum eine Tabelle die Repräsentanz der zentralen Ideen in diesem Lehrstück verdeutlichen:

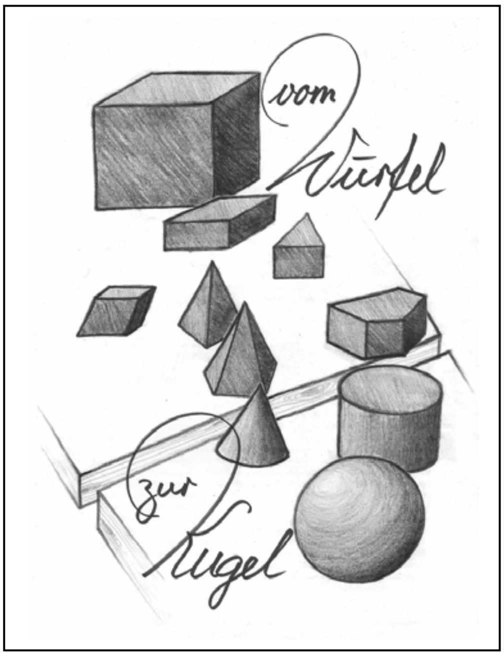
Grundidee	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**	**[6]**	**[7]**	**[8]**	**[9]**	**[10]**
Repräsentanz	● ● ●	●		● ● ●			● ● ●	● ●	● ● ●	


vom
Würfel
zur
Kugel

3. VOM WÜRFEL ZUR KUGEL MIT ARCHIMEDES

(Formen – Formulieren – Formeln)

Ein Lehrstück zur Stereometrie
für die 9. Klasse des Gymnasiums



3.1 Einleitung, sowie Vorlagen von Martin Wagenschein

Die Berechnung von Körpern (Stereometrie) in der Mathematik wird oft zu einem leidvollen, trockenen Thema mit vielen Formeln. Wenn wir versuchen, den historischen Prozess, die Ideen von Euklid und insbesondere diejenigen von Archimedes einzubeziehen, gewinnt das Ganze an Spannung. Mathematisch gesehen, lassen sich dabei das Prinzip der *Intervallschachtelung* und dasjenige der *Rekursion* erleben, welche beide heute noch von grosser Bedeutung sind. Das von Archimedes entwickelte mathematische System kommt in vielem der modernen Infinitesimalrechnung nahe. Wir staunen über die Komplexität und logische Schärfe, mit der Archimedes vor rund 2250 Jahren argumentiert hat. Noch in diesem Jahrhundert ergänzten neue Entdeckungen unser Bild von Archimedes. Sie zeigen, wie er die gegensätzlichen Fähigkeiten des praktischen Ingenieurs und des theoretischen Mathematikers in genialer Weise verband. Mit dem Einbezug praktischer Überlegungen zur Gewinnung neuer Erkenntnisse (seiner sogenannten *Methode*; z.B. Bestimmung des Kugelvolumens) und der Anwendung von theoretischen Erkenntnissen in der Praxis (z.B. Hebelgesetz) steht er im Gegensatz zur reinen Ideenlehre von Platon. Archimedes legte damit den entscheidenden Grundstein zur Entfaltung der Naturwissenschaften.

Die Idee zu diesem Lehrstück entstand in der Berner Lehrkunstwerkstatt, einer Weiterbildungsgruppe der Berner Lehrerfortbildung unter der Leitung von Prof. Christoph Berg. Im September 1995 lasen wir den Text „Zweierlei Wissen“, in dem der Autor Martin Wagenschein (1980. S. 278f) zwei Betrachtungsweisen des leuchtenden Vollmondes ins Zentrum stellt: Die runde Scheibe und die gewölbte Halbkugel. Bald landeten wir bei folgenden Fragen: „Wie lässt sich die Oberfläche der Kugel berechnen?“, „Welchen Prozentanteil des

Martin Wagenschein:

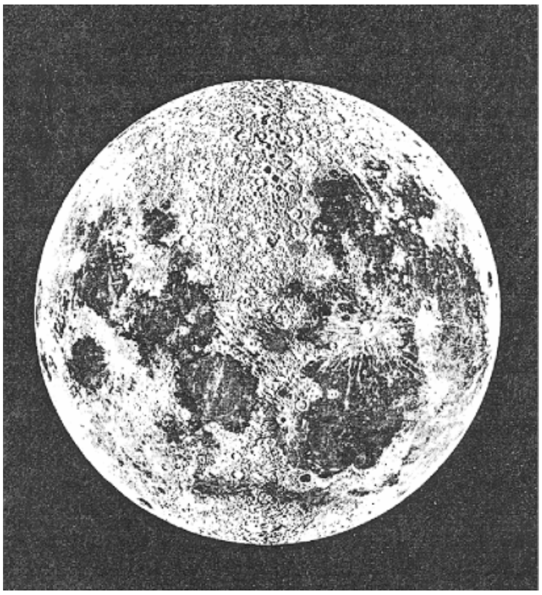
Zweierlei Wissen

Als er Kind war, Schüler, Jüngling, Student, da sagte man ihm: $4\pi r^2$, so rechnet man die Fläche der Kugel aus. 4 mal diese Zahl (die etwa 3.14 ist) mal r, der Länge des Halbmessers, und dann mal r noch einmal. Auch bewiesen hatte man es; es ging auf die Griechen zurück.

Erst als er dann später, dreissig Jahre alt, begann, eben dies die Kinder zu lehren, bemerkte er, dass es sich auch anschauen liess, ja ursprünglich von den Griechen angeschaut worden war und auch nur angeschaut werden konnte. Dass dieses $4\pi r^2$ nur eine späte Kurzschrift ist, gemacht für die Berechnenden, nicht mehr für die Schauenden; ein Automat, zu bedienen von jedermann. Dass es ja als „ $4\pi r^2$ “ nichts anderes sagte, als dass die Kugeloberfläche genau viermal so gross sei als πr^2. Dies πr^2 aber war die Rechenvorschrift für die Fläche des „grössten Kreises“ der Kugel, den sie, durch ihre Mitte aufgeschnitten, sehen lässt. So ist also, was uns der Apfel in der greifenden Hand als Schale bietet, vierfach das, was er von seinem Innern preisgibt, wenn wir ihn geradewegs mitten durchschneiden und auf die frische Innenfläche blicken.

In seinem einundfünfzigsten Jahr schaute er eines Abends die goldene Mondscheibe an, wie sie über dem Wald aufstieg: da sah er es noch einmal neu! So sehr war es das Alte und doch wieder etwas Neues, dass es ihn überraschen und entzücken konnte. Der Mond, so sagte er sich, wie sehe ich ihn doch noch immer so, wie ihn die Kinder sehen und vielleicht wir alle, wenn wir nicht gerade dabei *denken*: als ein flaches Goldblech, an den Himmel geheftet! Obwohl ich weiss, was ja nicht ohne weiteres zu sehen ist, und was irgendwann einmal, vor Sokrates, ein Mensch von eindringlichster Anschauungskraft zum erstenmal eingesehen haben muss - obwohl ich weiss, dass er als Ball im Raum hängt und mir seine Wölbung entgegenrundet.

Da begann er zu grübeln und zu schätzen, wievielmal nun wohl diese von ihm gesehene, wirklich gewölbte Mondfläche grösser sei als sie, fälschlich flach gesehen, erscheint; - Bis es ihn durchzuckte, dass er das seit langem wusste (und wohl doch nicht wusste?): dass sie ja eben genau doppelt so gross sein müsse: Denn wenn die ganze Kugel ihren grössten Kreis viermal fasst, so muss ihn die halbe Kugel, die allein ich ja übersehen kann, zweimal enthalten. Dieser grösste Kreis ist aber gerade das, was ich vom Mond zu sehen *glaube*, indem ich ihn als flachen Teller nehme. Zweimal mehr Fläche bietet mir der Mond, als ich zu sehen meine. Und so ist es bei jeder Kugel, wenn ich sie weit genug von mir halte. Aber der Mond hatte es ihn gelehrt, was der Ausdruck $4\pi r^2$ oder $2\pi r^2$ im Grunde sagen will.



So verschmolz ihm die griechische Entdeckung der Formel für die Kugelfläche mit der anderen griechischen Einsicht, dass der Mond nicht Scheibe, sondern Kugel sei, Halbkugel, soweit wir ihn überblicken. (. . . .) Damals bei den Griechen erwuchs diese Blüte. Und nicht nur, dass sie es wussten: sie erwiesen es auch, dass es so und nicht anders sein müsse. So rund und glatt das Ergebnis, so wussten sie doch, es war ein feiner, ein unendlicher Prozess zu überstehen, ehe man es erkennen konnte. Sie dachten ihn zu Ende, und ihr Scharfsinn liess sie einen Fund machen von einfachster Anschaulichkeit, der golden an ihrem Himmel stand.
(Wagenschein, 1980, S. 278f)

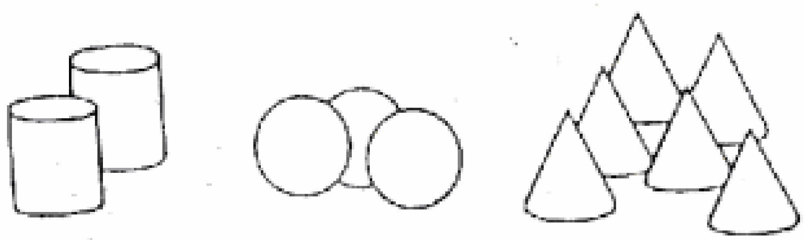
Martin Wagenschein

Kern und Schale runder Dinge

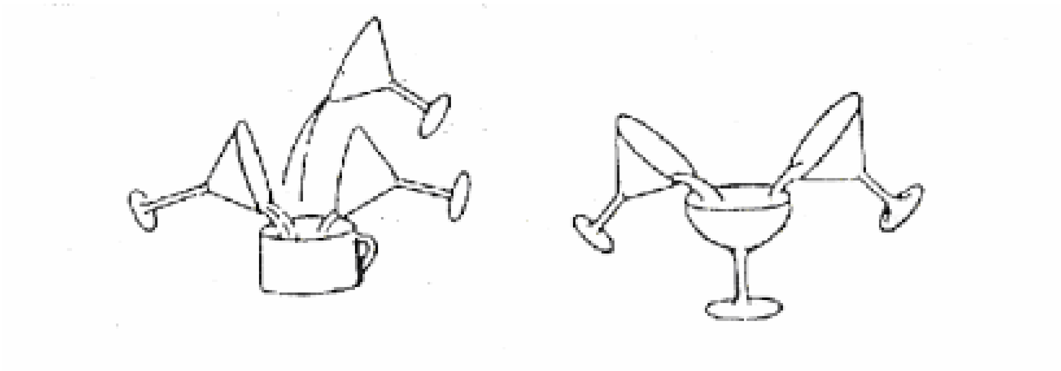
Formeln genügen nicht. Formelsammlungen, wie zum Beispiel diese:

	UMFANG	FLÄCHE	VOLUMEN
QUADRAT	$4a$	a^2	---
KREIS	$2\pi r$	πr^2	---
WÜRFEL	---	$6a^2$	a^3
ZYLINDER	$2\pi r$	$2\pi r^2 + 2\pi rh$	$\pi r^2 h$
KEGEL	---	$\pi r^2 + \pi rs$	$\pi r^2 h / 3$
KUGEL	$2\pi r$	$4\pi r^2$	$4\pi r^3 / 3$

haben etwas Trockenes und Abschreckendes für den, der die Mathematik nicht kennt oder sich von ihr entfernt hat, so dass er die Zeichen nicht oder nicht mehr auf die rechte Art zu lesen weiss. Und doch sind sie nichts als eine Kurzschrift für höchst anschauliche und merkwürdige Zusammenhänge, die sich auch in Worten sagen lassen und dann von jedermann verstanden werden können. Ja, ursprünglich, von den Mathematikern des alten Griechenlandes, konnten sie nur in Worten gesagt werden, und erst später wurden sie in die geniale und nützliche, aber für den Unbelehrten dunkle Kürze der Formel gedrängt. (...)
In vielen der hier zusammengestellten Formeln, steckt das merkwürdige Zeichen „π“. Es wird gesprochen „pi“ und ist der Geheimschlüssel für die Massverhältnisse aller runden (*kreis*-runden) Dinge. Es sitzt in unseren Rechnungen, mögen sie nun dem Räderwerk der Maschinen gelten oder den Bahnen der Gestirne oder den Elektronenwirbeln der Atome. (...)
So sehen wir überall denselben Gesetzgeber π am Werk, wo das Krumme und Runde in Beziehung gesetzt werden soll zum Geraden, Eckigen, Ebenen. Manchmal allerdings ist das Eckige, das πmal genommen werden muss, nicht so einfach, wie man es wünschen möchte. Aber man muss die Dinge nur auf die rechte Weise ansehen, dann werden sie einfach. Das Gerade und das Krumme sind nun einmal zueinander fremde Welten, und wenn man den Übergang von der einen zur anderen jedesmal, bei jedem neuen Ding, neu beschreitet, so kann man sich nicht wundern, wenn manchmal Engpässe zu durchschreiten sind.
Macht man es aber anders, geht man *ein*mal hinüber, an einer bequemen Stelle, gleich beim Kreis zum Beispiel, und bleibt dann drüben bei den runden Dingen, und setzt sie nun *untereinander* in Beziehung, so eröffnet sich ein grossartig einfaches Bild. Hier hat der Grenzpolizist π nichts mehr zu suchen.



Die 2 Eimer fassen soviel wie die 3 Ballen oder wie die 6 Tüten.



3 Kelche füllen einen Becher, 2 Kelche einen Römer.

Miteinander stehen die runden Dinge in den einfachsten Verhältnissen, die es gibt, denen der ganzen Zahlen! Auch das sagen uns diese Formeln. Die erstaunlichste Beziehung besteht zwischen Kegel, Kugel und Zylinder. Sie wurde gefunden und verstanden von dem griechischen Mathematiker ARCHIMEDES (gest. 212 v. Chr.), und sie enthüllt sich dann, wenn man diese drei Körper so wählt, dass sie ineinander genau *passen*, wenn man sie also über demselben Kreis aufbaut und alle gleich hoch macht, und also auch gleich breit. Dann zeigt sich nämlich, dass der Kegelinhalt sich genau zweimal in die Kugel und genau dreimal in den Zylinder füllen lässt. (...) Da dasselbe Verhältnis 1 : 2 : 3 auch für die *halben* Körper gilt, für die Halbkugel also und die zu ihr passenden Kegel und Zylinder, so kann man dasselbe auch an geeigneten *Gläsern* ausprobieren: 2 Kelche füllen den Römer, 3 Kelche den Becher.

(Wagenschein: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken, Band I 1965 S. 67-71)

Archimedes
Sätze über Zylinder und Kugel

Satz aus § 13: „Der Mantel eines jeden geraden Zylinders ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zwischen der Seitenlinie und dem Durchmesser der Zylinders.“ * (Archimedes 1996 S. 93)

Satz aus § 33: „Die Oberfläche der Kugel ist viermal so gross wie die Fläche ihres grössten Kugelkreises.“ (ebda S. 114)

Satz aus § 34: „Der Inhalt der Kugel ist viermal so gross wie der eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Fläche des grössten Kugelkreises und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.“ (ebda S. 115)

KOROLLAR: „Nach dem soeben Bewiesenen ist klar, dass jeder Zylinder, dessen Grundkreisradius gleich dem Radius der Kugel, und dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist, 1 ½ mal so gross ist wie die Kugel, und dass auch die Gesamtoberfläche des Zylinders 1 ½ mal so gross ist wie die Oberfläche der Kugel.
Denn der Inhalt des beschriebenen Zylinders ist sechsmal so gross wie der eines Kegels von gleicher Grundfläche und halber Höhe. Von der Kugel aber wurde gezeigt, dass ihr Inhalt viermal so gross sei. Es ist also klar, dass der Inhalt des Zylinders 1 ½ mal so gross ist wie der Inhalt des Kegels. Andrerseits ist bekanntlich der Mantel eines Zylinders gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zwischen der Höhe und dem Durchmesser der Grundfläche des Zylinders. Bei unserem, der Kugel umbeschriebenen Zylinder sind Höhe und Durchmesser gleich. Der Kreis aber, dessen Radius gleich dem Durchmesser der Zylindergrundfläche ist, ist viermal so gross wie

diese Grundfläche, d.h. also, wie die Fläche des grössten Kugelkreises. Demnach wird der Mantel des Zylinders viermal so gross sein wie die Fläche des grössten Kugelkreises. Die Gesamtoberfläche des Zylinders ist also sechsmal so gross wie die Fläche des grössten Kugelkreises. Aber die Oberfläche der Kugel ist viermal so gross wie die Fläche des grössten Kugelkreises. Die Oberfläche des Zylinders ist also 1 ½ mal so gross wie die der Kugel." (ebda S. 117)

* Anmerkung: r heisst **mittlere Proportionale** von s und d, wenn gilt $s : r = r : d$. Daraus folgt $r^2 = s \cdot d$.

Archimedes
Sandrechnung

Ein berühmter Versuch, in das dunkle „Viel" der grossen Zahlen vorzustossen mit dem Hauptzweck, das Zahlengebäude weit über alles irdisch Vorstellbare hinaus dem Unendlichen entgegenstreben zu lassen, ist die uns überlieferte *„Sandrechnung"* (griechisch *psammites*, von *psammos* = der Sand) von Archimedes. In einem Brief an König Gelon von Syrakus belehrt er diesen, dass des Sandes am Meer nicht unendlich sei. Folgen wir seinen Worten und damit auch den Worten von F. Müller, der dies so anschaulich beschreibt.

„Manche Leute glauben, König GELON, die Zahl der Sandkörner sei unbegrenzt. Andere meinen, die Zahl sei zwar nicht unbegrenzt, aber es sei noch nie eine Zahl genannt worden, die die des Sandes übertrifft. Ich aber will Dir zu zeigen versuchen, dass unter den von mir benannten Zahlen nicht nur einige die Zahl eines Sandhaufens von Erdgrösse übersteigen, sondern auch die Zahl eines Haufens, der das Weltall füllt."

Die benannte griechische Zahlreihe von damals schloss, (...) mit $10\,000 = 10^4$, der *Myriade* (griechisch *myrioi* = 1 Myriade). ARCHIMEDES fasst nun die Zahlen von 1 bis zu $10^4 \cdot 10^4 = 10^8 = 1$ Myriade Myriaden als die *„Zahlen 1. Ordnung"* zusammen. 10^8 ist nun die Einheit der 2. Stufe, der *„Zahlen 2. Ordnung"*, die bis $10^8 \cdot 10^8 = 10^{16} = 10^{8 \cdot 2}$ reichen. Hier beginnt die 3. Stufe mit allen Zahlen 3. Ordnung bis zu $10^{24} = 10^{8 \cdot 3}$ usw. So fortschreitend, gelangt ARCHIMEDES rein gedanklich bis zu den Zahlen der myriad-myriadsten Ordnung, das heisst bis zu $P = 10^{8 \cdot 10^8}$ (eine 1 mit 800 *Millionen Nullen*). Diese Zahlen von 1 bis P nennt er dann die *„Zahlen der 1. Periode"*. Nun schreitet ARCHIMEDES so fort, dass er die 1. Ordnung der 2. Periode bildet und gelangt so bis $10^8 \cdot P$, dann folgt die 2. Ordnung dieser Periode bis $10^{16} \cdot P$, sodann die 3. Ordnung bis $10^{24} \cdot P$ usw., bis zur 10^8. Ordnung der 2. Periode = $10^{8 \cdot 10^8} \cdot P = P^2$. Dann baut er ebenso eine 3. Periode, eine 4., 5. usw. auf und hört schliesslich bei der myriad-myriadsten Periode = $P^{10^8} = 10^{8 \cdot 10^8 \cdot 10^8} = 10^{8 \cdot 10^{16}}$ auf. Diese Zahl, in Ziffern ausgeschrieben, ist eine 1 mit *80 000 Billionen Nullen*! Es ist die 10^8. Zahl der 10^8. Ordnung der 10^8. Periode. Wollte man diesen enormen Zahlenriesen auf einem Streifen Papier aufschreiben, und zwar etwa so, dass auf einer Papierlänge von 1 cm immer 2 Ziffern zu stehen kämen, so bedeutete die Lieferung des dazu notwendigen Papierstreifens für sämtliche Papierfabriken der Erde einen nicht leicht zu bewältigenden Auftrag: der Streifen müsste *400 Milliarden Kilometer* lang sein, oder, was dasselbe bedeutet: man könnte mit ihm die Distanz Erde-Sonne (150 Millionen Kilometer) ungefähr 2700mal abmessen! Nun hätte ARCHIMEDES für die Berechnung der Sandkörner in der Weltkugel allerdings lange nicht so weit gehen müssen. Er findet nämlich für seine „Sandzahl", nachdem er auf Grund von Vergleichen alle Nebenrechnungen sowie die Berechnung des Weltkugelvolumens gemeistert hatte, den Wert 10^{63}, was also 10 mal kleiner als 10^{64} ist, das heisst die Zahl der Sandkörner im Archimedischen Kosmos lässt sich durch eine Zahl angeben, die bereits in der 8. Ordnung der 1. Periode liegt.

(nach F. Müller: „Im Anfang war die Zahl", Büchergilde Gutenberg 1954, S. 24f)

Volumens nimmt die Kugel im Würfel ein?“, „In welcher Beziehung stehen Kreis und umschriebenes Quadrat?“

Noch stundenlang kreisten meine Gedanken bei diesen Fragen. Anderntags brachte ich haufenweise Material in die Sitzung: Kugeln, Kegel, Würfel, Kristalle, Waage, ... Der Diskurs wurde lebhaft fortgesetzt. Im Artikel: „Kern und Schale runder Dinge“ von Martin Wagenschein (Wagenschein 1965, S. 67-74) werden die Formeln zur Berechnung von Volumen und Oberfläche von Körpern auf vielfältige Art und Weise veranschaulicht. Der Autor schreibt dazu: „Wenn wir in dieser Weise die Formel in ihrem *anschaulichen* Gehalt erfassen, sind wir der Mathematik *näher*, als wenn wir sie nur merken und praktisch benutzen. Und doch sind unsere Betrachtungen noch nicht wahre Mathematik! Sie sind ja nur ein Anschauen von *Ergebnissen*. Erst wenn aus dem Ansehen ein Einsehen wird, und aus dem An-schauen ein Durch-schauen, wenn wir forschen und verstehen, *warum* die Kugel zwei Drittel ihres Zylinders fassen *muss* - erst dann denken wir mathematisch. Darauf haben wir in diesem Aufsatz verzichtet, denn das ist ein weites Feld.“ So wurde ich motiviert, in dieses weite Feld vorzudringen und genauer der Herkunft und Herleitung dieser Formeln nachzugehen. Bald zeigte sich, wie eng der Übergang vom Eckigen zum Runden, vom Quadrat zum Kreis und vom Würfel zur Kugel mit der Person von Archimedes von Syrakus verknüpft ist.
Im weiteren wurde mir klar, dass ich den Bogen vom Würfel bis zur Kugel spannen wollte, um eine Einheit zu erhalten, auch wenn den Schülerinnen und Schülern im 9. Schuljahr die Berechnung der einfachsten geradlinig begrenzten Körper bekannt sein sollte. So entwickelte sich ein eher langes Lehrstück von gut 20 Lektionen Umfang, in dem bei der Durchführung gezielt Schwerpunkte zu setzen sind.

3.2 Struktur des Lehrstücks

Im kurzen Überblick sieht die Struktur folgendermassen aus. Je nach Klasse lasse ich manchmal allerdings den Auftakt weg und steige direkt in den ersten Akt mit der Exposition des Lehrstücks.

Auftakt:

In der „Sandrechnung“ begegnen wir der Denkweise und Genialität von Archimedes.

I. Akt: Exposition des Lehrstücks: Würfel, Kugel und Verwandte

Aus Ton erschaffen wir uns die Familie der Körper, lernen ihre Namen und gegenseitige Verwandtschaft kennen und strukturieren den weiteren Verlauf des Lehrstücks.

II. Akt: Im Eckenland: Vom Würfel zu Quader, Prisma und Pyramide

Wir beschäftigen uns mit den Körpern des Eckenlandes und ihren gegenseitigen Beziehungen.

III. Akt: Der Kreis in der Ebene als Steg über die Kluft

Die Annäherung des Runden durch das Gerade, des Kreises durch Vielecke führt uns mit Archimedes zur Zahl π, dem Schlüssel für die runden Körper.

IV. Akt: Im Rundland: Über Zylinder und Kegel zur Kugel

Dank der gewonnenen Zahl π lernen wir die Körper im Rundland verstehen und staunen über die einfachen Zahlverhältnisse zwischen ihnen.

Abschluss: Rückblick und Schlussbetrachtungen

Eine Zusammenfassung der Erkenntnisse, Analogien und offene Fragen bilden den würdigen Abschluss des von Archimedes geprägten Lehrstücks.

Im ausführlicheren Lehrstückgrundriss erfahren wir mehr über das Lehrstück, wie es anschliessend ausführlich in der Durchführung beschrieben wird.

Auftakt: In der „Sandrechnung“ begegnen wir erstmals Archimedes, wie er beweist, dass es nicht unendlich viele Sandkörner am Meer gibt, indem er den ganzen damaligen Kosmos als endliche Kugel auffasst und den bisherigen Zahlbereich weit über alles irdisch Vorstellbare erweitert. Er schmettert uns aber nicht nur hinaus in den weiten Kosmos, sondern bleibt auf dem Boden, wo er mit den Händen praktisch und dem Kopf theoretisch Hervorragendes leistet.

I. Akt: Der erste Akt dient der **Exposition** des Stücks. Aus Ton entstehen in unseren Händen als einfachste Körper rasch die **Kugel** und der **Würfel**, gegensätzliche Pole von Hand und Kopf, von Praxis und Theorie, von Natur und Geist. Es entstehen weitere einfache Körper wie Quader, Prisma, Pyramide, Kegel, Zylinder, . . . Gemäss ihrer gegenseitigen **Verwandtschaft** ordnen wir diese Körper auf dem Tisch an. Dabei ergibt sich ein Weg vom Würfel zur Kugel und damit die Struktur für den weiteren Verlauf des Lehrstücks. Dieser entspricht in etwa dem historischen Prozess zur Bestimmung von Oberfläche und Volumen dieser Körper.

II. Akt: Vorerst beschränken wir uns auf das **Eckenland**. Vieles ist im 9./10. Schuljahr bereits bekannt. Wir rekapitulieren, begründen, schaffen Analogien zur Ebene, geniessen die Phänomene, begründen anhand der Tonmodelle, ohne allzusehr in die Tiefe zu gehen. Allenfalls lässt sich zeigen, wie Euklid das Volumen der Pyramide von innen durch Spate, das sind „schiefgedrückte Quader“, ausschöpft. So sind bald alle (wieder) vertraut mit Volumen und Oberfläche von Würfel, Quader, Spat, Prisma und Pyramide.

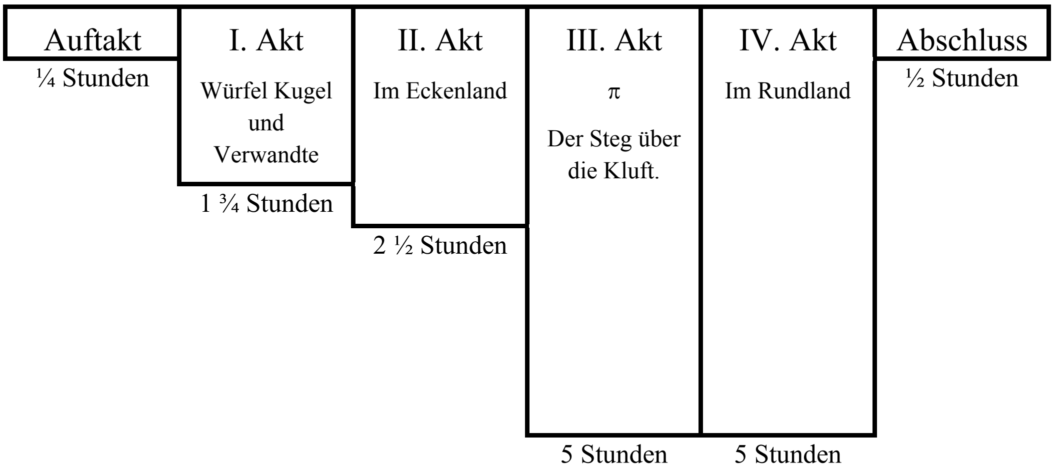
III. Akt: Es folgt ein grosses Zwischenspiel: **π, der Steg über die Kluft**. Es erweist sich vorteilhaft, den Übergang zum „Runden“ in der Ebene durchzuführen. Wir entwickeln dabei gemäss Archimedes eine *Rekursionsformel*, d.h. eine Formel, bei der die berechnete Grösse gleich wieder als Ausgangsgrösse für den nächsten Rechenschritt eingesetzt wird. Diese Formel erlaubt uns, Umfang und Fläche des Kreises beliebig genau von innen und später von aussen anzunähern. Dies ist das Prinzip der *Intervallschachtelung*, das hier optisch sichtbar wird. Der Taschenrechner ist uns eine grosse Hilfe und wir ahnen nur, wie aufwendig die Berechnungen damals gewesen sein müssen. Es zeigt sich, dass die Verhältnisse Umfang zu Durchmesser und Kreisfläche zu quadriertem Radius gleich gross sind; eine Grösse, die wir heute als π (Abkürzung für peripheria) kennen. Ein kurzer historischer Exkurs von der Bibel (mit $\pi \approx 3$) bis zur Neuzeit (von π sind über 2 Milliarden Stellen bekannt, unendlich viele Stellen werden uns für immer verborgen bleiben!) ist angezeigt. Heute wissen wir auch, dass sich diese universelle Konstante π sowohl der klassischen Konstruktion wie auch der vollständigen Berechnung letztlich entzieht, d. h. sie *musste* auf empirischem Wege angenähert werden! Zusätzlich machen wir Bekanntschaft mit dem Lebenswerk von Archimedes und den Legenden über ihn. Da er seine Erkenntnisse über Zylinder und Kugel am höchsten einstuft, werden wir neugierig auf den nächsten Akt.

IV. Akt: Wir lernen die Körper **im Rundland** kennen. Die Formeln für Zylinder und Kegel ergeben sich leicht aus dem bisher erarbeiteten. Für den Weiterverlauf lohnt es sich, bei Archimedes einfache Sätze nachzulesen, wie er schreibt, formuliert und begründet. Statt eine Zahl π und Gleichungen zu verwenden, muss er die Erkenntnisse durch Flächen- und Volumenvergleiche ausdrücken. Einen Höhepunkt in seinem mathematischen Schaffen bildet seine Herleitung von Kugelvolumen und Kugeloberfläche, ausführlich beschrieben in seiner Schrift: »Über Kugel und Zylinder«. In einem ersten Schritt verbindet er Praxis und Theorie auf geniale Weise und leitet unter Zuhilfenahme des von ihm entdeckten Hebelgesetzes das Kugelvolumen her. Damit begnügt er sich nicht, sondern liefert hinterher einen nicht minder genialen Beweis für Oberfläche und Volumen der Kugel. Als Quintessenz resultiert der von ihm gefundene sehr einfache und schöne Satz: „Der Zylinder, der die gleiche Grundfläche besitzt wie einer der grössten Kreise einer Kugel und dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist, ist sowohl seinem Inhalt als auch seiner Oberfläche nach eineinhalb mal so gross wie die Kugel.“ Jetzt wird einsichtig, warum er sich Kugel und Zylinder auf dem Grabstein verewigt wünschte!

Abschluss: Die **Nachbetrachtung** wird zum verdienten Schlussgenuss, zum Symposium zu Ehren von Archimedes. Wir fassen die Erkenntnisse zusammen, vergleichen Zylinder, Kugel und Kegel, betrachten den Vollmond nach Wagenschein, staunen nochmals über die Analogien zwischen den Formeln in der Ebene und im Raum. Wir würdigen seine geniale Verbindung von praktischer und theoretischer Schaffenskraft, welche bis in heutige Zeit seine Auswirkungen hat. Da sowohl die Inschrift als auch die Darstellung von Kugel und Zylinder auf dem Grabstein bis heute ein Rätsel geblieben sind, gestalten wir Grabsteine zu Ehren von Archimedes.

Das ganze Lehrstück ist mit rund 20 Lektionen eher lang. Ein Block von 3 bis 4 Lektionen für die Eröffnung ist von grossem Vorteil. Der Ablauf, welcher sich uns dort im sokratischen Gespräch aufdrängt, ist gleichzeitig auch der historische. Die Denkwege werden skizziert, dann begehbar und befahrbar, die Formeln für Oberfläche und Volumen der Körper nehmen Gestalt an, werden vertraut. Aus der Fülle des Materials müssen allerdings exemplarisch Schwerpunkte gesetzt werden. Je nach Vorkenntnissen und Interessen der Schülerinnen und Schüler liegen diese Schwerpunkte wieder anders. So wird das Lehrstück trotz vorliegender Grobstruktur bei jeder Durchführung auch für die Lehrperson zur erneuten Herausforderung.

Die Inszenierung des Lehrstücks benötigt etwa 20 Lektionen oder die Zeit von 15 Stunden, die sich folgendermassen auf die Akte verteilen:



3.3 Unterrichtsverlauf: 15 Stunden (in der Tertia)

Zum ersten Mal in seiner ganzen Länge habe ich das Lehrstück vor den Sommerferien 1996 am Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld durchgeführt. Ein halbes Jahr später erhielt ich die Gelegenheit, mein Lehrstück an der Ecole d' Humanité mit einer Gruppe von Jugendlichen am Anfang des 10. Schuljahres zu inszenieren. Bis heute habe ich dieses Lehrstück mehrfach am Gymnasium Bern-Neufeld in Normalklassen mit rund 20 Schülern und Schülerinnen am Ende des 9. Schuljahres, wo es seinen idealen Platz findet, unterrichtet (vgl. Tabelle 3, S. 19).

Von Mal zu Mal hat sich das Lehrstück verändert und weiter entwickelt, Andere Schwerpunkte wurden wichtig. Die groben Züge sind aber geblieben. Als Hauptgrundlage für meine Beschreibung wähle ich die Durchführung vom 18. bis 30. November 1996 an der Ecole d'Humanité in Goldern-Hasliberg, weil ich damals meine ganze Zeit dem Lehrstück widmen und so den Verlauf gut dokumentieren konnte. Allerdings stand mir nur eine kleine Schülergruppe zur Verfügung. Auf die Erfahrungen und Weiterentwicklungen des Lehrstücks am Gymnasium Bern-Neufeld werde ich zwischendurch und am Schluss hinweisen.

Für die Inszenierung des Lehrstücks an der Ecole d'Humanité in Goldern-Hasliberg standen etwa 15 Stunden oder umgerechnet 20 Lektionen (à 45 Minuten) zur Verfügung, die sich wie oben dargestellt auf die Akte verteilten.

Der zeitliche Ablauf über die zwei Wochen präsentiert sich folgendermassen:

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag
Auftakt **I. Akt:** Würfel, Kugel und Verwandte	Prisma und Pyramide		Annäherung an π in Babylon und Ägypten	Formel zur Annäherung von π	Polyederaufgaben besprechen
Exposition des Lehrstücks		**III. Akt:** Der Kreis in der Ebene. π, was ist das?			
II. Akt: Im Eckenland					

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag
Rekursion zur Annäherung von π	**IV. Akt:** Im Rundland: Zylinder und Kugel	Sätze über Kegel nach Archimedes	Heuristisch zum Kugelvolumen. Berechnung der Kugeloberfläche.	Berechnung des Kugelvolumens. Zusammenhänge. Archimedes' Grab.	**Abschluss** und Abschied
Intervall-schachtelung für π. Histor. Überblick					

Für mich verbinden sich an der Ecole d'Humanité zwei Seiten: Im Rahmen meiner TZI-Ausbildung (themenzentrierte Interaktion nach Ruth C. Cohn) lernte ich 1984 die Ecole, einige ihrer Lehrer und deren Unterrichtsstil kennen. Im Frühjahr 1996 besuchte ich die Wagenscheintagung, die in den Räumlichkeiten der Ecole stattfand, dort wo der Nachlass von Martin Wagenschein betreut wird. Bei dieser Gelegenheit knüpfte ich diejenigen Kontakte, die mir dazu verhalfen, ein halbes Jahr später dort zu unterrichten.
Während vierzehn Tagen im November versuche ich also im Erdgeschoss des Wagenscheinhauses diese beiden Seiten, TZI und Wagenscheindidaktik, möglichst optimal zu verbinden. Für mein Lehrstück „Vom Würfel zur Kugel" ist mir eine Gruppe von 6 Schülerinnen und Schülern aus dem 10. Schuljahr angesagt. Es ist ein Mathematikkurs, der in der ersten Morgensequenz von 75 Minuten Länge, d.h. täglich von 08.10 bis 09.25 Uhr stattfindet. Für zwei Wochen darf ich diesen Kurs führen, wobei wir am ersten Tag sogar die zwei folgenden, je knapp stündigen Sequenzen bis zum Mittagessen anhängen dürfen.

Am Vorabend besuche ich den zugeteilten Unterrichtsraum: er misst gute fünf auf fünf Meter und ist ausgerüstet mit Tischen und Stühlen. Hinten und auf der einen Seite gibt es je eine grosse Fensterfront mit viel Lichteinfall, vorn und auf der andern Seite befinden sich Wandtafeln. Dort stelle ich zwei gleich hohe Tische mit kleinem Zwischenraum bereit und klebe darauf schräg eine Bahn Packpapier. Auf drei Seiten stehen je zwei bis drei Stühle. Am frühen Montagmorgen warte ich im Unterrichtszimmer gespannt auf die Jugendlichen. Es erscheinen nur gerade vier von ihnen: Anna, Muriel, Christof und Silvan. Felix ist momentan krank und Sandor absolviert diese Woche auswärts eine Schnupperlehre. Das sind offenbar die Realitäten.

Auftakt

In einer lockeren ersten Runde mit dem Thema „Wer bin ich und warum bin ich hier in diesem Kurs?“, habe ich die Möglichkeit, etwas über mein Hiersein zu erzählen und erfahre, dass die Anwesenden lebendig und motiviert sind. Muriel und Christof beginnen vielleicht eine Lehre, Anna und Silvan streben die Matura an. Von Anfang an spüre ich viel Wohlwollen und Offenheit.

Didaktische Anmerkungen: *Als günstig hat es sich in Bern erwiesen, bereits zu diesem Zeitpunkt nach Archimedes zu fragen. Kaum jemand hat mehr als den Namen gehört. Um in die Zeit der mathematischen Auseinandersetzung mit den Körpern einzuführen und erste Bekanntschaft mit Archimedes und dem Ort seines Wirkens zu vermitteln, erzähle ich die Geschichte der Sandrechnung, entstanden im Gespräch von König Gelon mit Archimedes am Sandstrand von Syrakus. Der ganze damalige Kosmos erscheint vor uns als Kugel, gefüllt mit Sandkörnern, deren Anzahl Archimedes abschätzte, indem er den Zahlbereich weit über das damals Gewohnte hinaus erweiterte. Dass sich Archimedes nicht nur mit astronomischen Dimensionen befasste, sondern auch mit handfesten irdischen Problemen, wird im Folgenden klar*.

I. Akt: Exposition des Lehrstücks: Würfel, Kugel und Verwandte

Herumgesprochen hat sich bereits, dass es beim Lehrstück um Körper geht. Die Tischanordnung weckt Neugier. Ich verteile Tonklumpen zum Kneten und leite damit über in den ersten Akt, der uns *Überblick und Handlungsweg* des Lehrstücks zeigen soll. „Welches ist der am einfachsten zu formende Körper?“ Einigkeit herrscht, es ist die Kugel, die da und dort bereits in der Hand liegt. „Gibt es ein Gegenteil der Kugel?“ Diese Frage verwirrt, regt an. „Etwas Kantiges“, „Nichts Rundes“, „Das Loch im Emmentaler“ – „Welcher Körper ist vom rechnerischen Standpunkt aus am besten bekannt?“ – „Der Würfel“ – Die Kugeln klatschen auf den Tisch, nach und nach entstehen würfelähnliche Gebilde. Es scheint bedeutend schwieriger zu sein, einen schönen Würfel zu formen als eine gelungene Kugel. Kugel und Würfel liegen auf dem Tisch, zwei Pole, zwei Gegensätze. Die Kugel primär Produkt von praktischer Intelligenz, Handintelligenz, Ausdruck der Real-Entwicklung. Der Würfel primär Produkt der Kopfintelligenz, entstanden aus dem geistigen Entwicklungsprozess. „Durch welche Eigenschaften lässt sich der Unterschied zwischen Kugel und Würfel charakterisieren?“ – „Rund, weich, gleichmässig, ausgeglichen, weiblich, mütterlich, ... die Kugel; eckig, kantig, hart, unausgeglichen, aggressiv, männlich, väterlich ... der Würfel.“ Christof ergänzt im gleichen Atemzug, dass ihm die Kugel näher stehe.

„Gehört einer der Körper eher in die rechte, einer eher in die linke Hand?“. Zwei Spontanmeldungen legen die Kugel in die linke, den Würfel in die rechte Hand. Anna: „Die Kugel ist leichter zu halten in der Hand; die geschicktere rechte Hand brauche ich für den Würfel.“ Interessant ist der Hinweis auf die Hirnhälften: die linke Hirnhälfte steuert die rationalen, analytischen Prozesse und ist verbunden mit der rechten Körperseite; die rechte Hirnhälfte mit ganzheitlichem, synthetischem Denken korrespondiert zur linken Körperseite. „Wir haben jetzt die zwei Pole, Kugel und Würfel, Mutter und Vater. Welche Kinder und Verwandten gibt es?“ – Nach und nach entstehen Zylinder, Quader, Prisma, Tetraeder, Pyramide, Spat, Kegel, Oktaeder, Doppeltetraeder. („Ist das auch ein Hexaeder?“). „Was bedeutet „Tetra-eder“ – Das Tetrapack ist kaum mehr bekannt, was ein Tetraplegiker ist, weiss auch niemand. Mit der Zunahme der Körper beginnen gleichzeitig erste Begriffsklärungen.

„In welcher Beziehung stehen die Körper zueinander? Wie lässt sich diese Beziehung durch ihre Position ausdrücken?“ Die Körper werden angeordnet, wieder verschoben, lange herrscht Unzufriedenheit. Schliesslich werden das Spitze bei Pyramide und Kegel sowie das Runde als etwas Besonderes erkannt und in der Anordnung ausgedrückt. Insbesondere trennt jetzt der Graben zwischen den beiden Tischen die Körper mit runden Elementen von den andern. Die Begriffe „Eckenland“ und „Rundland“ werden für die verschiedenen Bereiche gewählt. Der Übergang vom Eckigen zum Runden wird mit dem Kreis und mit π zu tun haben. Damit ergeben sich der Titel „Vom Würfel zur Kugel“ und die weitere Struktur für das Lehrstück.

I. Akt: Exposition des Lehrstücks; Würfel, Kugel und Verwandte.
II. Akt: Im Eckenland: Vom Würfel zu Quader, Prisma und Pyramide
III. Akt: Der Kreis in der Ebene als Steg über die Kluft
IV. Akt: Im Rundland: Über Zylinder und Kegel zur Kugel

Alle sind wir erstaunt, dass die erste Sequenz schon zu Ende ist.

Didaktische Anmerkungen: *Der Einstieg mit Ton ist sehr beliebt und hat sich bewährt. Das Formen und Greifen unterstützt das Begreifen. Jederzeit später besteht die Möglichkeit, darauf zurückzugreifen, zu schneiden oder umzuformen, den Prozess zu veranschaulichen und* *den Standort zu bestimmen. Als Resultat der Umformungen werden ja Formeln stehen, Kurzschriften die den geistigen Prozess beinhalten. Ab und zu entsteht noch ein zweiter Denkweg mit der Idee, vom Würfel wegzuschneiden, bis die Inkugel übrig bleibt. Verfolgen wir diesen Weg, so stossen wir bei der Berechnung sehr rasch auf grösste Schwierigkeiten. Mit dem Hinweis auf die historische Entwicklung propagiere ich den oben skizzierten Weg.*

In einer grossen Gruppe sind immer einige Schülerinnen oder Schüler, die lieber in einem äusseren Kreis sitzen und sich nicht die Hände schmutzig machen, sich aber jederzeit in die Diskussion einschalten können. Hilfreich ist es für alle, wenn 2 bis 3 Schüler sich dem Protokollieren des Dialogs widmen.

Ein Kernanliegen lässt sich kurz und bündig formulieren, es ist das Suchen nach einer Antwort auf die Frage: „In welcher Beziehung stehen Kreis und umbeschriebenes Quadrat, beziehungsweise Kugel und umbeschriebener Würfel?“

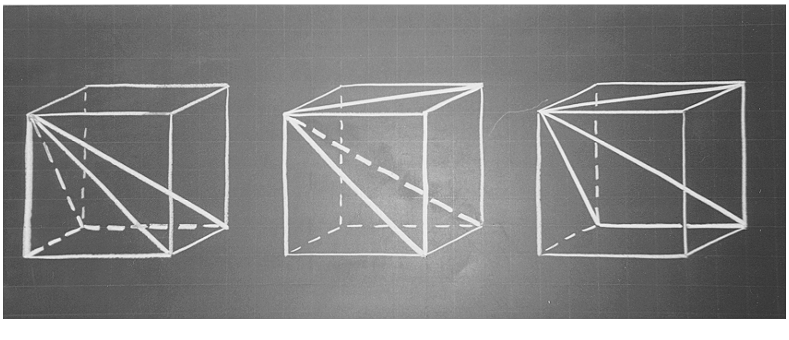
Zum Glück dürfen wir nach der verdienten halbstündigen Pause eine zweite Sequenz anhängen. Das Festhalten des Erlebten und Diskutierten drängt sich auf. Ich verteile Mäppchen, in denen wir die Notizen und Arbeitsblätter zusammenfassen.

Nach kurzer Repetition des Wichtigsten dauert es eine halbe Stunde, bis alle notiert haben. Fragen nach Namen tauchen auf: „Was ist ein Kegel, ein Prisma?“. Die Schnelleren sind bereits daran, sich mit den verschiedenen Körpernamen auseinanderzusetzen, die ich wohlweislich auf einem Blatt zusammengestellt bereithalte. Wieder im Plenum tauchen wir nochmals ins Griechische: Hexa-, Tetra-, Okta-, Penta-, Poly- ..., -gon, -eder.

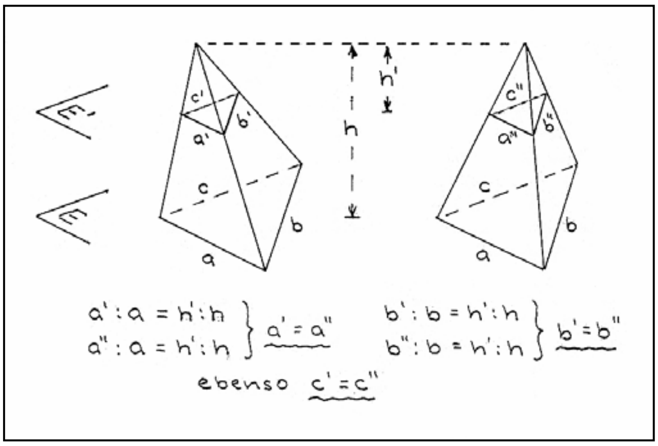
Platons Theorie der Ideen sowie die platonischen Körper, die von früher bekannt sind, werden kurz ins Zentrum gerückt. In der Natur finden wir häufig kugelförmige Gebilde. „Ist der Würfel nur eine Erfindung unseres Kopfes?“ Leider habe ich kein würfelförmiges Mineral zur Hand. – Nur allzu rasch ertönt der Gong mit seinem angenehmen Klang.

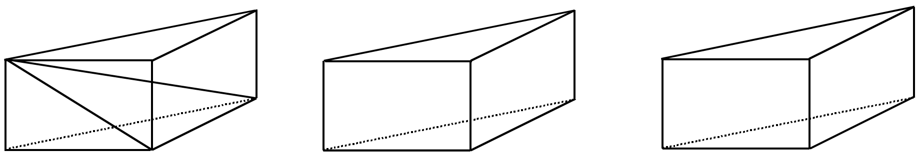
II. Akt: Im Eckenland: Vom Würfel zu Quader, Prisma und Pyramide

In der **dritten Stunde** wollen wir uns den Berechnungen im Eckenland widmen. Da ich im Stück die Schwerpunkte in den von Archimedes geleisteten Bereichen legen will und die meisten Körper des Eckenlandes bereits behandelt sind, gehe ich hier nicht allzu sehr ins Detail, bleibe bei der Anschauung. Die Berechnung von Würfel, Quader, Spat und Prisma sind bekannt und können leicht rekapituliert und begründet werden. Die Pyramide ist schon anspruchsvoller. Silvan erinnert sich: „Wird die Spitze einer quadratischen Pyramide senkrecht über eine Ecke ‚rübergezogen’, so ergibt sich ein Drittel eines Würfels.“ Der berechtigte Einwand folgt auf dem Fuss: „Dies ist bestenfalls möglich, wenn die Höhe gleich gross ist wie die Grundkante.“ Und Silvan weiter: „Der Würfel kann in drei kongruente Pyramiden zerlegt werden.“ „Das geht nicht!“, ist die spontane Reaktion der andern. Ich reiche Silvan einen Lehmwürfel und das Messer. Auf Anhieb will ihm die Teilung nicht gelingen. Inzwischen habe ich drei Würfel an die Tafel gezeichnet. „Wer kann eine derartige Pyramide zeichnen?“ Nach und nach werden alle drei skizziert und aufgrund dieser Ansicht aus dem Ton ausgeschnitten.



Bemängelt wird, dass damit erst ein Spezialfall geklärt ist. Da von „Spitze verschieben“ und „Schnittflächen“ die Rede ist, will ich ausholen und wir zeigen, dass die Schnittflächen bei zwei Tetraedern mit kongruenter Grundfläche und gleicher Höhe kongruent sind. Ohne allzu lange Diskussion wird – unter Vorwegnahme der Archimedischen Idee, ganz dünne Scheiben zu schneiden – gefolgert, dass zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe volumengleich sind, wie das Euklid, allerdings auf ganz andere Art, bewiesen hat. Um den allgemeinen Fall zu erhalten, bitte ich die Schüler, in ein vorgegebenes Prisma drei Pyramiden einzuzeichnen, so dass je zwei von ihnen gleiche Grundfläche und gleiche zugehörige Höhe besitzen. Da der Auftrag unklar scheint und die Zeit fortgeschritten ist, zeichne ich an der Tafel eine erste Pyramide, genauer ein Tetraeder, ein.





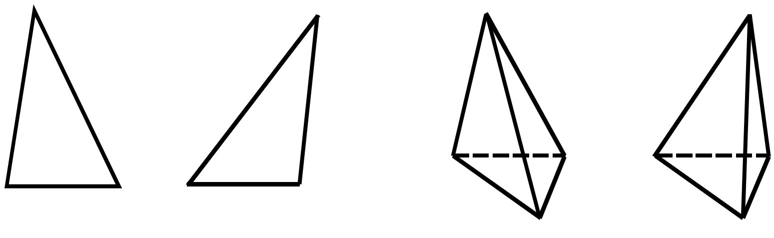
Mit dieser Hilfe erscheinen dann die andern beiden Pyramiden rasch an der Tafel und können gerade noch auf das vorbereitete Blatt übertragen werden. Die gleichen Grundflächen G mit den zugehörigen Höhen h lassen sich leicht finden. Da sich beim Prisma das Volumen wie bei Quader und Spat berechnet als Grundfläche G mal Höhe h und sich das Prisma in drei volumengleiche Tetraeder zerlegen lässt, folgt $V_T = G \cdot h / 3$ für das Tetraedervolumen V_T. Bereits ist die letzte Stunde unseres Vormittags vorbei, ohne dass wir die wesentlichen Erkenntnisse notiert hätten. Als Auftrag auf den folgenden Tag bitte ich die Schülerinnen, einige Körper aus ihrer Umgebung mitzubringen.

Die Sitzung vom **Dienstag** soll nochmals ganz dem Eckenland gewidmet sein. Ausser mir hat niemand Körper mitgebracht und so verzichte ich darauf, meine bei den Tonkörpern als Ergänzung hinzulegen. Wir gehen den Prozess des Vortages nochmals durch und formulieren zwei Sätze:

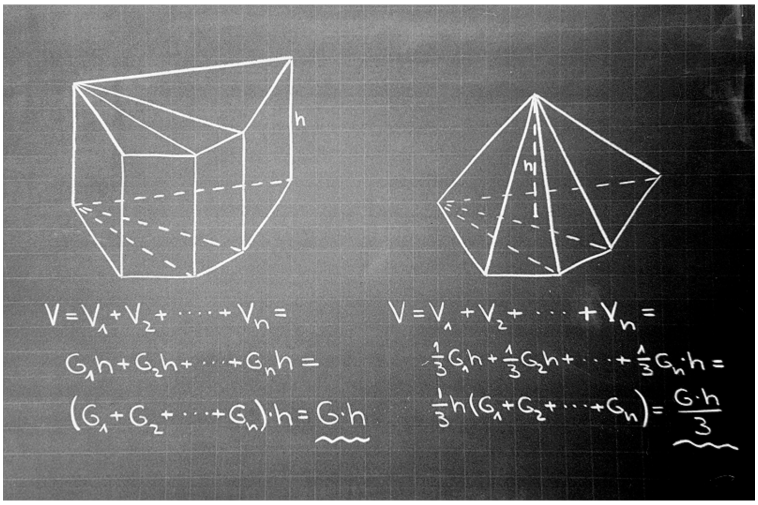
– „Zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind volumengleich.“
– „Das Volumen des Tetraeders berechnet sich als Grundfläche mal Höhe durch drei.“

Analoge Sätze kennen wir für Dreiecke in der Ebene:

– „Zwei Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe sind flächengleich.“
– „Die Fläche des Dreiecks berechnet sich als Grundseite mal Höhe durch zwei.“



Wie können wir jetzt das Volumen V_P einer beliebigen Pyramide erhalten? Wie für den allgemeinen Fall des Prismas lässt sich die Grundfläche jeder beliebigen Pyramide in Dreiecke zerlegen. So ergibt sich die Verallgemeinerung sehr schön. Der Prozess kann damit individuell nochmals durchdacht und anschliessend schriftlich festgehalten werden. In der Zwischenzeit notiere ich an der Tafel vier Aufgaben über Körper im Würfel:



1. Berechne Oberfläche und Volumen einer der drei kongruenten Pyramiden des Würfels.
2. Berechne Oberfläche und Volumen des regelmässigen Tetraeders, dessen Kanten Diagonalen von Seitenflächen des Würfels sind.
3. Berechne Oberfläche und Volumen des regelmässigen Oktaeders, das entsteht, indem die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen verbunden werden.
4. Berechne Oberfläche und Volumen des Kuboktaeders, das entsteht durch Verbindung der Mittelpunkte benachbarter Seitenkanten des Würfels.

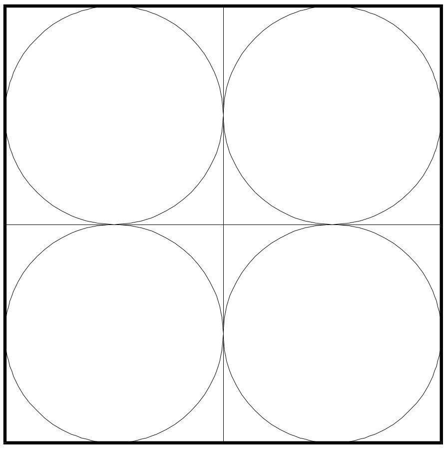
Bereits bei der ersten Aufgabe merke ich, dass die einzelnen Mühe haben, selbständig vorzugehen und dann auch noch algebraisch richtig umzuformen. So lösen wir gemeinsam. Anna ist am spontansten, wagt sich vor und löst mit Hilfe der andern. Wenn nur die Algebra nicht wäre! Von einem Würfel hat sie am Vortag schon vier Pyramiden abgeschnitten, was ihr jetzt hilft, das Volumen des zweiten Körpers, des regulären Tetraeders, zu bestimmen. Weiter kommen wir nicht, da die Stunde bereits um ist. Als Aufgabe auf morgen schlage ich die Berechnung der Oberfläche des Tetraeders vor. Mehr ist offenbar nicht möglich.

Am **Mittwoch** findet wegen einer Konferenz eine verkürzte Sitzung statt. Silvan und Muriel haben auf heute gemeinsam versucht, die Oberfläche des Tetraeders im Würfel mit Kantenlänge a zu bestimmen und haben dabei etwas mit Wurzel aus 7/4 bekommen. Das müssen wir uns ansehen. Wir repetieren den Flächeninhalt $F_\Delta = \sqrt{3} \cdot s^2/4$ des gleichseitigen Dreiecks mit Seite s und ersetzen s durch $a \cdot \sqrt{2}$, da dies gleichzeitig Diagonale der Seitenflächen des Würfels ist. So erhalten wir für die Oberfläche $O = 4 \cdot F_\Delta = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$. „Ein schönes Resultat“, findet Anna. Für die weiteren Übungen überlasse ich kopierte Blätter samt Lösungen. Bis Samstag sei es möglich, sich damit zu befassen, wird mir versichert. Auf Wunsch von Muriel stellen wir noch gemeinsam an der Tafel die bisherigen Formeln zusammen.

Didaktische Anmerkungen: *Für die Überlegungen im Eckenland wollte ich nicht sehr viel Zeit investieren, die wesentlichen Ideen lieber von der Anschauung her unterstützen. Da die Schnittflächen bei den Pyramiden erwähnt wurden, ging ich darauf ein. Wenn schon, hätte ich lieber historisch korrekt den Beweis des Euklid (vgl. Elemente Buch XII, §§ 3-5) mit dem Ausschöpfen der Pyramiden durch Spate diskutiert. Laufend zeigt sich, wie wichtig algebraische Umformungen und der sichere Umgang mit Wurzeln sind. Leider scheitern viele Schülerinnen und Schüler immer wieder daran, können die guten Ideen nicht umsetzen. Ins Zentrum stelle ich wo möglich Analogien und Zusammenhänge, sowie sich wiederholende Denkwege. Der Prozess wird vertrauter und übersichtlicher, weniger Wissen ist nötig, um das Wesentliche zu verstehen. Damit haben wir genügend Vertrautheit mit den Polyedern, den Körpern im Eckenland, erreicht; wir kennen die wichtigsten Namen und Zusammenhänge, können Volumina und Oberflächen einfachster Körper berechnen.*

III. Akt: Der Kreis in der Ebene als Steg über die Kluft

Somit sind wir bereit, mit dem 3. Akt einen Schritt in Richtung Rundland zu wagen. Um ans Runde zu kommen, erweist es sich als notwendig, aus dem Raum in die Ebene hinunter zu steigen, und den **Übergang vom Geraden zum Runden** vorerst im Zweidimensionalen zu studieren. Da π „bekannt" ist, beginnen wir mit der Bedeutung von π. Silvan: „π macht alles rund." Christof: „π ist eine Zahl ohne Ende." Muriel: „Genau, sie rechnen das immer wieder mal aus, eine ganze Zeitung voll." – Ich: „Und wozu brauchen wir π?" Christof: „Um Kreise, runde Formen zu berechnen. Man muss es eingeben in den Rechner, dann spuckt er eine Zahl aus ... 3.14 und so. – Das ist dann der ungefähre Flächeninhalt." Ich: „Ja, aber ..." Christof: „Es hat etwas mit Viereck, mit Quadrat und einem Kreis zu tun, der alle Seiten schneidet ... irgend so etwas." Ich: „Was für eine Figur soll ich zeichnen?" Christof: „Zeichne ein Quadrat, dann einen Kreis, der alle Seiten berührt." Anna kommentiert: „Den Inkreis." Ich zeichne an der Tafel ein Quadrat mit einbeschriebenem Kreis. Ich: „Und was hat das mit π zu tun?" Christof: „Weiss ich nicht mehr so genau, irgend etwas." Ich: „π, hast Du gesagt, ist eine Zahl 3.14 und so." Ich notiere an die Tafel: π = 3.14...



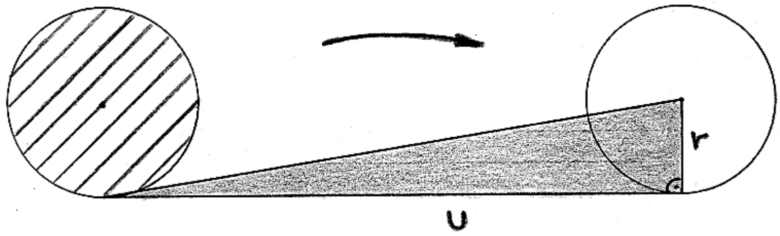
Anna ganz aufgeregt: „Ich weiss etwas. Der Durchmesser des Kreises ist ja gleich gross wie diese Seiten des Quadrats und der Radius ist eine halbe Seite. – In ein solches Quadrat kann man jetzt vier Quadrate setzen mit halblangen Seiten." Ich zeichne eine neue Figur. Anna: „Und im Kreis drin haben jetzt vier Kreise mit halbem Radius Platz, natürlich nicht vollständig, aber vom Flächeninhalt her. – Vier von denen, logischerweise." Ich: „Was heisst da ‚logischerweise'?" Anna: „Weil es ja auch vier Vierecke hat. Es hat ja vier Quadrate im Quadrat und also auch vier Kreise im Kreis. – Ich denke, das hat nichts damit zu tun." Damit verabschiedet Anna ihren Ansatz. Christof bezieht sich wieder auf die erste Figur: „Nun ist es so; das Viereck dort oben hat 3.14... mal im Kreis drin Platz." Muriel für einmal spontan: „Ja, ja, genau. Das Viereck ist ja grösser als der Kreis." Christof wiederholt seine Aussage; er ist offenbar seiner Sache sicher. Ich: „Welche Formel drückt das aus?" Muriel: „π mal Radius im Quadrat. Das ist die Fläche vom Kreis." Ich notiere: $F = \pi \cdot r^2$. „Das wäre mal eine Interpretation dieser Formel. – Habt Ihr π sonst noch gebraucht?" Christof: „Ja, für den Umfang. – Der Umfang beträgt π. Umfang gleich Durchmesser mal π." Ich: „Können wir das auch illustrieren?" Christof: „Der Umfang des kleinen Quadrätleins hat 3.14 mal auf dem Umfang des Kreises Platz." – Ich wiederhole fragend: „Der Umfang dieses kleinen Quadrätleins?" Christof ist verwirrt: „Ja, ja, – nein, das kann nicht sein. – Der Durchmesser ist ja gleich wie die Seitenlänge des grossen Quadrats. – Der Umfang ist 3.14 mal der Durchmesser; das heisst, der Durchmesser hat 3.14 mal auf dem Umfang des Kreises Platz." – Ich frage: „Ist es nicht erstaunlich, dass ein gut Dreifaches des Durchmessers den Kreisumfang und ein gut Dreifaches des Quadrats über dem Radius die Kreisfläche ergibt? Und das soll genau dasselbe Vielfache sein?" – Muriel: „Beide Mal dasselbe; beide Male derselbe Rest." Christof: „Zufall!" Anna: „Eines der Gesetze, die wir nicht verstehen." Ich: „Lasst uns sehen, ob wir das verstehen können. – Angenommen, obige beiden Formeln sind richtig, so bedeutet das, wenn wir beide Formeln nach π auflösen:

$$\pi = F / r^2 \quad \text{und} \quad \pi = U / 2r \quad \text{, woraus folgt} \quad F / r^2 = U / 2r$$

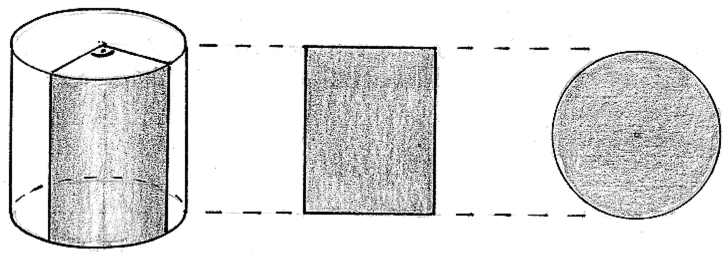
Wir haben einen **direkten Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Kreisfläche** erhalten. Zur Verdeutlichung multiplizieren wir mit r^2 und kürzen mit r.

$$F = (r^2 \cdot U) / 2r = (U \cdot r) / 2$$

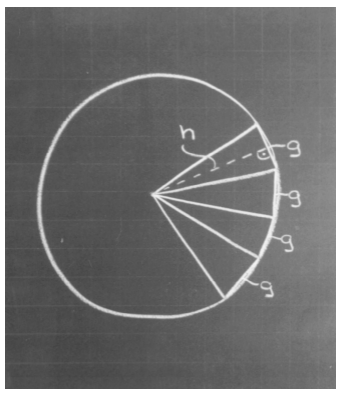
„Woran erinnert Euch dieser Ausdruck $F = (U \cdot r)/2$?“ – „Ach ja, an die Formel für eine Dreiecksfläche: $(g \cdot h)/2$.“ „Was für ein Dreieck ergibt das?“ Wir zeichnen das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten r und U. Archimedes, der nicht unseren heutigen Formalismus zur Verfügung hatte, formulierte diesen Zusammenhang im folgenden Satz: „Jeder Kreis ist gleich einem rechtwinkligen Dreieck, in welchem die eine Seite beim rechten Winkel gleich dem Radius und die andere gleich dem Umfang ist.“ Durch Abrollen eines Zylinders können wir die Länge U „erzeugen“ und das Dreieck zeichnen.



Der geniale Leonardo da Vinci (1452 bis 1519) schlug vor, einen geraden Kreiszylinder mit Radius r und Höhe r/2 in der Ebene einmal abzurollen. Der entstehende schmale rechteckige Teppich hat dieselbe Fläche wie der Kreis. Denselben Flächeninhalt erhalten wir auch, wenn wir vom geraden Zylinder mit Höhe 2r - wir werden diesem Zylinder später wieder begegnen - ein Viertel des Mantels abrollen.



Natürlich entspricht dieses Abrollen keiner Konstruktion im klassischen, euklidischen Sinne, die nur Zirkel und Lineal zulässt. Die Quadratur des Kreises, d. h. die Verwandlung der Kreisfläche in eine Quadratfläche, ist damit nicht gelöst. Ich: „Wir wollen sehen, ob die oben erwähnte Formel einleuchtend ist. Wie würdet Ihr versuchen, die Kreisfläche zu bestimmen, wenn Euch π nicht bekannt wäre?“ Langes Nachdenken. Anna wagt sich wieder einmal vor, kommt an die Tafel, zeichnet einen Kreis: „Wir könnten ja kleine Stücke machen, die alle fast Dreiecke sind.“ Sie zeichnet kleine Schnitze. „Vielleicht Winkel von 10°.“ – Schon vermute ich, dass sie die Trigonometrie zu Hilfe nehmen will. – Aber nein, sie unterteilt weiter, bis Muriel interveniert: „Wir wissen schon, wie Du es meinst.“ Anna: „Und so können wir die Fläche berechnen.“ – „Wie?“ Nach einigem Hin und Her steht dann eine Formel an der Tafel: $F_n = (g \cdot h)/2 \cdot n$ für die Fläche des n-Ecks. Ich frage nach: „Ist das die Kreisfläche?“ Anna: „Nein, aber jetzt machen wir die Stücke immer kleiner.“ Christof voreilig: „Alles strebt gegen Null.“ – „Wirklich?“ – Schliesslich wird er präziser: „h strebt gegen r, g strebt gegen 0 und n strebt gegen unendlich.“ Und jetzt? Die Frage nach dem Produkt $g \cdot n$ erhellt den Rest. Dies ist der Vielecksumfang und dieser strebt gegen den Kreisumfang. Und wenn wir die Einteilung immer feiner machen, so strebt auch die Fläche des



Vielecks beliebig nahe gegen die Kreisfläche, ist praktisch nicht mehr von ihr zu unterscheiden. Wir dürfen demzufolge schreiben $F = (U \cdot r)/2$. Silvan erkennt sofort, dass dies ja obige Formel ist und zeigt auch, dass wir den Weg zurück überlegen können und damit die vorher postulierte Proportion erhalten.

$$F = (U \cdot r)/2 \quad \text{Division durch } r^2 \text{ führt auf} \quad F / r^2 = U / 2r = U / d.$$

Somit haben wir eingesehen, warum bei der Umfangberechnung und bei der Kreisberechnung *derselbe* Faktor, er wird mit π bezeichnet, vorkommen muss. Eine der erstaunlichsten Erkenntnisse der Mathematik überhaupt.

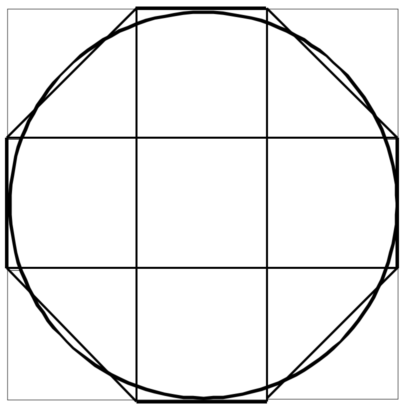
$$F = \pi \cdot r^2 \quad \text{und} \quad U = \pi \cdot d.$$

Am **Donnerstag** erscheint erstmals auch Felix, der krank war. Wir nutzen die Gelegenheit, um zu rekapitulieren, die wichtigsten Zusammenhänge und Erkenntnisse hervorzuheben und zu notieren. So bleibt etwa noch eine halbe Stunde für die Annäherung an diese Grösse π. Wir sitzen wieder am grossen Tisch und ich lese einen Text vor: „Und er machte das gegossene Meer (gemeint ist eine grosse, runde Schale, die für die Waschungen der Priester bestimmt war) zehn Ellen weit von einem Rande bis zum andern, ringsum rund und fünf Ellen hoch; und eine Schnur von dreissig Ellen Länge konnte es rings umspannen.“ Dass der Satz aus der Bibel stammt, ist allen klar. Die Vermutungen gehen von der Genesis bis zu den Korintherbriefen. Der Text, entstanden rund 1000 vor Chr., steht im alten Testament (Könige I, 7;23) und beschreibt die Ausgestaltung des Tempels Salomos. Es wird klar, dass hier von einem Verhältnis U/d gleich 3 die Rede ist. Eine nicht eben gute Annäherung. Als nächstes will ich Näherungen der Ägypter erwähnen. Zu diesem Zweck giesse ich auf ein Kuchenblech feinen Sand, ein Laptop der Antike. Erstaunen zeigt sich auf den Gesichtern. Wir wissen, dass Archimedes viele seiner Erkenntnisse anhand von Zeichnungen in der Asche bei der Feuerstelle und im Sand auf einem Brett oder am Strand gewonnen hat. Dem römischen Legionär soll er zugerufen haben: „Noli turbare circulos meos“ (vielleicht sagte er es auf griechisch?) – „Zerstöre mir meine Kreise nicht“ – , bevor er im Alter von 75 Jahren bei der Eroberung von Syrakus durch die Römer erstochen wurde.

Ich zeichne einen Kreis und umschliessend ein Quadrat, das ich in 9 gleiche Teilquadrate unterteile. Die Diagonalen in den Eckquadraten erzeugen ein Achteck, dessen Fläche F_8 die Kreisfläche annähert. Wir finden:

$F_8 = 7 \cdot (d/3)^2 = 28/9 \cdot r^2 = 3.111... r^2$

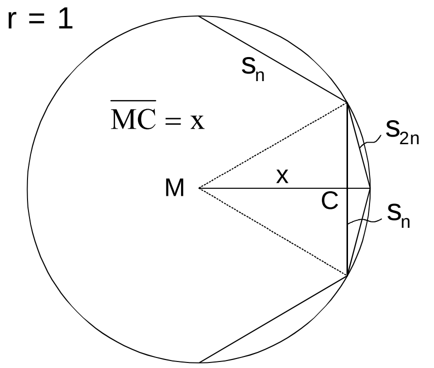
Jetzt bitte ich die Schülergruppe, den einfachen Zusammenhang aufzuschreiben. Eigentlich möchte ich die Sandschrift löschen, aber die Schüler und Schülerinnen protestieren, sie könnten es sonst nicht notieren. (Meine heimliche Frage: Haben sie wirklich begriffen, was wir gemacht haben?)



Im Papyrus Rhind (500 v. Chr.), dem ältesten Rechenbuch der Welt, ist sogar noch eine Verbesserung zu $(16/9)^2$ vorgenommen worden. „Verkürze den Durchmesser des Kreises um 1/9 seiner Länge und errichte über der so verkürzten Strecke das Quadrat.“ Eine mögliche Erklärung dazu verteile ich auf einem Blatt zum Studieren. Soviel für heute.

Über Nacht auf **Freitag** habe ich einen sehr schönen, fast würfelförmigen Pyritkristall ausgeliehen und bringe ihn mit. Der Kristall löst Staunen aus. Ob dieser wirklich echt sei? Ob er abgeschnitten sei? Wie so ein Ding überhaupt wachsen könne? Zwar wird festgestellt, dass gegenüber liegende Kanten nicht genau parallel und nicht alle Kanten genau gleich lang sind, aber die Bewunderung bleibt. Es gibt offenbar in der Natur würfelförmige Gebilde. Anna besitzt eine Pyritsonne und schildert eindrücklich, wie diese aussieht.

Zum heutigen Thema: Wie können wir π noch besser bestimmen? Die Annäherung von innen durch Vielecke und die Verfeinerung durch Verdoppelung der Eckenzahl, das wurde ja schon vor zwei Tagen von Anna erklärt. Aber wie können wir dieses Verfahren durchführen? Ich erläutere den mühsamen Weg, den Archimedes gehen musste; wie er mit langen Bruchrechnungen die Seite s_{12} des regelmässigen Zwölfecks aus der Sechseckseite s_6, dann daraus s_{24}, die Seite des 24-Ecks usw. bis zum 96-Eck angenähert hat. Mit damals bekannten mathematischen Sätzen und unseren heutigen Mitteln der Algebra und der Wurzelschreibweise können wir ein Verfahren finden, mit dem sich *formelmässig* die Seitenlänge s_{2n} des2n-Ecks aus der Seitenlänge s_n des n-Ecks ausdrücken lässt. Ein kurzer Arbeitsauftrag soll der Gruppe den Weg zur Formel weisen. Mit viel Zeit und etwas Hilfe gelingt es. Zudem ergeben sich Formeln für den Umfang U_n des einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks und die Fläche F_{2n} des dem Kreis einbeschriebenen regelmässigen 2n-Ecks.



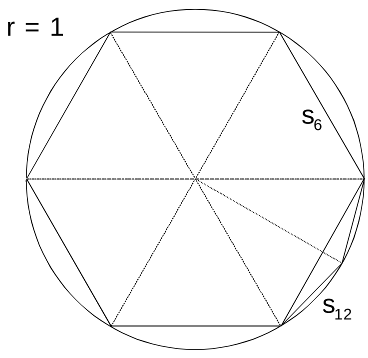
Der Auftrag: Verwende zweimal den Satz von Pythagoras und eliminiere die Grösse x!

Wir erhalten:

$$\boxed{s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}}$$

$$U_n = n \cdot s_n \qquad F_{2n} = n \cdot s_n / 2$$

Auch wer diese Formel nicht im Detail herleiten mag, kann ihre Bedeutung verstehen lernen und die Folgerungen geniessen. Im Kreis mit Radius r = 1 zeichnen wir das regelmässige 6-Eck, bestehend aus 6 gleichseitigen Dreiecken, also ist $s_6 = 1$. Das wiederholte Einsetzen in die hergeleitete Formel ist nochmals eine gute Algebraübung. (Noch schöner werden die Wurzelausdrücke, wenn wir vom regelmässigen Viereck mit Seitenlänge $s_4 = \sqrt{2}$ ausgehen.)



$$s_6 = 1$$
$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$
$$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$
$$s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

Und wie berechnen sich diese Wurzelausdrücke? Mit vielen Klammern? Natürlich wollen alle auch gleich den kompliziertesten Ausdruck berechnen. Von innen beginnen, eine geniale Idee! Bis zum Schluss der Stunde haben wir dank dem Speicher des Taschenrechners doch einige Umfänge und Flächen berechnet.

s_6	=	1	U_6	=	6			
s_{12}	=	0.517638	U_{12}	=	6.21166	F_{12}	=	3.00000
s_{24}	=	0.261052	U_{24}	=	6.26525	F_{24}	=	3.10583
s_{48}	=	0.130806	U_{48}	=	6.27869	F_{48}	=	3.13263
s_{96}	=	0.065438	U_{96}	=	6.28206	F_{96}	=	3.13935

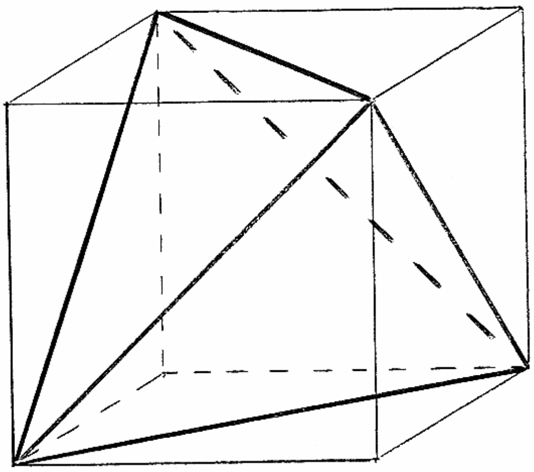
Archimedes hat mit den einfachen Mitteln, die damals zur Verfügung standen, ebenfalls bis zum 96-Eck gerechnet und gefunden:

$$3 + 10/71 < \pi.$$

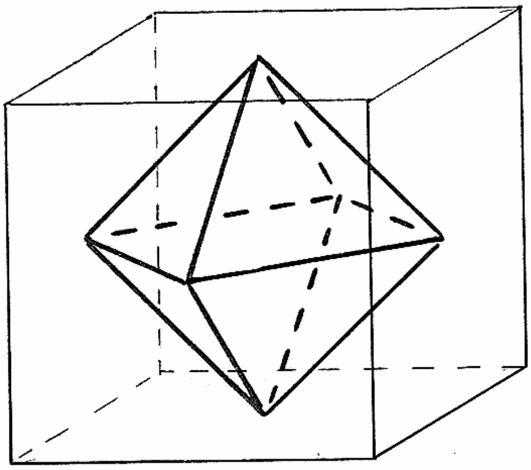
Durch das Morgensingen am **Samstag** wird die nächste Sitzung stark verkürzt. Wir benötigen die ganze Zeit zur Besprechung der Polyeder–Aufgaben (siehe folgende Seite).

Bereits ist **Montag**, die zweite Woche beginnt. Draussen liegt Schnee. Es ist Schnee, der die Herzen und Köpfe füllt und blockiert. Entsprechend sind keine Aufgaben erledigt. Sandor, der sechste Schüler kreuzt auf. Er ist begeistert über seine Schnupperlehre als Werkzeugmechaniker und über seine Lehrstelle, die er sich dabei gesichert hat. Da am Wochenende alle im Freien waren, frage ich nach: „Habt Ihr gestern den Mond gesehen?“ Es war soeben Vollmond. – Anna: „Ja, er hatte einen grossen Hof.“ – Christof: „Das Spiegelbild der Sonne.“ – „Wenn Ihr den Mond anschaut: erblickt Ihr eher eine Kugel oder eine Scheibe?“ – „Eine Scheibe.“ – „Obwohl Ihr wisst, dass der Mond eine Kugel ist. Wie viel grösser ist die beleuchtete Kugelfläche als die von uns wahrgenommene Scheibenfläche?“ – Christof: „Das π-fache.“ – Anna: „Das kann nicht sein, das 1.5-fache der Kreisfläche?“ – „Das π/2-fache?“ – Ich: „Das könnte wohl sein. Wir werden die Lösung noch diese Woche kennen lernen.“

Wir sitzen um einen Tisch herum, bespannt mit Packpapier. Darauf skizzieren wir – insbesondere für Sandor – kurz den bisherigen Verlauf zur Annäherung an π. „Konnte Archimedes wissen, wie gut seine Annäherung 3+10/71 war?“ Dass die von uns oben mit dem Flächeninhalt des 96-Ecks berechnete Zahl kleiner als π ist, leuchtet allen ein. Ebenso, dass wir entsprechende Überlegungen mit einer Annäherung von aussen anstellen können, um eine Abschätzung nach oben zu bekommen. Also werden wir uns heute nochmals ganz der Bestimmung von π widmen. – Wir sitzen um den langen Tisch mit den Packpapiernotizen, zeichnen jetzt bei einem Kreis zum einbeschriebenen auch das umbeschriebene n-Eck. Ähnlichkeit fällt sofort auf. Sie hilft uns, die Seite t_n des umbeschriebenen n-Ecks durch die Seite s_n des einbeschriebenen n-Ecks auszudrücken. Wir entwickeln diese Beziehung und ebenso die Formeln für Fläche A_n und Umfang V_n des umbeschriebenen Vielecks gemeinsam auf dem Packpapier. Auffallend ist die nahe Verwandtschaft dieser Formeln, die wir wieder finden in den Formeln für die Kreisberechnung. Individuell wird jetzt das Gewonnene notiert und anschliessend in einer Tabelle zahlenmässig umgesetzt. Verschiedene Werte übernehmen wir von früher.

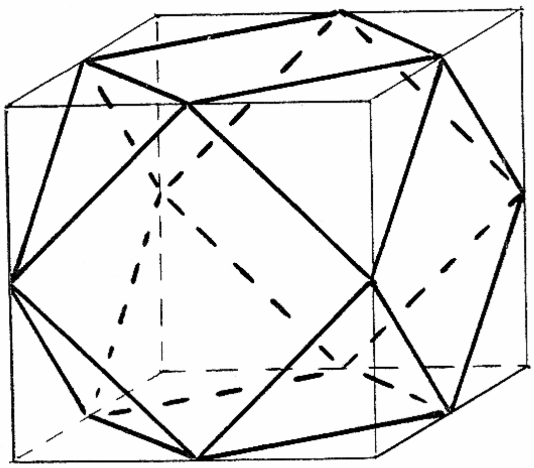


$$\underline{V} = s^3 - 4\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{s^2}{2}\cdot s\right)$$
$$= s^3 - \frac{2}{3}s^3 = \underline{\frac{1}{3}s^3}$$
$$F_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(s\sqrt{2})^2$$
$$\underline{O} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot s^2\cdot 2 = \underline{2\sqrt{3}s^2}$$



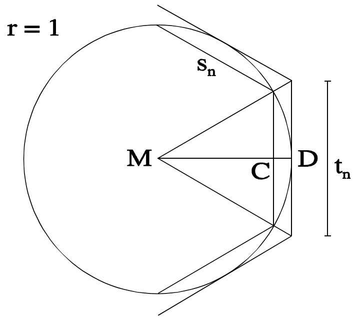
$h = \frac{s}{2}$ Kante $k = \frac{s\sqrt{2}}{2}$

$$\underline{V} = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{s}{2}\right) = \underline{\frac{1}{6}s^3}$$
$$O = 8\cdot F_\Delta = 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$\underline{O = \sqrt{3}\cdot s^2}$$



$$\underline{V} = s^3 - 8\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{s^2}{8}\cdot\frac{s}{2}\right)$$
$$= s^3 - \frac{1}{6}s^3 = \underline{\frac{5}{6}s^3}$$
$$O = 6\cdot F_\Box + 8\cdot F_\Delta$$
$$= 6\cdot\frac{s^2}{2} + 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$\underline{O = (3+\sqrt{3})s^2}$$

Lösung der Polyeder-Aufgaben 2 bis 4



$$t_n : s_n = \overline{MD} : \overline{MC} = 1 : \sqrt{1 - s_n^2/4}$$

$$\boxed{t_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}}$$

	UMFANG	FLÄCHE
umbeschriebenes n-Eck	$V_n = n \cdot t_n$	$A_n = n \cdot t_n / 2$
einbeschriebenes n-Eck	$U_n = n \cdot s_n$	$F_{2n} = n \cdot s_n / 2$
Kreis	$U = 2 \cdot \pi$	$F = \pi$

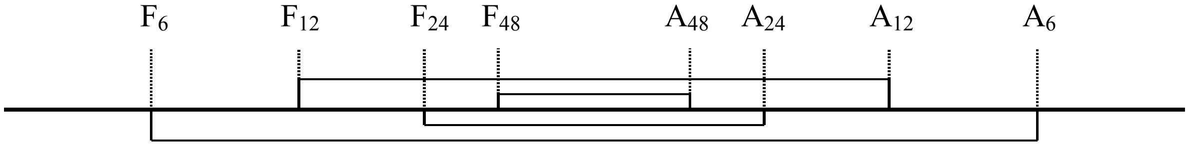
n	s_n	t_n	F_n	A_n
6	1	1.154701		3.464102
12	0.517638	0.535856	3	3.215390
24	0.261052	0.263305	3.105829	3.159660
48	0.130806	0.131087	3.132629	3.146086
96	0.065438	0.065473	3.139350	3.142715

Lange dauert es, bis allen klar ist, wie t_n und die Flächen berechnet werden. Ich verteile ein Blatt, auf dem die Daten bis zum 196608-Eck notiert sind. Die Stunde ist vorbei, harziger als sonst. Der draussen liegende Schnee ist wichtiger. Und doch: Auf Wunsch der Schülerinnen und Schüler halten wir heute vor dem Mittagessen noch eine Stunde.

Ich werde vorschlagen, frontal zu arbeiten, Übersicht zu verschaffen, das Erarbeitete zu ordnen und auszuwerten. Das Packpapier ist an die seitliche Wandtafel geklebt. Mehrere Blätter, die ich für die Stunde brauchen werde, liegen auf dem Tisch. Christof fällt die Näherung 355/113 aus China auf. „Wie gut ist diese Näherung?“ Er schaut auf dem Taschenrechner und staunt. Anna sitzt seitlich auf der vordersten Bank und ist ebenfalls in das Blatt vertieft. Neugier und Interesse sind offenbar.
In Bildern zeige ich die Annäherung des Kreises durch das 6-Eck, das 12-Eck, das 24-Eck und das 48-Eck, welches schon fast nicht mehr vom Kreis unterschieden werden kann.

Wir halten fest:

1. $F_6 < F_{12} < F_{24} < F_{48} \ldots$
$A_6 > A_{12} > A_{24} > A_{48} \ldots$



Der Flächenunterschied $A_n - F_n$ wird mit wachsendem n immer kleiner, strebt gegen null, was anschaulich sofort klar ist. Ebenso könnte der Kreisumfang von innen und von aussen angenähert werden.

Ich erläutere das **Prinzip der Intervallschachtelung**, während gleichzeitig ein Schachtelungsmodell mit Würfeln die Runde macht. Bekannte Beispiele sind die russischen Babuschkas, das Feilschen um einen guten Preis und das Verhandeln um einen Vertrag, auch wenn dies keine unendlichen Prozesse sind, es mag manchmal noch so danach aussehen. Christof: „Ist da noch etwas drin am Schluss?“ – Muriel: „Nichts.“ – Silvan: „ Doch, π!“ – Ich: „Wird die Kreisfläche π je von einem F_n überschritten?“ – „Nein.“ – „Wird sie je von einem A_n unterschritten?“ – „Nein.“ – „Wird sie jemals von einem F_n oder A_n erreicht?“ – „Nein. Also muss die Zahl π noch drin liegen.“ – Muriel: „Ist π in der Mitte der Intervalle?“ – Felix, ganz klar: „Nein, das Mittel müsste immer gleich sein.“ Er verweist auf mein Blatt, auf dem ich nebst den Flächen auch die Flächendifferenz und die Flächenmittel angegeben habe.

2. Archimedes kannte die Wurzeldarstellung und Wurzelberechnung in unserem Sinne nicht. Er musste mit einer schwerfälligen griechischen Buchstabenschreibweise für die Zahlen und mühsamen Annäherungen der Wurzeln durch rationale Zahlen arbeiten. So kam er anhand der halben Umfänge der 96-Ecke auf die Werte $3\ 10/71 < \pi < 3\ 10/70 = 22/7$. Wesentlich und ganz neu war die Erkenntnis von Archimedes, dass dieses Verhältnis Umfang zu Durchmesser, U:d, nur angenähert mit Zahlen zu fassen ist und deshalb zwischen zwei Grenzen eingeschlossen werden muss. Dies tat er dann auch mit sehr guten Werten. Die Grösse 22/7 wurde über Jahrhunderte in der Praxis benutzt und später *Archimedische Zahl* genannt. Berechnen wir mit dem Taschenrechner die halben Umfänge des einbeschriebenen bzw. umbeschriebenen 96-Ecks und vergleichen wir mit den Angaben von Archimedes, so staunen wir über die geringen Abweichungen. Wie viele Prozent weicht der Wert 22/7 vom effektiven Wert für π ab? Vergleichen können wir nur mit dem Taschenrechnerwert, was für unseren Zweck allerdings keinen Unterschied macht. Nach längeren Diskussionen über Prozente und Promille stellen wir fest, dass der untere Wert 0.24 Promille kleiner und der obere 0.40 Promille grösser ist als π. Der untere Wert ist also genauer; der obere, einfachere und handlichere, hat sich in der Praxis aber durchgesetzt. „Ob wohl bekannt war, dass der untere Wert genauer ist?“ – „Nannte Archimedes diese Zahl auch π?“ – „Nein, erst seit Euler ist dies üblich.“ – „Aber es sind doch Texte von Archimedes bekannt.“ – Dieser argumentiert geometrisch, vergleicht Flächen oder Streckenlängen: „Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so gross wie der Durchmesser und noch etwas grösser, nämlich um weniger als 1/7 des Durchmessers, aber um mehr als 10/71.“ Das Verfahren von Archimedes weist auch einen Weg, wie man π konstruktiv annähern kann. Wie später bewiesen wurde, ist π aber nicht mit Lineal und Zirkel konstruierbar.

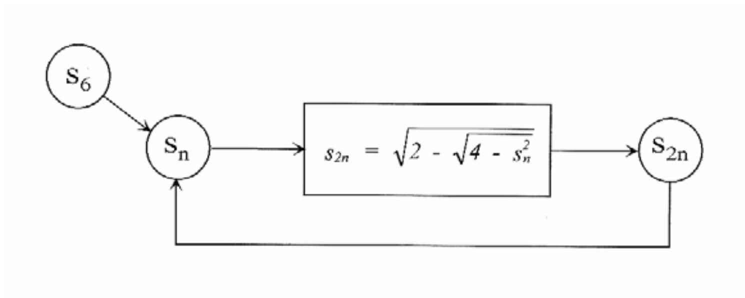
Ich weise auf die drei alten griechischen Konstruktionsprobleme hin:

– die Quadratur des Zirkels, d.h. die konstruktive Verwandlung eines Kreises in ein Quadrat (mit gleicher Fläche),
– die Verdoppelung des Würfels und
– die Dreiteilung eines vorgegebenen Winkels.

Die Mathematiker haben inzwischen bewiesen, dass diese Probleme konstruktiv nicht lösbar sind. Trotzdem will mir morgen Christof einen Lösungsvorschlag bringen. Im Gegenzug werde ich die Papierstreifenkonstruktion von Archimedes zur Dreiteilung des Winkels präsentieren und begründen lassen.

Es folgt noch ein Streitgespräch über Konstruierbarkeit, Annäherung und Genauigkeit.
„Die dritte Wurzel aus 2 können wir doch berechnen und dann auf dem Lineal abtragen." – „Diese Zahl lässt sich aber nicht konstruieren. Die Quadratwurzel aus 2 z.B. lässt sich konstruieren mit dem Satz des Pythagoras" – „Aber das wird nicht genauer als die berechnete Zahl." – „Es geht nicht um Genauigkeit, sondern um die Möglichkeit der Konstruktion mit Zirkel und Lineal." . . .

3. Ich weise nochmals auf die Rekursion und ihre grosse Bedeutung im Zusammenhang mit dem Computer hin. Ebenso auf Berechnungen von π durch Reihenentwicklungen. Wir beginnen mit der Seitenlänge s_6 des einbeschriebenen Sechsecks als Startwert, d.h. n = 6. Eingesetzt in die Formel erhalten wir s_{12}, die Seite des 12-Ecks. Diesen Wert nehmen wir als neuen Eingabewert, also n = 12, und es resultiert s_{24}, die Seite des 24-Ecks, usw... Geeignete Rechenhilfsmittel vorausgesetzt lässt sich dieser Prozess beliebig fortsetzen.



Meine Zusammenstellung über die Annäherung der Menschheit an dieses Verhältnis von Umfang zu Durchmesser bzw. von Fläche zu r^2 von den biblischen Anfängen bis zu Archimedes, über die Einführung der Bezeichnung π vor gut 250 Jahren und die Berechnung von über einer Billion Stellen (Stand Dezember 2002) heute weckt grosses Interesse. Ob ich ein Buch mit den ersten 1'000'000'000'000 Stellen von π hätte. Ich bezeichne das als Papierverschwendung. Felix: „Dem Rechner kannst Du unendlich viele Stellen einpflanzen." – „???" – Felix: „Aber man kann schon recht viele, wenn man einen Gigabyte-Speicher hat, da hat man schon fast unendlich viele Stellen." Gegen Schluss der Stunde höre ich den Ruf nach Aufschreiben, Verdauen, Musse.

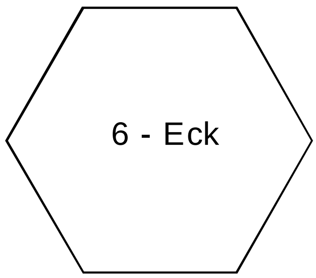
Didaktische Anmerkungen: *Diese Gleichheit der Verhältnisse Umfang zu Durchmesser mit Fläche zu Radiusquadrat ist wohl eines der Phänomene, die uns vorerst staunen lassen, unerklärlich erscheinen mögen, zum Verweilen auffordern. Das Verhältnis Umfang zu Durchmesser ist nicht durch ein Verhältnis ganzer Zahlen anzugeben, sondern grundsätzlich nur durch einen Näherungsprozess bestimmbar. Damit war es erst einem Genie wie Archimedes, der die exakte Argumentation des Theoretikers mit der Offenheit des Praktikers verband, möglich, sich dieser Grösse zu nähern. Er zeigt Methoden, mit denen wir dies* sowohl konstruktiv als auch zahlenmässig *beliebig genau tun können. Unsere neuzeitlichen algebraischen und elektronischen Mittel erlauben zusätzlich theoretische und praktische Kenntnisse über diese universelle Konstante π.*

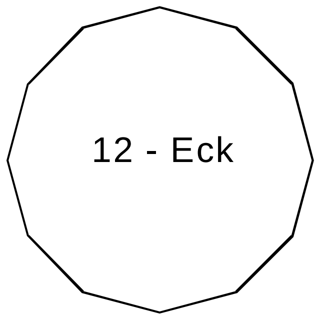
Numerische Zusammenstellung

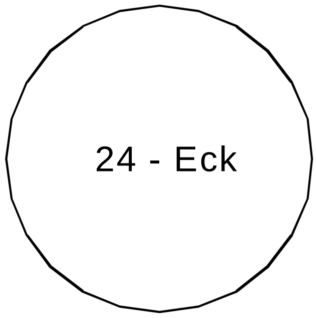
Approximation des Kreises durch
regelmässige Vielecke,
ausgehend vom gleichseitigen Dreieck

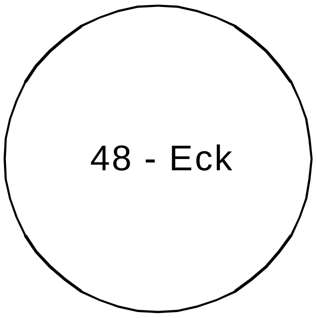
n-Eck	Fläche innen	Fläche aussen	Differenz	Mittelwert
N	F_n	A_n	$A_n - F_n$	$(A_n + F_n) / 2$
3	1.2990381057	5.1961524227	3.8971143170	3.2475952642
6	2.5980762114	3.4641016151	0.8660254038	3.0310889132
12	3.0000000000	3.2153903092	0.2153903092	3.1076951546
24	3.1058285412	3.1596599421	0.0538314009	3.1327442417
48	3.1326286133	3.1460862151	0.0134576019	3.1393574142
96	3.1393502030	3.1427145996	0.0033643966	3.1410324013
192	3.1410319509	3.1418730500	0.0008410991	3.1414525004
384	3.1414524723	3.1416627471	0.0002102748	3.1415576097
768	3.1415576079	3.1416101766	0.0000525687	3.1415838923
1536	3.1415838921	3.1415970343	0.0000131422	3.1415904632
3072	3.1415904632	3.1415937488	0.0000032856	3.1415921060
6144	3.1415921060	3.1415929274	0.0000008214	3.1415925167

$\pi = 3.1415926535...$









Die Zahl π im Laufe der Zeit

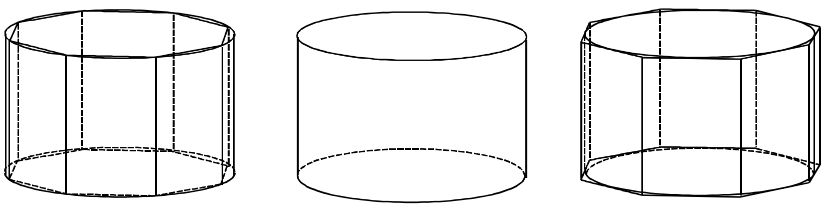
$$\pi = U / d = F / r^2 = 3 . 14159\ 26535\ 89793\ 23846 \ldots$$

Zeit		π	Genauigkeit
1500 BC	Babylonier		
	Bibel (AT, König Salomo)	3	(- 4.5%)
	Babylonier später	$25/8 = 3.125$	(- 0.5%)
500 BC	Ägypten (Papyrus Rhind)	$(16/9)^2 = 3.1605$	(+0.6%)
250 BC	Archimedes	$3+10/71 < \pi < 3+10/70 = 22/7$	(- 0.02%)
	(→Archimedische Zahl; 22/7 über Jahrhunderte im Abendland verwendet!)		(+0.04%)
470 AC	China	$355/113$	(+0.000008%!)
650 AC	Brahmagupta (Indien)	$\sqrt{10}$	(+0.7%)
1600 AC	Ludolf van Ceulen (1540 - 1610) berechnet π auf 35 richtige Stellen! (→Ludolfsche Zahl)		
1676 AC	Gregory und Leibniz : Gleichung $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - + \ldots$ (langsam: ca. 1 Million Summanden für 6 richtige Dezimalen!)		
1736 AC	Leonhard Euler (1707 - 1783) benutzt in seinem Hauptwerk π für U/d nach dem griechischen Wort für Umfang peri métros.		
1761 AC	Lambert (1728 - 1777) beweist, dass π irrational ist.		
1882 AC	Lindemann (1852 - 1932) beweist, dass π transzendent, also nicht algebraisch ist. Damit ist die Quadratur des Zirkels nicht möglich!		
1948 AC	vor Computereinsatz: 808 Stellen von π bekannt.		
2002 AC	Eine Forschergruppe der Universität Tokio hat inzwischen mit Computerunterstützung über eine Billion Stellen errechnet.		

IV. Akt: Im Rundland: Über Zylinder und Kegel zur Kugel

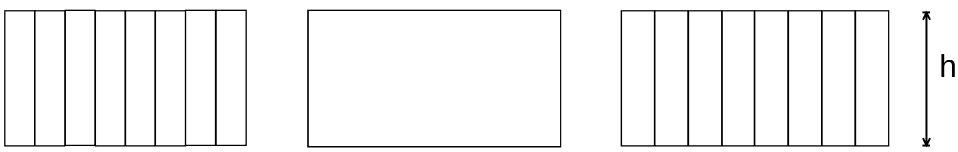
Noch am Abend stelle ich drei Bänke zu einem Hufeisen zusammen, um den **Dienstag** in einer anderen Struktur zu starten. Der Mathematiklehrer des Kurses besucht uns, sitzt als Zuschauer hinten in der Ecke. „Was steht an für heute?“ Christof hat seine nobelpreis-verdächtige Dreiteilung des Winkels im Safe seines Zimmers vergessen; also verzichte ich im Moment darauf, auf die »Papierstreifenkonstruktion« von Archimedes einzugehen. Silvan wünscht eine Zusammenstellung aller bisherigen Formeln. Ich bitte ihn, die bereits erarbeitete gemeinsame Liste zuhanden aller zu vervollständigen. Wir beschliessen, erste Schritte ins Rundland zu wagen und uns Zeit zum Verdauen und Aufschreiben zu nehmen. Von den Tischen nebenan hole ich Zylinder und Kegel, stelle sie in die Mitte und rege an zum Nachdenken über Volumen und Oberfläche dieser Körper. Vorerst jeder still für sich. – Nach kurzer Zeit schauen mich einige an, signalisieren ihre Bereitschaft.
„Mit welchem Körper beginnt Ihr?“ – Christof: „Mit dem Zylinder, dieser ist gleich aufgebaut wie das Prisma, also haben wir die gleiche Formel: Das Volumen berechnet sich als Grundfläche mal Höhe.“ „Wäre Archimedes damit zufrieden gewesen?“ – Felix: „Er hätte vielleicht einen quadratischen Quader rundherum gebaut, dann parallel zur Höhe die Kanten weg geschnitten zum regelmässigen Achteck, usw. ... So können wir beliebig nahe an den Zylinder ran kommen, wie wir wollen.“ Dass wir von aussen und von innen so den Zylinder einschachteln können, leuchtet ein. Mit der Grundfläche wird gleichzeitig auch das Volumen eingeschachtelt und es gilt:

$$\mathbf{V_z} = G\,h = \boldsymbol{\pi\, r^2\, h}$$



Wickeln wir den Mantel von einbeschriebenem und umschriebenem Prisma ab, so erhalten wir eine Einschachtelung für den Zylindermantel M_z.

$$8 \cdot s_8 = U_8 \quad < \quad U = 2\,\pi\, r \quad < \quad 8 \cdot t_8 = V_8$$

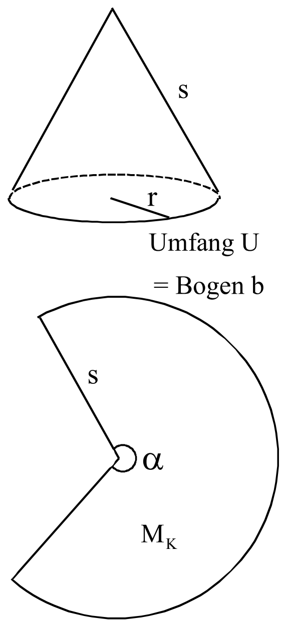


$$h \cdot U_8 \quad < \quad M_z = h \cdot 2\,\pi\, r \quad < \quad h \cdot V_8$$

Also gilt für den Mantel: $\mathbf{M_z} = U_0\, h = \mathbf{2\,\pi\, r\, h}$
und für die Oberfläche: $\mathbf{O_z} = 2\,G + M_z = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, h = \mathbf{2\pi r\,(r+h)}$

„Und wie steht es mit dem Kegel?“ Felix: „Das Volumen berechnet sich wie bei der Pyramide.“

Christof: „Der Kegel lässt sich durch eine 6-eckige Pyramide annähern, durch Verdoppelung der Eckenzahl kommen wir beliebig nahe ans Volumen.“ – Wieder können wir die Annäherung von aussen und von innen durchführen und erhalten somit für das Kegelvolumen $\mathbf{V_K} = (G\,h) / 3 = \mathbf{(\pi\, r^2\, h) / 3}$.



Und wie bestimmen wir den Kegelmantel M_K? Hier ist die Einschachtelung wieder vergessen. Christoph zeichnet an der Tafel eine Sektorfläche als Abwicklung des Kegels. „Es gibt einen Zentriwinkel.“ Christof will sagen, wenn wir den Zentriwinkel α kennen, dann können wir die Sektorfläche berechnen. Anna: „Wenn wir den Kreisbogen kennen, kann man die Fläche berechnen.“ – Ich: „Kennen wir den Bogen b?“ – Anna: „Ja, das ist $2\pi r$, der Umfang U des Grundkreises beim Kegel.“ – „Und jetzt?“ – Es dauert lange, bis die Proportionalität zwischen Winkeln im Zentrum, zugehörigen Flächen und entsprechenden Bogen erkannt wird. Für einige Schüler ein AHA-Erlebnis!

Doch dann folgert Felix Schlag auf Schlag.
$\alpha : 360° = M_K : F_o = b : U = 2\pi r : 2\pi s = r : s$
Dabei ist F_o die ganze Fläche des Kreises mit Radius s, also $F_o = \pi s^2$.

Es folgt für den Kegelmantel: $\mathbf{M_K} = (r{:}s)\cdot F_o = (r{:}s)\cdot \pi s^2 = \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{r\, s}$
und für die Kegeloberfläche: $\mathbf{O_K} = G + M_K = \pi r^2 + \pi\, r\, s = \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{r\,(r + s)}$
Wie einfach doch im Raum diese Formeln für Zylinder und Kegel sind! Ist der Übergang vom Geraden zum Gekrümmten mit π gelungen, so herrschen wieder einfachste Gesetzmässigkeiten!

Um an Früheres anzuknüpfen, zeige ich auf obige Figur, wo gilt: Umfang $U = 2\pi r =$ Bogen b. Aufgelöst ergibt sich $\pi = b/(2r)$. Die Sektorfläche F_s, oben dargestellt als Mantelfläche M_k, wird zu $\mathbf{F_s} = M_k = \pi rs = [b/(2r)] \cdot rs = \mathbf{(b\cdot s)/2}$.
Die Formel erinnert uns an die Formel für die Fläche des Dreiecks! Die Fläche eines Kreissektors mit Radius s und Bogen b ist gleich gross wie die Fläche eines Dreiecks mit Grundlinie b und Höhe s!

Es war ein konzentriertes, lebendiges und konstruktives Gespräch, das zeigte, dass die wichtigsten Ideen und Begriffe vorhanden sind. Die Schülerinnen und Schüler beginnen, das Erarbeitete aufzuschreiben, ohne alles von mir nochmals zusammengestellt zu erhalten. Andernorts würde jetzt die Pausenglocke unterbrechen; hier verbleibt bis zum Ertönen des Gongs noch eine gute halbe Stunde, um aufzuschreiben, zu verdauen und bisherigen oder allenfalls einer neuen Fragestellung nachzugehen.

So zum Beispiel der folgenden Aufgabe:
Die kleine Pizza hat einen Durchmesser von 18 cm, die grosse von 26 cm. Um wie viel Prozent grösser sind a) Umfang b) Fläche c) Volumen der grossen Pizza?

Meine Pizzafragen wurden offenbar im Restaurant auch schon aufgeworfen.
So hat jedes noch zu tun, der Rest der Stunde vergeht im Nu. Dies war eine der besten Sitzungen bisher. Was hat wohl dazu beigetragen: Der Besuch des Mathematiklehrers, die andere Sitzordnung, das eher einfache Thema, das mildere Wetter, ... ???

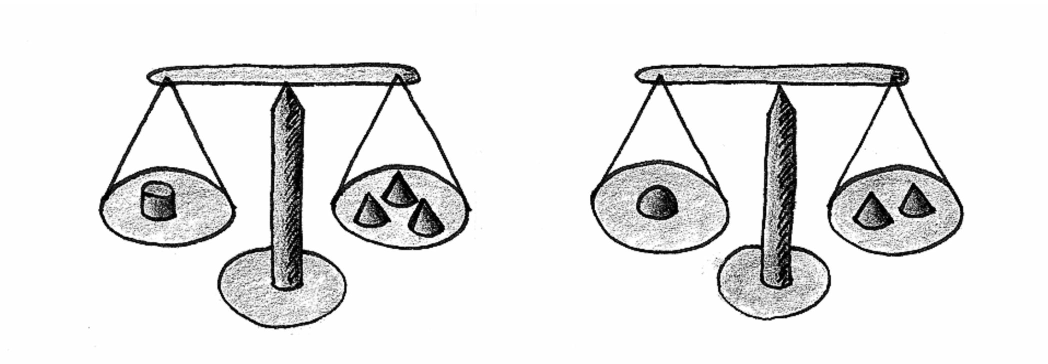
Heute ist **Mittwoch**. Der Mathematiklehrer hat nochmals hinten Platz genommen. Einige der Schüler sind schon da, beschäftigen sich mit der „Pizza-Aufgabe“. Komisch, wenn sie da sind, läuft etwas, aber zuhause wird wenig gearbeitet. Es gibt einen fliessenden Anfang. Felix kommt 10 Minuten verspätet, da er die Bahn verpasst hat. Ich erläutere kurz meine Intentionen: die Pizza-Aufgabe klären und Originalsätze von Archimedes studieren, um zu erfahren, wie er sich bildhaft mit Flächenvergleichen statt mit formalen Gleichungen ausdrückt. Nach dem Bereinigen der Pizza-Aufgabe – der Umfang ist 44.4 % grösser; Fläche und Volumen sind je um 108 % grösser – lege ich drei Sätze von Archimedes über Kegel und Kegelstumpfe vor und lasse nachdenken.

1. „Der Mantel jedes geraden Kegels ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zwischen der Seitenlinie des Kegels und dem Radius des Grundkreises.“ (Bemerkung: x heisst mittlere Proportionale von a und b, wenn gilt: $a : x = x : b$, d.h. x ist die Grösse in der Mitte dieser Proportionalität.)
2. „Der Mantel eines geraden Kegels hat zum Grundkreise dasselbe Verhältnis wie die Seitenlinie zum Radius des Grundkreises.“
3. „Wenn ein gerader Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so ist das Stück des Kegelmantels, das zwischen den parallelen Ebenen liegt, gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zwischen dem Stück der Seitenlinie, das zwischen den parallelen Ebenen liegt und der Summe der Radien des Grundkreises und des Schnittkreises.“

Die Sätze von Archimedes erzeugen Kopfweh. Christof will es aufgeben. Anna empfiehlt, eine Zeichnung zu machen. Was ist die mittlere Proportionale? Endlich klärt sich das Ganze, steht der Satz in Form der einfachen Gleichung $M_K = \pi r s$ an der Tafel. Und der Beweis, die Herleitung? Das haben wir ja in der letzten Stunde herausgefunden! Heureka! Der zweite Satz wird besser verstanden. Er ergibt sich für uns ‚sofort’ algebraisch. Beim dritten Satz: noch mehr Kopfweh! Endlich kommen die Zeichnungen, dann – nach langem auch die Formel! Noch länger dauert es für die Herleitung dieser Formel. Für die individuelle Bearbeitung fehlt die Energie, also bewältigen wir es zusammen. Altes Wissen über Ähnlichkeit und Proportionen kann dabei reaktiviert werden. Zum Notieren reicht die Zeit nicht mehr. Auch die Kugel bleibt für morgen verspart.

Es ist **Donnerstagmorgen**, die Schüler wirken müde. Ich verteile Tennisbälle und leite einige Übungen an für Hand- und Rückenmassage. Es ist allgemein wohltuend. Noch lange hätten alle weiterfahren können. So, das war die Begegnung mit der Kugeloberfläche!

Bevor wir uns dieser widmen können, sollte aber das Gestrige notiert werden. Da sehr unterschiedlich Zeit gebraucht wird, lege ich – entgegen meiner ursprünglichen Absicht – zum Experimentieren eine grosse indische Waage samt Halbkugel, Zylinder und drei Kegeln aus Holz, alle mit gleichem Grundkreis und gleicher Höhe, auf einen Tisch. Trotz rascher Ermüdungserscheinungen in den Armen und dem Ruf nach einem Haken in der Decke finden die Schülerinnen rasch, dass zwei Kegel wohl gleich schwer sind wie die Halbkugel und dass drei Kegel gleich schwer sind wie der Zylinder. Dass letzteres nach dem bisher Gefundenen klar ist, wird bald entdeckt. Christof folgert: „Also ergeben vier Kegel eine Kugel.“ – Damit ist er zufrieden. Die Formel für das Kugelvolumen entsteht an der Tafel. „Dies war eine experimentelle Annäherung an die Kugel“, sage ich und setze hinter die Formel drei grosse Fragezeichen.



$$V_O = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad ???$$

Ob Archimedes dieses Experiment auch gemacht hat? In Konstantinopel wurde 1906 ein Palimpsest entdeckt, d.h. ein beschriebenes Pergament, das Jahrhunderte später von der Tinte gereinigt und überschrieben wurde, wobei der ursprüngliche Text noch ganz schwach sichtbar blieb. In diesem Text ist ein Brief des Archimedes an Erathostenes enthalten, in dem er seine „Methode“ beschreibt, dass er experimentelle und heuristische Wege nutzte, um auf Formeln zu stossen, die er anschliessend aber streng bewies. Folgerichtig müsste jetzt eigentlich seine geniale Untersuchung kommen, wie er Kugel, Kegel und Zylinder in dünnste Scheiben schneidet und diese dann an einem Hebel anhängt, um schliesslich mit dem Hebelgesetz auf die Formel zu kommen. Es ist anzunehmen, dass Archimedes auch unseren einfachen Wägeversuch durchgeführt hat. Da wir bereits eine experimentelle Hinleitung zum Kugelvolumen gesehen haben, entscheide ich mich zu zeigen, wie Archimedes mit strengen Überlegungen die Kugeloberfläche O_O herleitet. Die Vorarbeiten haben wir mit den drei Sätzen gestern schon gelegt. Der bevorstehende Weg ist sehr anspruchsvoll und darum gehe ich voran: „Ich will Euch heute zu dieser Formel führen, wie ein Bergführer eine Gruppe in schwierigem Gelände zum Gipfel führt. Archimedes hat als Erster diesen Weg beschritten. Ihr müsst mir vertrauen, dass ich Euch heil ans Ziel bringe. Fragt nicht bei jedem Schritt, warum gehen wir jetzt hier- und nicht dorthin. Dies entbindet aber nicht von der Eigenverantwortung, Euch bei jedem Schritt zu vergewissern, dass der neue Stand hält, dass Ihr dort sicher und gesichert seid, nicht hängen bleibt oder gar abstürzt.“

Anknüpfend an Euklids Erzeugung der Kugel durch Rotation eines Halbkreises und Archimedes’ Einschachtelung des Kreises durch regelmässige Vielecke ergibt sich das Vorgehen (ausführlich in Dunham 1996, S. 263-276; Meschkowski Bd. I 1984, S. 96-99). Ein mitgebrachtes Drahtmodell liefert die Anschauung: die Hälfte eines regelmässigen Zwölfecks wird um eine Achse gedreht. Dabei entsteht ein Rotationskörper, bestehend aus zwei Kegelmänteln und einigen Kegelstumpfmänteln. Die Formeln zur Berechnung der einzelnen Oberflächen kennen wir bereits. Daraus bestimmen wir die Oberfläche O_R des ganzen Rotationskörpers.

Mantel des Kegels: $M_K = \pi \cdot s \cdot r$
Mantel des Kegelstumpfs: $M_{KS} = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$

DIE HEURISTISCHE METHODE

Brief von Archimedes an Eratosthenes von Kyrene
(1906 entdeckt in Konstantinopel als Palimpsest.)

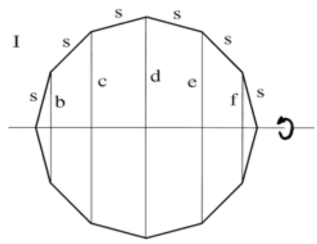
Archimedes berichtet in diesem Brief über „eine eigentümliche Methode, . . . um einige mathematische Fragen durch die Mechanik zu untersuchen“:

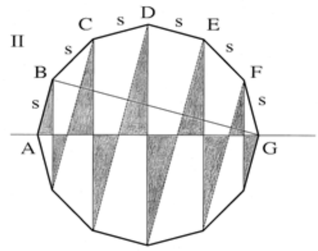
„Und dies ist nach meiner Überzeugung ebenso nützlich, auch um die Lehrsätze selbst zu beweisen; denn manches, was mir vorher durch die Mechanik klar geworden, wurde nachher bewiesen durch die Geometrie, weil die Behandlung durch jene Methode noch nicht durch Beweis begründet war; es ist nämlich leichter, wenn man durch diese Methode vorher eine Vorstellung von den Fragen gewonnen hat, den Beweis herzustellen als ihn ohne eine vorläufige Vorstellung zu erfinden. So wird man auch an den bekannten Lehrsätzen, deren Beweis Eudoxos zuerst gefunden hat, nämlich von dem Kegel und der Pyramide, dass sie 1/3 sind, der Kegel des Zylinders und die Pyramide des Prismas, die dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe haben, dem Demokritos einen nicht geringen Anteil zuerkennen, der zuerst von dem erwähnten Körper den Ausspruch getan hat ohne Beweis.“

Gemäss Zeichnung I bilden wir die Oberfläche O_R des Rotationskörpers.

$O_R = \pi \cdot s \cdot b + \pi \cdot s \cdot (b+c) + \pi \cdot s \cdot (c+d) + \ ... + \pi \cdot s \cdot (e+f) + \pi \cdot s \cdot f$

$\quad = \pi \cdot s \cdot (2b + 2c + . . . + 2f)$





Um diesen langen Klammerausdruck in den Griff zu bekommen, hat Archimedes zusätzliche Linien eingezeichnet und folgendes überlegt. In Zeichnung II sind alle Peripheriewinkel über Sehne s gleich. Somit sind die schraffierten Dreiecke ähnlich und ähnlich zum Dreieck ABG mit $\overline{BG} = x$. Unter mehrfacher Bildung des Verhältnisses s : x und Addition ergibt sich

$\quad s \cdot (2b + 2c + . . . + 2f) = 2 \cdot r \cdot x$,

was wir oben einsetzen können.

Es folgt $O_R = \pi \cdot 2r \cdot x < \pi \cdot 2r \cdot 2r = 4 \cdot \pi \cdot r^2$, da $x < 2r$. Mit wachsender Eckenzahl strebt x gegen 2r. Gleichzeitig gilt, dass die Oberfläche O_R jedes so einbeschriebenen Rotationskörpers kleiner ist als die Kugeloberfläche O_O. Intuitiv einen Grenzwert bildend, schliessen die Schülerinnen und Schüler, dass damit

$O_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$.

Archimedes folgert weniger voreilig: O_O ist nicht kleiner als $4 \cdot \pi \cdot r^2$, denn jeder kleinere Wert kann durch eine verbesserte Annäherung übertroffen werden. Durch Annäherung der Kugel von aussen folgert er entsprechend: O_O ist nicht grösser als $4 \cdot \pi \cdot r^2$. Erst aus diesen beiden Aussagen folgt für ihn: $O_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$.

Das scheint den Schülern spitzfindig zu sein. Hauptsache, wir haben eine Formel gefunden. Zur Würdigung des Resultats halte ich meine hölzerne Halbkugel hoch, drehe sie einmal so, einmal so und möchte an meine Ausgangsfrage anfangs der Woche erinnern. – Erst das Stichwort „Vollmond“ weckt die Erinnerung. Damals wurde vermutet, die beleuchtete Halbkugelfläche betrage das $\pi/2$ fache der Scheibe. Jetzt wird klar, dass die beleuchtete Mondfläche als halbe Kugeloberfläche mit $2 \cdot \pi \cdot r^2$ gerade das Doppelte der Scheibenfläche $\pi \cdot r^2$ ausmacht. Wie dies ja Wagenschein in „Zweierlei Wissen“ so schön beschrieben, nur nicht hergeleitet hat.

Sogar meine heutige Herausforderung kann ich deponieren: Jedes erhält eine in Goldpapier eingewickelte Schokoladekugel. „Wie viel würde eine derartige Kugel aus Gold kosten? Die experimentell gefundene Volumenformel dürft Ihr ausnahmsweise benutzen.“ – „Aber was ist der Goldpreis?“ – „Was ist die Dichte von Gold?“ Die Zahlen verrate ich nicht, merke aber, dass die Schülerinnen auf der richtigen Spur sind. Christoph verspricht wieder einmal eine Lösung. Wer hat wohl die Schoggikugel gegessen, bevor er deren Durchmesser bestimmt hat? Beim Gedanken, morgen die Kugeln zu Beginn der Stunde wieder einzusammeln, muss ich schmunzeln.

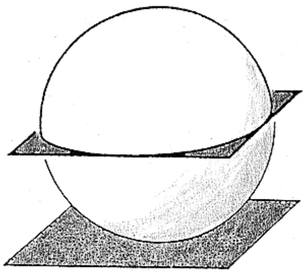
Bereits ist **Freitag**. Ich erkläre, dass ich heute stofflich möglichst abschliessen, d.h. insbesondere das Volumen der Kugel klären, Folgerungen ziehen, und einige Gedanken über Leben und Werk von Archimedes anfügen möchte. So bleibt morgen Zeit für Rückblick und Auswertung. Zum gemütlichen Ausklang wollen wir uns am Abend in der Dorfbeiz treffen.

Erstaunlich, alle Kugeln sind noch vorhanden. Die Schülerinnen und Schüler haben sich bemüht, Dichte wie Preis gefunden und sie haben gerechnet. Ein vernünftiges Resultat liegt allerdings nicht vor. Grund genug, das Problem zu klären. Erstaunt sind alle, dass die Kugel in Gold eine Masse von rund 200 g und einen Preis von ca. CHF 3000.- hat.

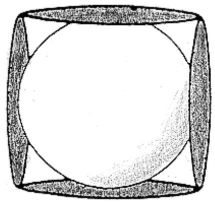
Ich erinnere und notiere die Formel für die Kugeloberfläche: $O_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$.

Archimedes hat das ja nicht als Gleichung geschrieben. Welchen Satz mag er notiert haben? – Anna: „Die Oberfläche der Kugel ist das Vierfache des Kreises“ oder wie es Archimedes (1996, S. 114) ausdrückt: „Die Oberfläche der Kugel ist viermal so gross wie die Fläche eines ihrer grössten Kreise.“ Martin Wagenschein formuliert und veranschaulicht dies im Abschnitt „Kern und Schale runder Dinge“ (1965, S. 70f) folgendermassen:

„π mal würde der Teppich die Fläche der Kugel bedecken.“



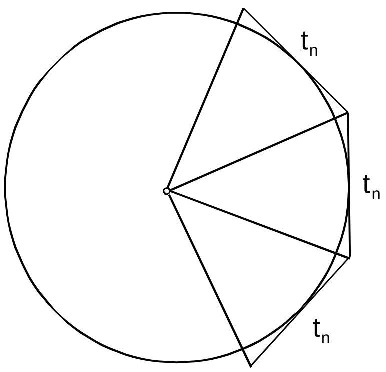
„Die vier Scheiben haben zusammen dieselbe Fläche wie die Kugel.“



$$\pi \cdot (4 \cdot r^2) = O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot (\pi \cdot r^2)$$

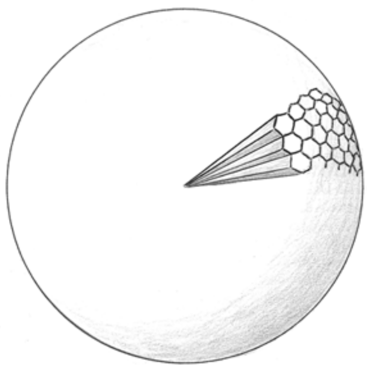
Für das Kugelvolumen V_O wähle ich den Weg mit der Analogie zum Kreis. Dort haben wir bereits die Kreisfläche ausgedrückt durch den Kreisumfang.
Wir wiederholen kurz die Annäherung an den Kreis. Ich wähle das umbeschriebene Vieleck mit dem Vorteil, dass alle Höhen gleich dem Radius sind. Die Grundseiten der Dreiecke ergeben zusammen den Umfang des Vielecks, in der Verfeinerung nähert er sich immer mehr dem Kreisumfang. Muriel zeigt im Heft, wo wir das diskutiert haben. Unterteilen wir die Kugeloberfläche zum Beispiel wie beim kugelförmigen Facettenauge einer Biene und denken wir uns die keilförmigen Einzelteile bis zum Mittelpunkt fortgesetzt, so entstehen näherungsweise Pyramiden und das Kugelvolumen ergibt sich angenähert als Summe all dieser Pyramiden, deren Grundflächen zusammengenommen die Kugeloberfläche bilden.

Die Kreisfläche



$$F \approx n\frac{t_n r}{2} = \frac{U_n r}{2} \approx \frac{Ur}{2}$$

Das Kugelvolumen



$$V_o \approx \frac{G_1 r}{3} + \frac{G_2 r}{3} + \quad + \frac{G_n r}{3}$$
$$= \frac{r}{3}(G_1 + G_2 + \quad + G_n) \approx \frac{O_o r}{3}$$

Schliesslich haben wir diese Zusammenhänge als einfache Formeln an der Tafel. Einen Moment lang würdigen wir die beiden Formeln; einmal im Zweidimensionalen, einmal im Dreidimensionalen, analog zu Dreieck und Pyramide beziehungsweise Sektor und Kegel.

Während Silvan und Christof damit zufrieden sind, setzt Felix sofort die Oberflächenformel ein und findet die Volumenformel.

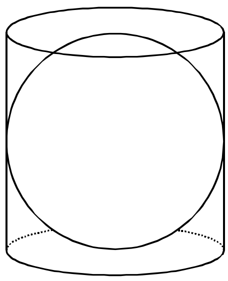
Aus $V_O = (O_O \cdot r) / 3$ und $O_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ folgt $V_O = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Auch wenn dieses Vorgehen kein strenger Beweis ist, so finden wir doch bestätigt, was wir bereits unserem Wägeexperiment entnommen haben. Auch für das Volumen hat Archimedes einen anspruchsvollen, äusserst genialen Beweis geliefert. Wir verzichten darauf an dieser Stelle. (vgl. dazu Archimedes 1996, S. 107ff)

Ich zeichne eine Kugel und den umschliessenden Zylinder. Wie verhält sich der Zylinder zur Kugel? Christof weiss es bereits.

Von Archimedes folgt in Kurzfassung:
„Der Zylinder, der die gleiche Grundfläche besitzt wie einer der grössten Kreise einer Kugel und dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist, ist sowohl seinem Inhalt als auch seiner Oberfläche nach eineinhalb mal so gross wie die Kugel.“

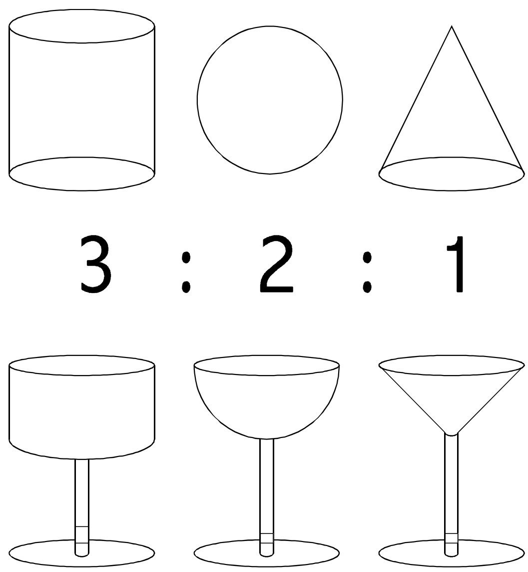
Oder wie es Wagenschein (1965, S. 71) formuliert: *„Zwei Drittel ihres Säulenkäfigs fasst die Kugel, und ebenfalls zwei Drittel seiner Oberfläche ist ihre Fläche.“*



$$V_Z : V_O = 2 \pi r^3 : {}^4/_3 \pi r^3 = 3 : 2$$

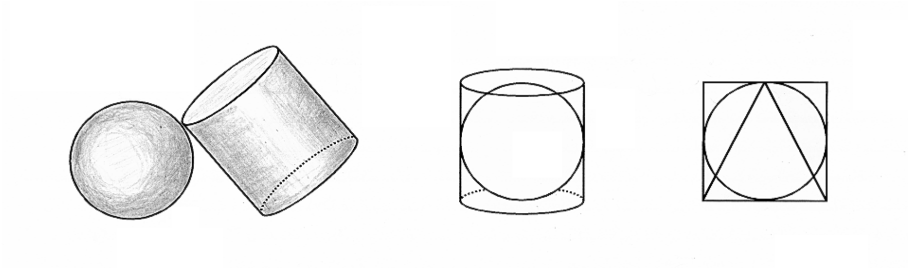
$$O_Z : O_O = 6 \pi r^2 : 4 \pi r^2 = 3 : 2$$

Ich ergänze noch den Kegel mit gleichem Kreis und gleicher Höhe.
Felix sieht sofort, dass sich die Volumina von Kugel zu Kegel wie 2 : 1 verhalten, da sich Zylinder zu Kegel wie 3 : 1 und Zylinder zu Kugel wie 3 : 2 verhalten.
(Inzwischen bin ich stolzer Besitzer von drei entsprechenden Trinkgläsern, mit denen sich dieses Volumenverhältnis sehr schön veranschaulichen lässt.)



Abschluss: Nach- und Schlussbetrachtung

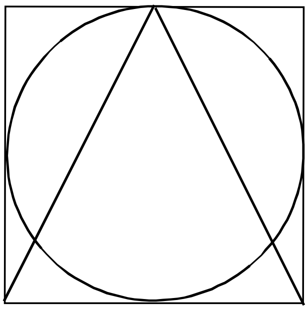
Damit sind wir unmerklich bei den Schlussbetrachtungen angelangt. Für Archimedes war seine Arbeit über diese Körper so wichtig, dass er sich Zylinder und Kugel auf seinem Grabmal verewigt wünschte. Warum nicht auch einen Kegel? Der Zusammenhang zwischen Kegel und Zylinder war bereits Euklid bekannt. Die Leistung von Archimedes waren die Berechnung von Volumen und Oberfläche der Kugel und der Vergleich mit dem Zylinder, der sich genial in dem einen Satz ausdrückt, dass Volumen wie Oberfläche 2/3 der entsprechenden Grössen beim Zylinder, die damals ja bekannt waren, ausmachen. „Wie würdet Ihr das auf dem Grab dargestellt haben?" – „Glaszylinder mit Steinkugel im Innern." – „Das Glas geht aber kaputt." – „Zylinderförmiger Sarg mit Kugel an Stelle des Kopfes." – „Ein Zylinder angelehnt an eine Kugel. Die Kugel kann ja nicht schräg stehen." – Dies finde ich eine gute Lösung. Daneben zeichne ich die zwei Versionen, die ich in Büchern gefunden habe. Jedes der Bücher behauptet, so seien die Körper dargestellt gewesen, na ja!

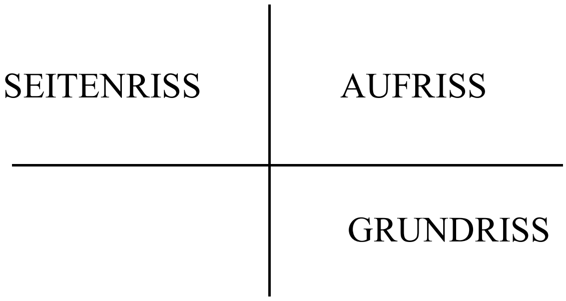


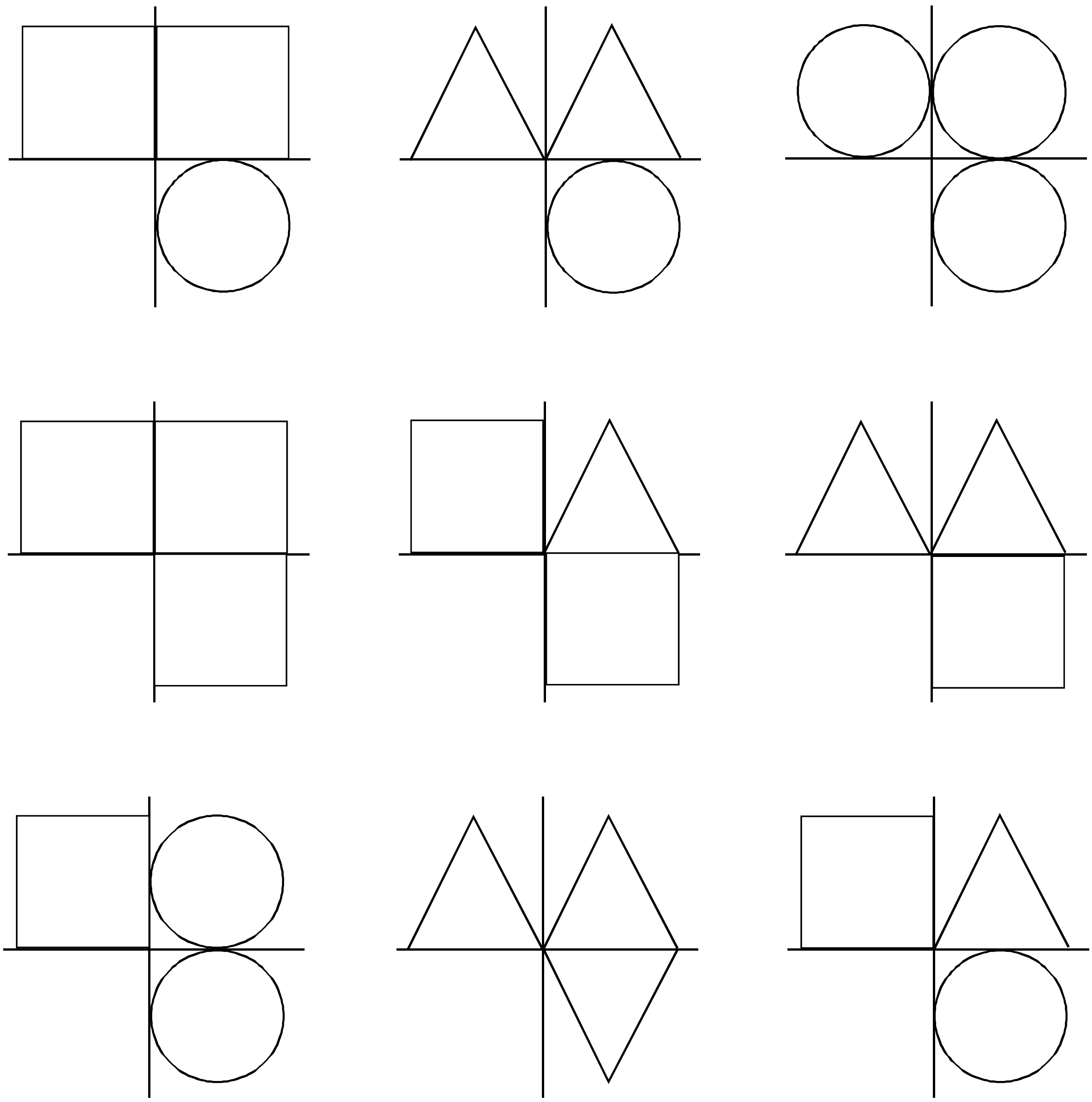
Die letzte Version wird als zu platt empfunden und abgelehnt. Wie Zylinder und Kugel auf dem Grabstein dargestellt wurden, wissen wir bis heute nicht. Christof: „Vielleicht hat's den gar nie gegeben. Vielleicht hat ja Archimedes gar nie gelebt." Ich erzähle von den vielen in Briefen überlieferten Werken, von Cicero, der im 1. Jahrhundert vor Christus das Grab gefunden und beschrieben hat, dass die Grabsäule wieder verschollen ging, von den Überlieferungen Plutarchs in der Marcellus-Biographie und von den vielen Legenden die sich um das Leben von Archimedes gebildet haben. Zum Schluss verteile ich eine kurze Übersicht über Leben und Werk dieses genialen Menschen, der nicht umsonst als grösster Mathematiker und Naturwissenschafter des Altertums bekannt ist. Wer weiss, eines Tages taucht ein Text auf mit der Grabinschrift, die noch Cicero aus der Schule bekannt war, oder der Grabstein wird gefunden.

Didaktische Anmerkungen: *Wie erwähnt, ziehe ich es an dieser Stelle vor, die heuristische Methode des Archimedes vorzulesen, wie sie im neu gefundenen Text beschrieben ist, und anschliessend die entsprechende „mechanische" Herleitung des Kugelvolumens mittels dünner Scheiben, die an einen Waagebalken gehängt werden, zu diskutieren (vgl. dazu z.B. Meschkowski 1984 und Becker 1957). Nehmen wir Quadrat, Kreis und Dreieck der letzten Figur als Risse, so erhalten wir viele der besprochenen Körper und dazu noch ein paar interessante mehr!*

WIE SEHEN KÖRPER MIT UNTENSTEHENDEN RISSEN AUS ?



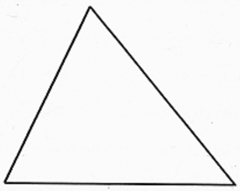




$2 \longrightarrow 3$

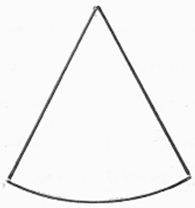
EBENE R^2

DREIECK



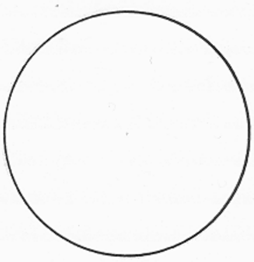
$$F = \frac{gh}{2}$$

SEKTOR



$$F = \frac{br}{2}$$

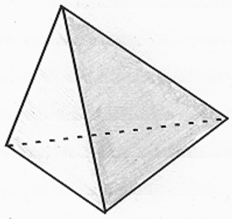
KREIS



$$F = \frac{Ur}{2}$$

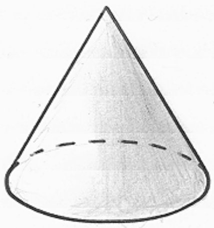
RAUM R^3

PYRAMIDE



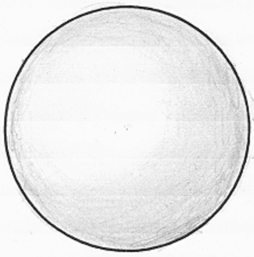
$$V = \frac{Gh}{3}$$

KEGEL



$$V = \frac{Gh}{3}$$

KUGEL

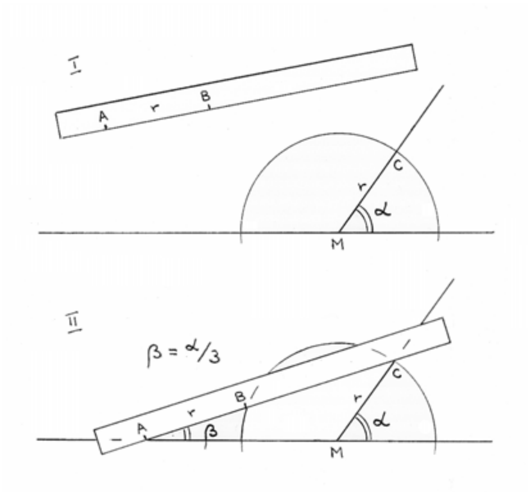


$$V = \frac{Or}{3}$$

$2 \longrightarrow 3$

Am Abend im Dorfrestaurant, es ist nicht die Trattoria Archimede, will Anna doch noch wissen, wie das mit der Dreiteilung des Winkels geht. Ich skizziere ihr die Situation auf einem Bierdeckel, ohne aber den Beweis zu liefern.

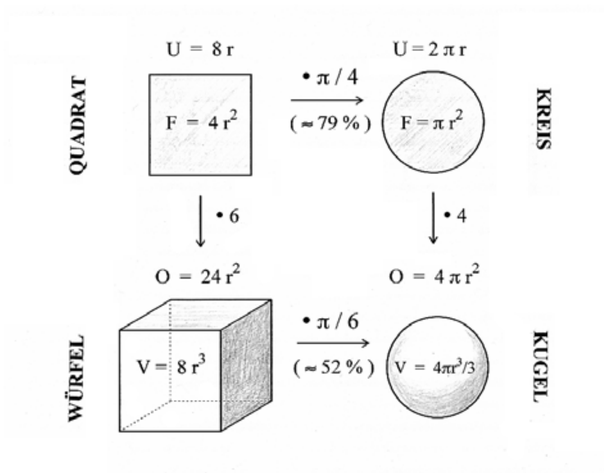
Nach dem Morgensingen bleibt am **Samstag** nur knapp Zeit für den Abschluss. Trotzdem zeige ich allen an der Tafel die „Papierstreifenkonstruktion" von Archimedes für die Dreiteilung des Winkels. Und wie geht es, wenn der zu teilende Winkel grösser als 90° ist? Die Überlegungen und Begründungen überlasse ich den Schülerinnen und Schülern, eingedenk der Worte von Ruth Cohn (Cohn 1981): „Zu wenig geben ist Diebstahl, zu viel geben ist Mord!" Aus Zeitgründen habe ich in den letzten zwei Wochen ohnehin eher zuviel gegeben. Leider reicht es zeitlich nicht für eine Übungsserie, um die verschiedenen Formeln und Zusammenhänge anzuwenden.



Ein schriftliches Feedback und eine mündliche Schlussrunde beenden diese zwei Wochen. Zum Wohlwollen und zur Offenheit des Anfangs hat sich noch ein schönes Mass an Vertrauen gesellt. Die Reaktionen sind vergleichbar mit denjenigen aus meinen anderen Kursen. Der „handliche" Einstieg mit Ton, der sich daraus ergebende logische Ablauf, die vielen Modelle und der Bezug zu Archimedes kommen gut an. Das intensive, vertiefte Arbeiten an einem Thema wird geschätzt, auch wenn die vielen Formeln und Herleitungen, insbesondere die Umformungen und Wurzelrechnungen einzelnen Schülern Mühe bereiten. Dass es schön und sinnvoll sein kann, auf verschiedenen Wegen den gleichen Berg zu erklimmen, können nicht alle Schüler und Schülerinnen verstehen. Die sich ergebenden überraschend einfachen Beziehungen werden aber immer wieder bestaunt. Einige sagen, sie möchten nicht immer so arbeiten, aber ab und zu wieder. Genau das streben wir ja an, einzelne Lerninseln zum vertieften Arbeiten nach Wagenschein.

Rückblick und Ausblick:

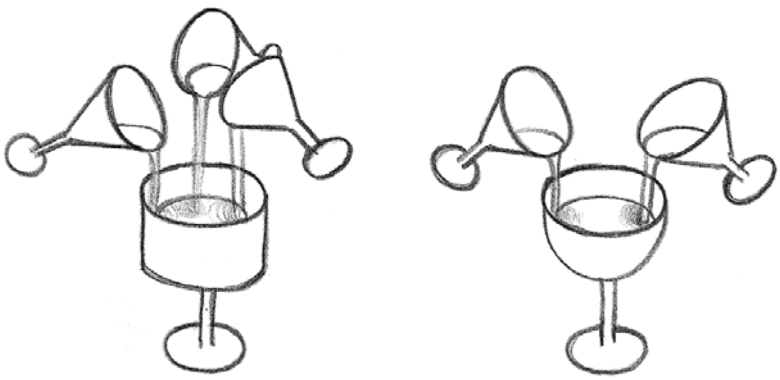
Das Besondere an der Thematik in diesem Lehrstück, ist der Aufstieg aus der klassischen griechischen Mathematik zu einer Sichtweise, die auch Heuristik, Praxis und Annäherung zulässt. Die Anwendung und das praktische Experiment fördern die theoretische Erkenntnis, und diese wiederum erweitert den Bereich der praktischen Anwendungen. Damit verbunden ist das Zulassen von Annäherungen, und erst dies erlaubte es, der Zahl π wesentlich näher zu kommen. Zwar sind in der klassischen konstruktiven Geometrie das Gerade (Lineal) und das Runde (Zirkel) gleichermassen vertreten, aber sobald es um metrische Fragen geht, müssen wir, wenn wir weiterhin die Längeneinheiten auf der Geraden definieren, das Runde durch das Gerade annähern. Und Wagenschein (1965/70 Bd. I, S. 70) schreibt: „Das Gerade und das Krumme sind nun einmal zu einander fremde Welten." Die bequemste Stelle, um vom Geraden zum Krummen zu gelangen ist der Kreis. „π ist also der Umfang, gemessen am Durchmesser; das Krumme, gemessen am Geraden." (ebd. S. 68) Und ist dieser komplizierte Übergang einmal erlebt, so sind die Zusammenhänge wieder einfach: „Bleibt man bei den runden Dingen und setzt diese untereinander in Beziehung, so finden sich die einfachsten Verhältnisse, die es gibt: die der ganzen Zahlen!“ Und je länger man sich mit der Anschauung der Formeln befasst, desto mehr Zusammenhänge offenbaren sich, neue Verbindungen öffnen sich, andere Darstellungen drängen sich auf.



Bezogen auf unsere Ausgangsfiguren lässt sich leicht überprüfen, was Wagenschein (ebd. S. 72) so formuliert: „Bei Kreis und umschriebenem Quadrat verhalten sich die Umfänge ebenso wie die Flächen (nämlich wie π zu 4), und bei Kugel und umschriebenem Würfel verhalten sich ebenfalls die Oberflächen wie die Rauminhalte (nämlich wie π zu 6).“

Mit dem Lehrstück haben wir jetzt das „weite Feld“ beackert, die mathematischen Zusammenhänge ergründet und die Ergebnisse in der Anschauung gewürdigt. Bezüglich der mathematischen Anforderungen haben wir einen Mittelweg gewählt: In einer unteren Stufe würde ich noch mehr mit Experimenten arbeiten (Beispiele sind zu finden in Wagenschein, 1965/70), auf einer höheren Stufe den Grenzprozess präziser fassen und vermehrt ins Zentrum stellen. Im ganzen Verlauf des Stücks hat sich immer wieder gezeigt, wie wichtig das Beherrschen der mathematischen Grundlagen ist: Satz des Pythagoras, Ähnlichkeitslehre, Proportionen, lineare Gleichungen, Umgang mit Wurzeln. In der thematischen Landkarte habe ich deshalb diese Aspekte ebenfalls berücksichtigt. Gleichzeitig ist das Lehrstück ein hervorragendes Übungsfeld für diese Grundlagen. Wer sie nicht einigermassen beherrscht, erlebt sie als Stolpersteine.

Mit dem Lehrstück legen wir einen weiten Weg zurück. Die Formen werden transformiert, das Denken findet Wege, die Zusammenhänge zu formulieren, die in der Kurzschrift der Formeln ihre endgültige mathematische Gestalt annehmen. Mit den Formeln werden die Denkwege fahrbar.



3.4 Weiterentwicklungen des Lehrstücks

Anschliessend an die Publikation meines Lehrstücks im Berner Lehrkunstband befasste sich David Kamber von der Berufsmaturitätsschule Bern (BMS) im Rahmen der III. Berner Lehrkunstwerkstatt mit diesem Thema. Konzept und Durchführung sind nachzulesen in Kamber (2001, S. 41-57). Die einbezogene Klasse besteht aus Informatiklehrlingen. Da für die Mathematik nur eine Doppellektion pro Woche zur Verfügung steht, muss sich Herr Kamber auf 6 Doppellektionen beschränken.

I. Akt: Die Familie von Würfel und Kugel
Bilder von Archimedes werden projiziert, er soll ständiger Begleiter sein. Der Einstieg beginnt mit zwei vorgegebenen Körpern, einer Tomate und einem getrockneten Tonwürfel. Dann werden von den Schülern aus Ton „Verwandte" hergestellt. Um Ordnung zu schaffen hilft Herr Kamber mit einem runden und einem eckigen Papier. Karten mit Namen sind vorbereitet und dienen zur präziseren Beschreibung und Unterscheidung der Körper. Informationen über Archimedes beschliessen die Doppelstunde.

II. Akt: Phänomen Formeln
In diesem zweiten Akt stehen Formeln im Zentrum. Formeln auf Kärtchen sollen in einer Tabelle untergebracht werden. Diese Zuordnung führt zur Reflexion der Formeln, zu Diskussionen und in dieser Inszenierung zu intensiverer Klärung der Mantelfläche. Dann wird vom Lehrer die Grösse π als Hüter zwischen eckig und rund angesprochen. Der Versuch, Formeln zu betrachten, zu vergleichen und den anschaulichen Gehalt erfassen zu lassen, findet bei den Lehrlingen wenig Resonanz.

III. Akt: Das Krumme gemessen am Geraden, π
Die Schüler werden aufgefordert, π in Kürze zu erklären, so dass auch Laien es verstehen können. Dass der Umfang dreimal der Durchmesser und etwas mehr ist, wird anschaulich klar. Aber wie viel mehr? Über den Satz des Archimedes wird jetzt die berühmte Ungleichung aufgestellt, welche erstmals eine klare Eingrenzung für π vorgibt. Mit einem Arbeitsblatt werden die Rekursionsformeln für die innere und äussere Annäherung erarbeitet. Zu Hause zeigt sich deren Nützlichkeit in einem Tabellenkalkulationsprogramm.

IV. Akt: Scheibenkörper, der Aufstieg in die 3. Dimension
Die Formeln werden gut umgesetzt und führen auf ein Gespräch um die Grenzen der Genauigkeit bei Computern. Der Überblick „Die Zahl π im Laufe der Zeit" verweist auf die historische Dimension. Der Einstieg in den Raum erfolgt über das Prinzip von Cavalieri. Damit werden nach und nach einige Formeln verständlicher und der Ton als Medium kommt wieder ins Spiel.

V. Das Kugelvolumen
Mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri und Demonstrationsmodellen aus Plexiglas wird das Volumen der Kugel hergeleitet. Trotz Modellen und Arbeitsblatt folgt die Erkenntnis nur zögernd. Schoggikugel und Kugeloberfläche sind als Hausaufgabe angesagt.

VI. Akt: Rückblick und Abschluss
Vorerst wird die Frage nach der Kugeloberfläche bereinigt. Erstaunen gibt es über die Tatsache, dass der Mantel des Zylinders und die Oberfläche der einbeschriebenen Kugel gleich gross sind. Statt einer Vertiefung mit Archimedes beendet Herr Kamber das Lehrstück mit einer Aufgabe über ineinander geschachtelte Würfel und Kugeln.

Herr Kamber hat es nicht leicht, seine Schüler während zwölf Lektionen für Körper und Formeln zu motivieren. Die Idee gefällt mir, Archimedes von Anfang an bis am Schluss präsent zu halten. Vielleicht könnte dies noch konsequenter und organischer geschehen. Die Zuordnung von Formeln in die Tabelle, auch wenn nicht genetisch, habe ich inzwischen in mein Lehrstück aufgenommen. Tabelle und Körperfamilie dienen als Basislager für den weiteren Verlauf, werden zum Ausgangspunkt von Fragestellungen und Streitgesprächen. Mit dem Kegelmantel steigt die Klasse allerdings in eine der schwierigeren Fragen ein, begegnet bereits dem Übergang von gerade zu rund. Müsste nicht dieser Übergang hier vertieft werden? Und dann könnte der eine oder andere Satz von Archimedes folgen. So kompliziert sind sie nicht. Der zentrale dritte Akt gefällt mir sehr gut. Er führt mit Intervallschachtelung und Rekursion zu relevanten Themen und fordert die Informatiklehrlinge heraus. Das Cavalieri-Prinzip kommt wie von einem anderen Stern. Warum nicht (mit oder ohne Auftritt von Archimedes) erklären, mit welchen Ideen der Meister das Volumen der Kugel bestimmt hat: Zylinder, Halbkugel und Kegel mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe schneiden und an einer Balkenwaage aufgehängt denken. Zwar ist es nicht so von Archimedes überliefert, aber alle Ideen sind von ihm und heute würde er die Herleitung des Kugelvolumens den Schülern sicher so erklären und bemerken, dass Herr Cavalieri dieses Grundgesetz später verallgemeinert hat. Und dann, mit diesem Verfahren von Archimedes und Cavalieri lassen sich die Volumina von Pyramide, Kegel und schiefen Körpern erarbeiten. Die Quintessenz im Verhältnis zwischen Zylinder und einbeschriebener Kugel, formuliert als Satz von Archimedes, dürfte dann aber nicht fehlen. Die Schlussaufgabe, auch wenn etwas anspruchsvoll, vereint das Urpaar des Lehrstücks vortrefflich: Vom Würfel zur Kugel zum Würfel zur Kugel . . .

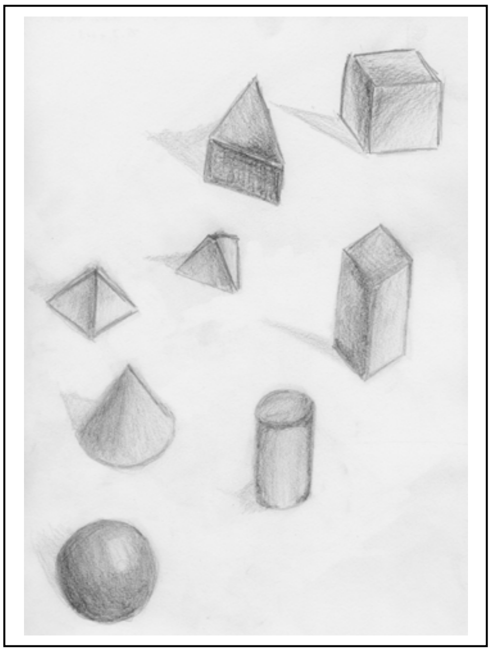
Ich habe von dieser Lehrstückinszenierung viel gelernt. Es ist eine kompakte Form, die sich noch optimieren lässt und ich wünsche Herrn Kamber für nächste Inszenierungen offenere Schüler.

Seit meiner Inszenierung in Goldern habe ich das Lehrstück achtmal am Wirtschaftsgymnasium in Bern durchgeführt. Insbesondere durch die Arbeit von David Kamber hat sich bei mir einiges geändert. Um zu zeigen, wie sich dieses Lehrstück im Laufe der Jahre verändert und angereichert hat, möchte ich jetzt von meiner letzten Durchführung mit der Quarta 4A im Mai bis Juli 2003 berichten.

Nach kurzem **Auftakt** mit dem „Sandrechner“ steigen wir direkt ein in den

I. Akt: Exposition des Lehrstücks: Würfel, Kugel und Verwandte

Da ein Kollege in der Chemie gerade mit Halbklassen ins Kerzenlehrstück einsteigt, kann ich in Doppellektionen den Einstieg in mein Lehrstück durchführen, was doch viel angenehmer ist, zumal diese Klasse 22 Schüler und Schülerinnen umfasst. Die erste Lektion gestalte ich wie üblich: Körper werden gebildet aus Ton, wir suchen ihre Verwandtschaften und besprechen ihre Namen und Eigenschaften. Dazu betrachten wir einige Körper aus der Natur und aus unserem Umfeld. Zu Beginn der zweiten Lektion lege ich die Platte mit den Körpern auf den Boden, verteile Zeichnungsblätter und lasse die Schüler die ganze Körper-



gruppe abzeichnen, jedes aus seiner Perspektive. Dadurch entsteht eine zusätzliche Bekanntheit und Vertrautheit mit diesen Körpern. Einige Schülerinnen notieren sich sogar dabei noch die Namen der entsprechenden Körper. Im Anschluss an dieses Zeichnen, das sehr unterschiedlich lange dauert, befinden sich auf den umliegenden Tischgruppen unausgefüllte Formeltabellen und dabei ein Blatt mit sehr vielen Formeln. Die richtigen Formeln sollen ausgesucht und in die Tabelle eingefüllt werden. So entstehen bereits erste Gespräche über Körper und Formeln. Bis zum Ende der zweiten Lektion sind die Tabellen soweit möglich ausgefüllt. Ich kündige an, dass wir in den nächsten Lektionen genauer um die Zusammenhänge zwischen den Körpern und zwischen den Formeln kümmern werden mit der generellen Richtung: „Vom Würfel zur Kugel".

FORMEL TABELLE	UMFANG	(OBER)-FLÄCHE	VOLUMEN
QUADRAT			—
KREIS			—
WÜRFEL	—		
QUADER	—		
PYRAMIDE	—		
DREHZYLINDER	—		
DREHKEGEL	—		
KUGEL	—		

$\pi r^2 \quad \pi r^2 h \quad \pi r^3 \quad 2\pi r^3 \quad 3\pi r^3$

$2\pi r^2+2\pi rh \quad \pi r^2+\pi rs \quad abc$

$4a \quad 6a^2 \quad a^2 \quad a^3 \quad G\cdot h$

$2\pi rh \quad \pi rs \quad 2\pi r(r+s)$

$2(r+s) \quad 2\pi r(r+h) \quad 2(2r+h)$

$\pi r^2h/2 \quad 2(ab + ac + bc)$

$\pi r^2h/3 \quad 4\pi r^3/3 \quad 4\pi r^3/5$

$2\pi \quad 2\pi r \quad 2\pi r^2 \quad 4\pi r^2 \quad G + M$

II. Akt: Im Eckenland: Vom Würfel zu Quader, Prisma und Pyramide

Der Verlauf ist derselbe geblieben, nur führe ich die Verallgemeinerung der Pyramidenformel mit der Ähnlichkeit nicht durch. Wenn nötig, kann später mit dem Prinzip von Cavalieri die Ergänzung folgen. Sehr wichtig sind mir immer die Übungen mit den regelmässigen Körpern im Würfel. Anschauung, Wurzelgesetze und Satz des Pythagoras lassen sich üben und es zeigen sich schöne Körper und einfache Formeln, die auf innere Zusammenhänge zwischen diesen Körpern hinweisen.

III. Akt: Der Kreis in der Ebene als Steg über die Kluft

Auch hier gibt es einen ähnlichen Verlauf wie in Goldern. Das Zeichnen im Sand spare ich auf später. Etwas mehr Gewicht lege ich heute auf das Verstehen der drei Sätze von Archimedes aus der „Kreismessung" (nach Archimedes 1798, S. 101ff):

Satz 1: Jeder Kreis ist gleich einem rechtwinkligen Dreieck, in welchem die eine Seite beim rechten Winkel gleich dem Radius und die andere gleich dem Umfang des Kreises ist.

Satz 2: Der Kreis verhält sich zum Quadrat seines Durchmessers sehr nahe wie 11 zu 14.

Satz 3: Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so gross wie der Durchmesser und noch etwas grösser, nämlich um weniger als 1/7 des Durchmessers, aber um mehr als 10/71.

Das Bestimmen der Rekursionsformel bedarf auch in Bern gewisser Hilfe. Dafür geniessen wir umso mehr die eindrücklichen Wurzelausdrücke. Ich erlebe immer wieder einzelne Schüler, die die Annäherungstabelle für π mit einem Tabellenkalkulationsprogramm bewältigen. Natürlich stossen wir dann wie die Klasse von Herrn Kamber an die Grenzen des Computers.

$$\pi \approx 1024 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}}}$$

IV. Akt: Im Rundland: Über Zylinder und Kegel zur Kugel
Beim geraden Zylinder ist wieder die Einschachtelung im Zentrum. Beim Kegel erwähne ich sie nur kurz und gehe zügig zur Trichteraufgabe über:

Stelle einen kegelförmigen Trichter her
mit möglichst genau 250 cm^3 Inhalt!

Zur Verfügung stehen Papier, Schere, Leimstift und Klebstreifen. Es ist eine halboffene Fragestellung, die verschiedene Lösungswege und Resultate zulässt. Der Zusammenhang zwischen dem Kegel und der Abwicklung seines Mantels muss dabei erst entdeckt und analysiert werden. Zur individuellen Kontrolle hänge ich zwei Tabellen an die Tafel. In idealer Verbindung können da Kopf und Hand tätig werden. Die Resultate tragen wir zusammen, vergleichen sie und fragen nach den gefundenen inneren Zusammenhängen, die sich in Formeln ausdrücken lassen.

h[cm]	r [cm]	s[cm]	Zentriwinkel
1	15.451	15.483	359.25°
2	10.925	11.107	354.12°
3	8.921	9.412	341.22°
4	7.725	8.700	319.69°
5	6.910	8.529	291.65°
6	6.308	8.706	260.84°
7	5.840	9.116	230.62°
8	5.463	9.687	203.01°
9	5.150	10.369	178.81°
10	4.886	11.130	158.04°
11	4.659	11.946	140.39°
12	4.460	12.802	125.43°
13	4.285	13.688	112.71°
14	4.129	14.596	101.85°
15	3.989	15.521	92.53°

r[cm]	h[cm]	s[cm]	Zentriwinkel
1	238.732	238.735	1.51°
2	59.683	59.717	12.06°
3	26.526	26.695	40.46°
4	14.921	15.448	93.22°
5	9.549	10.779	166.99°
6	6.631	8.943	241.53°
7	4.872	8.529	295.48°
8	3.730	8.827	326.27°
9	2.947	9.470	342.12°
10	2.387	10.281	350.16°
11	1.973	11.176	354.35°
12	1.658	12.114	356.61°
13	1.413	13.077	357.89°
14	1.218	14.053	358.65°
15	1.061	15.037	359.10°

Aus $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ folgt durch Auflösen: Radius $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi \cdot h}}$ Höhe $h = \frac{3V}{\pi \cdot r^2}$

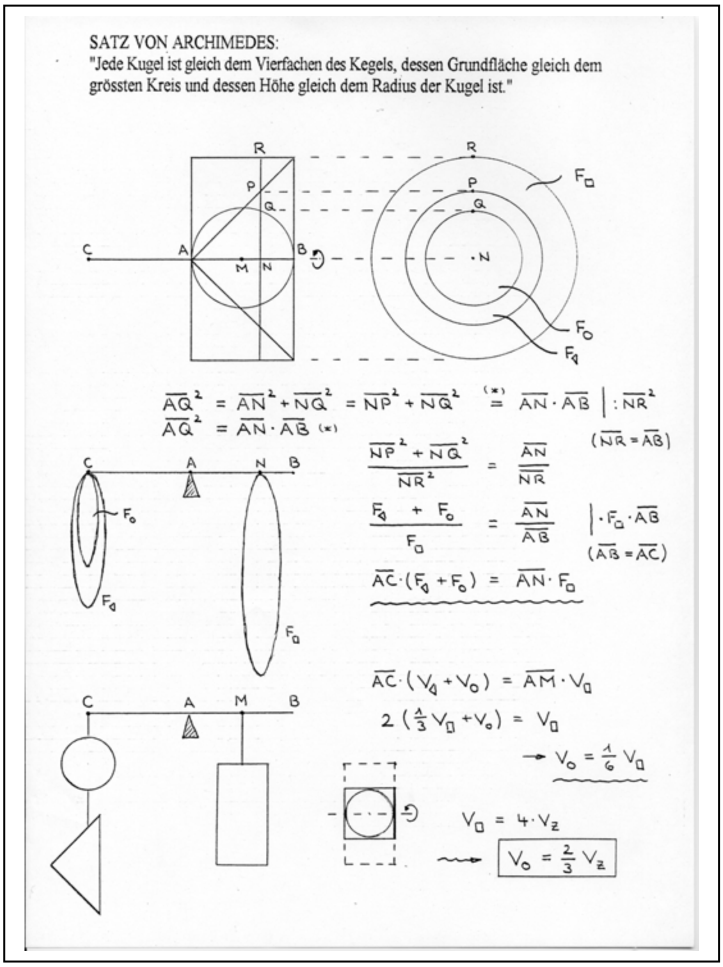
Mantellinie $s = \sqrt{r^2 + h^2}$

Aus $\alpha : 360° = 2\pi r : 2\pi s = r : s$ folgt Zentriwinkel $\alpha = \frac{r}{s} \cdot 360°$

In einer Zusatzaufgabe geht es um den Trichter, bei dem Radius und Höhe gleich gross sind, also $r = h$. Es ergibt sich $r = h = \sqrt[3]{3V/\pi} = 6.2035$ cm, $s = 8.773$ cm, und $\alpha = 254.6°$

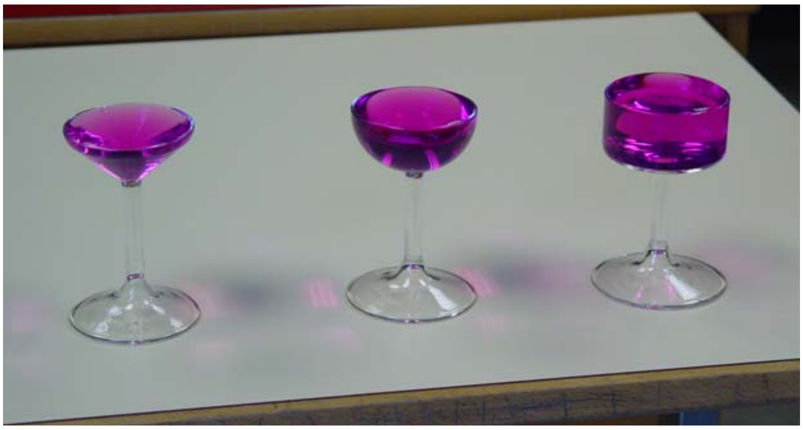
Nachdem die Behandlung von Zylinder und Kegel abgeschlossen sind, trete ich unerwartet als Archimedes im Bademantel auf. Vor ihm am Boden liegt ein flaches Becken mit Sand von Syrakus. „Sehr verehrte Schülerinnen und Schüler. Ich habe gehört, dass Sie sich seit einiger Zeit mit den Eigenschaften von Körpern befassen. Da ich mich selbst vor über 2200 Jahren damit auseinandergesetzt habe und sehr stolz bin auf meine damaligen Entdeckungen und Herleitungen, von denen ja heute noch gesprochen wird, möchte ich Ihnen heute gerne von mir und meinen Arbeiten erzählen. Fast mein ganzes Leben habe ich in Syrakus auf Sizilien verbracht. Zu Studienzwecken reiste ich, wie damals die meisten der gebildeten Leute, für einige Jahre ins grosse Wissenszentrum Alexandria. Ich war gut befreundet mit dem König Hieron und habe öfters von ihm Aufträge erhalten. Einmal habe ich, um die Zahl der Sandkörner zu bestimmen, Zahlen bis fast ins Unendliche erfunden, ein andermal musste ich herausfinden, ob eine Krone aus purem Gold bestehe. In der Badewanne entwickelte ich beim darüber Nachdenken das Auftriebsprinzip und soll anschliessend splitternackt und „Heureka“ (Ich hab's gefunden) rufend durch Syrakus zum König geeilt sein. Weiter erfand ich eine Schraube, um Flüssigkeit auf ein höheres Niveau zu heben, formulierte das Hebelgesetz genau und entwickelte für den König die verschiedensten Kriegsgeräte wie z.B. Wurfmaschinen, damit wir uns gegen die Römer wehren konnten. Ich hielt mich tagelang am Strand auf, dachte nach und malte und geometrische Figuren in den Sand. Über Experimente und durch intensives Nachdenken gelangte ich schliesslich zur Bestimmung von Volumen und Oberfläche der Kugel. Übrigens sind die meisten meiner Schriften heute noch zu lesen.“ Archimedes hält das Buch mit den „Abhandlungen“ in die Höhe. An der Waage entdecken wir gemeinsam experimentell das Volumenverhältnis 3 : 2 : 1 zwischen Zylinder, Halbkugel und Kegel mit gleichem Grundkreis und gleicher Höhe. „Und jetzt will ich Ihnen erläutern, wie ich das Volumen der Kugel begründet habe. Ich lieferte die Begründung auf verschiedene Arten. Meine abstrakteste überlassen wir den reinen Mathematikern.“ Unter Einbezug seines Hebelgesetzes erläutert jetzt Archimedes ausführlich an der Tafel, Schritt für Schritt. Die Anwesenden bittet er, gut zuzuhören, mitzudenken und nachzuvollziehen. Er wählt dabei eine Darstellung, wie wir sie etwa bei van der Waerden (1966, S. 356ff) finden. „Auf diese meine Entdeckungen und Darstellungen über Kugel und Zylinder bin ich am meisten Stolz. Zudem freue ich mich, dass man nach über 2200 Jahren immer noch von mir spricht als bedeutendem Mathematiker und grösstem Naturwissenschaftler des Altertums. Ich bedanke mich für die Aufmerksamkeit und wünsche Ihnen noch viele wundervolle Erkenntnisse im Reiche der runden Körper.“ Archimedes zieht sich zurück. Es folgt eine Pause.

In der zweiten Lektion bleibt viel Zeit, um den Gedankengängen des Meisters nochmals nachzugehen und sich die Herleitung des Kugelvolumens Schritt für Schritt anzueignen.



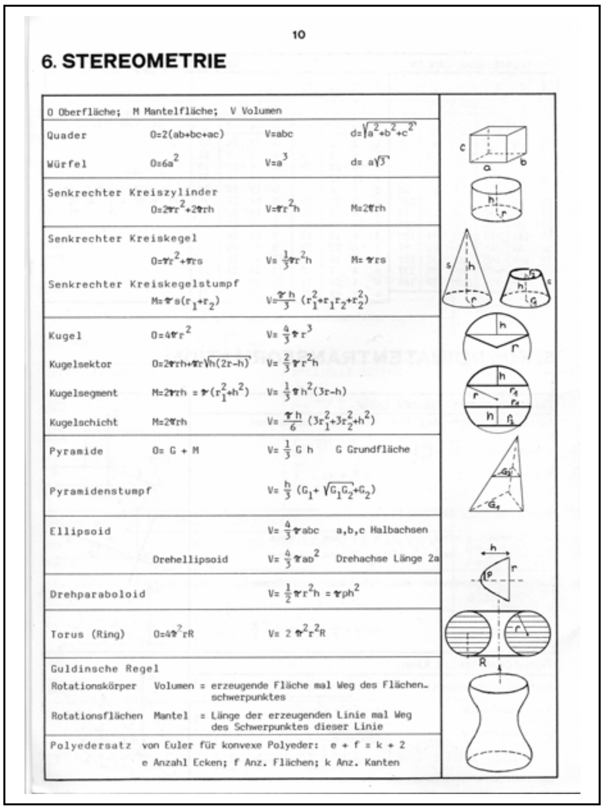
Es zeigt sich allerdings, dass mehrere Schüler diese Tour nicht eigenständig nochmals klettern wollen, wohl auch den Erläuterungen von Archimedes zu wenig konzentriert gefolgt sind. Lieber befassen sie sich bereits mit den Aufgaben einer ausgedehnten Übungsserie. Später folgen die Kugeloberfläche (mit der in der Goldernfassung beschriebenen Methode, aber in umgekehrter Richtung) und die schönen Beziehungen zwischen den Körpern samt dem Umschütten von Wasser mit den drei Gläsern.

Anmerkung: *Auf Grund der Erfahrungen und Einwände, ja Vorwürfe in den Feedbacks, muss ich mir überlegen, ob ich das nächste Mal als Archimedes eine noch einfachere Herleitung des Kugelvolumens präsentieren soll. Zylinder, Halbkugel und Kegel, alle mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, können horizontal geschnitten und in die Schalen einer Waage gelegt werden. Zwar hat es Archimedes nicht so gemacht, aber die Präsentation wäre insofern genetisch echt, als alle wesentlichen Ideen von ihm stammen und ich bin sicher, er würde seine Herleitung in einfachster Variante heute so darstellen. Archimedes würde dann genau das zeigen, was wir experimentell an der Waage bereits gefunden haben, nämlich dass Halbkugel und Kegel den Zylinder aufwiegen. Verallgemeinerung würde uns fast automatisch zum Prinzip von Cavalieri führen.*



Abschluss: Nach- und Schlussbetrachtung
Zum Abschluss verteile ich nochmals eine leere Formeltabelle. Anhand der Heftunterlagen kann sie leicht korrekt ausgefüllt werden. Anschliessend verteile ich eine kleine Formelsammlung (Formelsammlung Mathematik, Neue Kantonsschule, 5000 Aarau), die ab sofort jederzeit konsultiert werden darf, auch in den Proben. Wir betrachten die entsprechende Seite mit vielen der vertrauten Formeln. Die Schüler sind begeistert! Damit schliesst sich der Bogen zur Entstehung der Körper und zur Formelsammlung in der ersten Doppelstunde. Die Körper der ersten Lektion waren übrigens in jeder Lektion anwesend und sie liegen auch jetzt vor uns.

Das Formelchaos ist zu einer erarbeiteten und (mehr oder weniger vertrauten) Formelordnung geworden. Wir denken an Wagenscheins Formelsammlung (1965, S. 67) und hoffen, dass die selbst erstellte sowie die ausgeteilte Tabelle mit den Formeln als „Kurzschrift für höchst anschauliche und merkwürdige Zusammenhänge“ für die Schülerinnen und Schüler nichts „Trockenes und Abschreckendes“ mehr beinhalten.

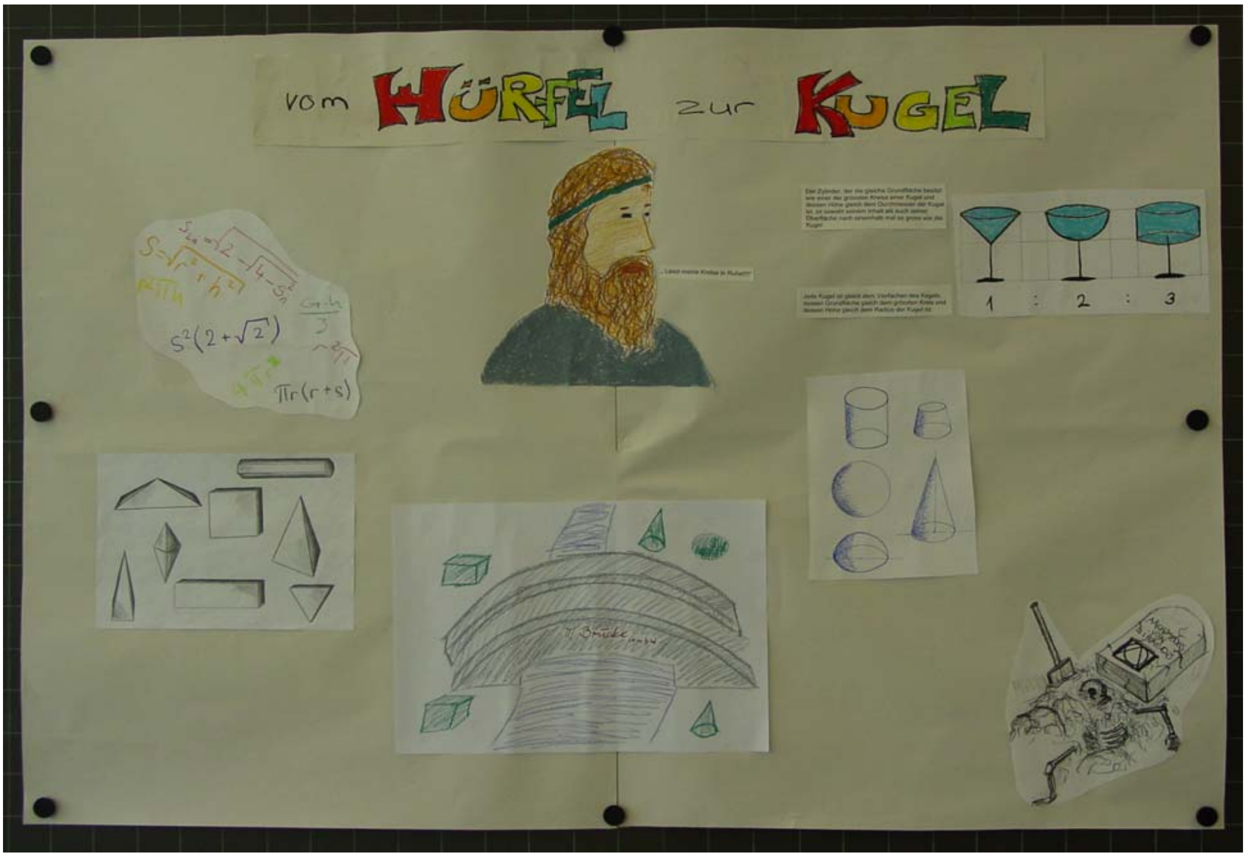


10

6. STEREOMETRIE

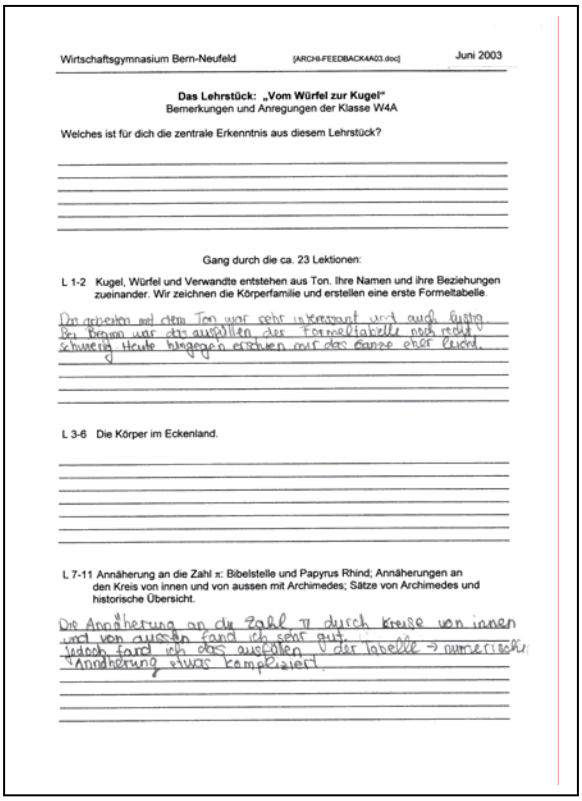
O Oberfläche; M Mantelfläche; V Volumen			
Quader	$O=2(ab+bc+ac)$	$V=abc$	$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
Würfel	$O=6a^2$	$V=a^3$	$d=a\sqrt{3}$
Senkrechter Kreiszylinder	$O=2\pi r^2+2\pi rh$	$V=\pi r^2h$	$M=2\pi rh$
Senkrechter Kreiskegel	$O=\pi r^2+\pi rs$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$	$M=\pi rs$
Senkrechter Kreiskegelstumpf	$M=\pi s(r_1+r_2)$	$V=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$	
Kugel	$O=4\pi r^2$	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$	
Kugelsektor	$O=2\pi rh+\pi r\sqrt{h(2r-h)}$	$V=\frac{2}{3}\pi r^2h$	
Kugelsegment	$M=2\pi rh=\pi(r_1^2+h^2)$	$V=\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$	
Kugelschicht	$M=2\pi rh$	$V=\frac{\pi h}{6}(3r_1^2+3r_2^2+h^2)$	
Pyramide	$O=G+M$	$V=\frac{1}{3}Gh$	G Grundfläche
Pyramidenstumpf		$V=\frac{h}{3}(G_1+\sqrt{G_1G_2}+G_2)$	
Ellipsoid		$V=\frac{4}{3}\pi abc$	a,b,c Halbachsen
	Drehellipsoid	$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$	Drehachse Länge 2a
Drehparaboloid		$V=\frac{1}{2}\pi r^2h=\pi ph^2$	
Torus (Ring)	$O=4\pi^2rR$	$V=2\pi^2r^2R$	
Guldinsche Regel			
Rotationskörper	Volumen = erzeugende Fläche mal Weg des Flächenschwerpunktes		
Rotationsflächen	Mantel = Länge der erzeugenden Linie mal Weg des Schwerpunktes dieser Linie		
Polyedersatz	von Euler für konvexe Polyeder: $e+f=k+2$		
	e Anzahl Ecken; f Anz. Flächen; k Anz. Kanten		

Zum Abschluss gehört noch ein gemeinsamer Rückblick. Dieser hilft beim Ausfüllen des Feedback-Fragebogens und soll in ein Poster münden, das den Gang durch das Lehrstück festhält. Nach dem gemeinsamen Rückblick und dem Ausfüllen des Fragebogens bitte ich die Schülerinnen und Schüler, einzeln auf einem Blatt A4 quer den Verlauf des Lehrstücks mit seinen wichtigsten Stationen zu zeichnen. In der folgenden Lektion werden die einzelnen Darstellungen präsentiert und in der Diskussion entwerfen wir gemeinsam ein grosses Posterbild. Aufträge werden verteilt und schliesslich, trotz Motivationsrückgang und einer Konzertaufführung, welche die nötigen Lektionen beansprucht, kommt das Werk nach den Sommerferien doch noch zur Vollendung.



3.5 Feedback der Schüler zum Lehrstück

Der ausgeteilte Fragebogen weist eine starke Gliederung nach Akten auf, denn in diesem Lehrstück lassen sich die verschiedenen Akte in der Wahrnehmung und in der Erinnerung recht deutlich unterscheiden. Allerdings ging ich mit meiner ersten Frage zunächst aufs Ganze: Gibt es eine zentrale Erkenntnis, quasi eine Quintessenz aus diesem Lehrstück? Dann folge ich den Akten und schliesslich gibt es wieder eine offene Frage, die das ganze Lehrstück betrifft. Da der Fragebogen überwiegend anonym abgegeben wurde, habe ich die Namen generell weggelassen.



Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [ARCHI-FEEDBACK4A03.doc] Juni 2003

Das Lehrstück: „Vom Würfel zur Kugel"
Bemerkungen und Anregungen der Klasse W4A

Welches ist für dich die zentrale Erkenntnis aus diesem Lehrstück?

Gang durch die ca. 23 Lektionen:

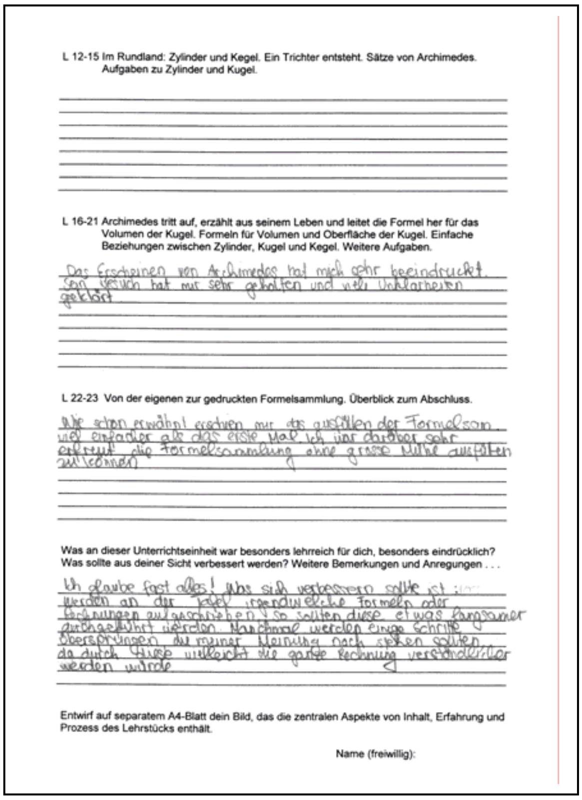
L 1-2 Kugel, Würfel und Verwandte entstehen aus Ton. Ihre Namen und ihre Beziehungen zueinander. Wir zeichnen die Körperfamilie und erstellen eine erste Formeltabelle.

Das arbeiten mit dem Ton war sehr interessant und auch lustig. Bei Beginn war das ausfüllen der Formeltabelle noch recht schwierig. Heute hingegen erschien mir das Ganze eher leicht.

L 3-6 Die Körper im Eckenland.

L 7-11 Annäherung an die Zahl π: Bibelstelle und Papyrus Rhind; Annäherungen an den Kreis von innen und von aussen mit Archimedes; Sätze von Archimedes und historische Übersicht.

Die Annäherung an die Zahl π durch Kreise von innen und von aussen fand ich sehr gut. Jedoch fand ich das ausfüllen der Tabelle → numerische Annäherung etwas kompliziert.



L 12-15 Im Rundland: Zylinder und Kegel. Ein Trichter entsteht. Sätze von Archimedes. Aufgaben zu Zylinder und Kugel.

L 16-21 Archimedes tritt auf, erzählt aus seinem Leben und leitet die Formel her für das Volumen der Kugel. Formeln für Volumen und Oberfläche der Kugel. Einfache Beziehungen zwischen Zylinder, Kugel und Kegel. Weitere Aufgaben.

Das Erscheinen von Archimedes hat mich sehr beeindruckt. Sein Besuch hat mir sehr gefallen und viele Unklarheiten geklärt

L 22-23 Von der eigenen zur gedruckten Formelsammlung. Überblick zum Abschluss.

Wie schon erwähnt erschien mir das ausfüllen der Formelsam. viel einfacher als das erste Mal. Ich war darüber sehr erfreut die Formelsammlung ohne grosse Mühe ausfüllen zu können

Was an dieser Unterrichtseinheit war besonders lehrreich für dich, besonders eindrücklich? Was sollte aus deiner Sicht verbessert werden? Weitere Bemerkungen und Anregungen . . .

Ich glaube fast alles! Was sich verbessern sollte ist: werden an der Tafel irgendwelche Formeln oder Rechnungen aufgeschrieben, so sollten diese etwas langsamer durchgeführt werden. Manchmal werden einige Schritte übersprungen die meiner Meinung nach stehen sollten, da durch diese vielleicht die ganze Rechnung verständlicher werden würde

Entwirf auf separatem A4-Blatt dein Bild, das die zentralen Aspekte von Inhalt, Erfahrung und Prozess des Lehrstücks enthält.

Name (freiwillig):

Welches ist für dich die zentrale Erkenntnis aus diesem Lehrstück?
Zuerst frage ich nach der zentralen Erkenntnis, wünsche den Blick auf das Wesentliche. Es wird bereits hier selbstverständlich vom Eckenland und vom Rundland gesprochen. Diese Strukturierung scheint evident. DD schreibt: „Die Stereometrie war für mich früher etwas, das ich mir sehr kompliziert vorgestellt habe. Doch jetzt, da ich mitten im Thema war, hat mich fasziniert, wie simpel z. T. die Zusammenhänge zwischen Flächen und Körpern darzustellen sind." Diese vielfältigen Zusammenhänge werden oft erwähnt. Kurz und bündig von UU: „Alles hängt mit allem ZUSAMMEN!" Für viele steht die Annäherung an die Zahl π im Blickpunkt. CC: „Ich verstehe nun π, den Zusammenhang zwischen Ecken- und Rundland." Für II ist besonders wichtig: "Dass ich die Formeln nachvollziehen kann. (Formeln der Stereometrie)" Damit sind im Bereich der zentralen Erkenntnis mindestens vier der Grundideen der Mathematik, nämlich die inneren Zusammenhänge [1], das räumliche Strukturieren [6], die Bedeutung der Formeln [7] und der Grenzprozess [9] angesprochen.

Das Lehrstück: „Vom Würfel zur Kugel“

Bemerkungen und Anregungen der Klasse W4A vom 2. Juni 2003

	Welches ist für dich die zentrale Erkenntnis aus diesem Lehrstück?	Kugel, Würfel und Verwandte entstehen aus Ton. Ihre Namen und ihre Beziehungen zueinander. Wir zeichnen die Körperfamilie und erstellen eine erste Formeltabelle.	Die Körper im Eckenland.	Annäherung an die Zahl π: Bibelstelle und Papyrus Rhind; Annäherungen an den Kreis von innen und aussen mit Archimedes; Sätze von Archimedes und historische Übersicht.	Im Rundland: Zylinder und Kegel. Ein Trichter entsteht. Sätze von Archimedes. Aufgaben zu Zylinder und Kegel.	Archimedes tritt auf, erzählt aus seinem Leben, leitet die Formel her für das Volumen der Kugel. Formeln für Volumen und Oberfläche der Kugel. Einfache Beziehungen zwischen Zylinder, Kugel und Kegel. Weitere Aufgaben.	Von der eigenen zur gedruckten Formelsammlung. Überblick zum Abschluss.	Was an dieser Unterrichtseinheit war besonders lehrreich für dich, besonders eindrücklich? Was sollte aus deiner Sicht verbessert werden? Weitere Bemerkungen und Anregungen ...
AA	Dass man durch Einschachtelung der Kugel zu verschiedenen Erkenntnissen kommt.	Das war gut. Hat mir gefallen. Die Tabelle war vielleicht ein bisschen früh.	Bei mir war es so, dass längere Erklärungen mir besser geholfen hätten.	Es war interessant, mal eine historische Übersicht zu bekommen. Diese Annäherung war auch gut. So konnte man das Ganze besser verstehen.	Basteln war eine willkommene Abwechslung. Gut!	Das ging zu schnell mit Archimedes. Das mit dem Verhältnis 3:2:1 war recht eindrücklich.	Freude über die erste Formelsammlung! Guter Abschluss.	Das mit den Gläsern (Zylinder, Kugel, Kegel) war wirklich cool. Als Archimedes da war, fand ich, dass er einfach den Stoff „durchzwängen“ wollte. Dann in der 2. Lektion wurden seine Gedankengänge zum Glück noch erklärt! Weiter so! Bitte ein bisschen länger, eingehender, einfacher erklären.
BB	Vor diesem Lehrstück hätte ich nicht gedacht, dass das Eckenland in so enger Verbindung zum Rundland steht, wie man es zum Beispiel an π sieht, welches man schon früher mit einbeschriebenen und umschriebenen Vielecken ausrechnete …	Ich fand diesen Einstieg gut, denn er gab mir einen groben Überblick und zeigte mir die Unterschiede zwischen dem Ecken- und dem Rundland.	Als wir zum ersten Mal etwas von den Tetraedern, Oktaedern und Kuboktaedern hörten, war ich ziemlich überfordert. Ich musste auch nebst den weiteren Erklärungen mich noch einige Male damit befassen, bis ich es wirklich begriffen hatte.	Siehe erste Antwort. Ich fand gut, dass wir uns damit einige zeitlang befasst hatten und daran arbeiten konnten.	Ich hatte mich dank dem Eckenland schon etwas mit ähnlichen Körpern und Formen befasst, was mir <u>etwas</u> weitergeholfen hat.	Schaffte mir auch wieder einen guten Überblick.	In der eigenen Formelsammlung war eigentlich schon alles vorhanden, was ich wissen musste. Doch mit der gedruckten bekam ich das Ganze geordnet und zusammen, was einem dann auch beim Lernen helfen wird …	Ich fand die Einstiege sehr gut und hilfreich. Man konnte alles gut überblicken, was für mich bei den Aufgabenblättern schwieriger wurde.
CC	Ich verstehe nun π, den Zusammenhang zwischen Ecken- und Rundland.	Die Formeltabelle war sehr geraten, weil wir nichts wussten. Gute Idee mit Ton, Figuren Herstellen und dann Beziehungen Suchen.	Am Anfang etwas unklar, aber dann wurde alles klar.	Es war ziemlich komplex. War ein guter Übergang zu den runden Körpern zu wechseln.	Mantellinie war am Anfang unklar.	War angenehm zum Lernen, leicht verstanden.	Nicht mehr Formeln auswendig lernen. Eigene Formel stimmt mit der gedruckten überein.	Es war ziemlich lehrreich. Streckungsbeispiele hätte man weglassen können.
DD	Die Stereometrie war für mich früher etwas, das ich mir sehr kompliziert vorgestellt habe. Doch jetzt, da ich mitten im Thema war, hat mich fasziniert, wie simpel z. T. die Zusammenhänge zwischen Flächen und Körpern darzustellen sind.	Diese Art von Einführung in ein so komplexes und langes Thema hat mir persönlich gut gefallen und das fand ich sehr originell. Dazu war es nicht das erste Mal, dass wir dementsprechend in ein Lehrstück eingestiegen sind.	Hier haben mir die diversen Zerlegungen der Pyramiden gefallen, die aus einem Würfel hervorgingen. Ich fand gut, dass uns diverse Methoden nahe gebracht wurden.	Meiner Meinung nach war dies der schwierigste Teil, da man sehr viel selbst interpretieren musste. Auch war dies das einzige Stück, das wir nicht konkret genug angeschaut haben.	Ging ein wenig zu schnell. Einziger negativer Punkt.	Wie immer war dieser Auftritt sehr gelungen und hatte viel zu bieten. Dass auch Hintergründe und durchaus Wissenswertes erzählt wurde, war gut.	Schöner Rückblick auf 1. Lektion und runder Schluss zum Rundland (ganzen Thema).	Mir hat wie gesagt dieses Thema gut gefallen und ich würde gerne wieder eine selbe Lehrzeit zu einem Lehrstück behandeln. Alles war von Anfang bis Schluss sehr komplett und auch hintergründig gut gestaltet und mit viel Finesse verfeinert.
EE	Dass das eine mit dem anderen verbunden ist.	Alle Formen sind miteinander verbunden. Die Formeln konnten zum Teil abgeleitet werden von dem, was wir schon kannten. Fand ich interessant.	War eigentlich nicht schwierig bis auf die Pyramiden.	Ich habe das besser verstanden als das im Eckenland mit der Pyramide. Es war etwas Neues, zu erfahren was π überhaupt ist.	Als wir das mit dem Trichter angeschaut hatten, habe ich auch begriffen, wie es mit der Pyramide läuft.	Ich fand es lustig und begreiflich. Manchmal musste ich selbst grübeln, aber am Schluss ging es.	Die Formeln sind eigentlich nicht schwer, aber die einzelnen sind vertauschbar. Ich finde es gut, dass wir jetzt eine kleine Formelsammlung haben.	Die Pyramide sollte besser erklärt werden, wegen den Berechnungen, wenn ein Teil abgeschnitten ist. Aber ansonsten habe ich alles einigermassen verstanden. Ich finde es komisch, dass die Menschen vor einigen tausend Jahren fast genauso viel wussten, wie wir heute.
FF	Alles ist komplizierter als ich gedacht hätte.		Gute Abfolge der Körper, leider am Anfang zu wenig Aufgaben zum selber Lösen im Unterricht.	Gut mit Einflechten historischer Fakten.	Zu komplizierter Einstieg. Mehr einfache Aufgaben zum Lernen.	Das fand ich gut.		Mehr selbst arbeiten. Vor allem am Anfang, wo es noch eher simpel ist.

GG		Das Arbeiten mit dem Ton war sehr interessant und auch lustig. Bei Beginn war das Ausfüllen der Formeltabelle noch recht schwierig. Heute erscheint mir das Ganze eher leicht.		Die Annäherung an die Zahl π durch Kreise von innen und von aussen fand ich sehr gut. Jedoch fand ich das Ausfüllen der Tabelle ($\rightarrow$ numerische Annäherung) etwas kompliziert.		Das Erscheinen von Archimedes hat mich sehr beeindruckt. Sein Besuch hat mir sehr gefallen und viele Unklarheiten geklärt.	Wie schon erwähnt erschien mir das Ausfüllen der Formelsammlung viel einfacher als das erste Mal. Ich war darüber sehr erfreut, die Formelsammlung ohne grosse Mühe ausfüllen zu können.	Ich glaube fast alles! Was sich verbessern sollte ist. Werden an der Tafel irgendwelche Formeln oder Rechnungen aufgeschrieben, so sollten diese etwas langsamer durchgeführt werden. Manchmal werden einige Schritte übersprungen, die meiner Meinung nach stehen sollten, da durch diese vielleicht die ganze Rechnung verständlicher werden würde.
HH	Weiss nicht so recht. Mein Ziel war, irgendwie zu kapieren, was an der Tafel läuft und endlich die Formeln für die Körper zu bekommen.	War ein guter Einstieg. Ich habe erkannt, was ich schon kann und was ich nicht oder auch nicht mehr weiss.	Mit diesen Körpern hatte ich nicht so Probleme, ausser an der Oberfläche der Pyramide habe ich lange „rumgeknorzt". Doch jetzt geht's … so halb. Mit den Diagonalen und so habe ich immer noch so meine Probleme.	Die Annäherung zum Kreis und π war für mich zuerst zu kompliziert. Ich habe am Anfang gar nichts gecheckt. Aber die Vergleiche da mit all den Wurzeln fand ich interessant. Archimedes' Sätze waren besser verständlich.	Trichter … Naja, weiss auch nicht so recht. Da hatte ich auch lange bis ich alles kapiert hatte.	Gute Abwechslung von der Norm. Zuerst fand ich es echt super, wie man alles (viel) über Archimedes erfahren hat, doch das dann an der Tafel war mir zu hoch. Die Beziehungen von Zylinder, Kugel und Kegel kapier ich jetzt gut.	Gut! Fast am besten! Jetzt weiss ich, wo mein Kopf steht und habe alle Lösungen und Formeln und so zusammen … Weiss, wo ich noch Probleme habe und was ich nochmals anschauen muss!	Eben die zum Schluss, ich hab jetzt alles zusammen. Ich weiss nicht, was man besser machen könnte, ich kapiere meistens die Erklärungen nicht, aber das liegt an mir, ich bin zu langsam. Und drei Lektionen sind zu lang. Bitte nicht mehr in der Tertia!!!
II	Dass ich die Formeln nachvollziehen kann. (Formeln der Stereometrie)	Die Idee ist gut. Auch das mit den Halbklassen ist gut, da man so einen besseren Link zur Materie bekommt.		Dieser Abschnitt war zeitweise ein bisschen zu theoretisch. Man war schnell mal gelangweilt, da man die Zahl π ja kannte und nicht genau wusste, weshalb man jetzt z. B. diese Tabelle ausfüllen musste.		Ich fand die Idee super und die Beispiele, die sie mitgebracht haben (Sand/Waage etc.) waren gut. PS: „Wir sind doch hier nicht im Kindergarten, … oder etwa doch?"	Gut gelungen. Man hat jetzt wirklich den Überblick über den Stoff.	Die Erarbeitung des Stoffes war gut. Nur wie schon erwähnt: Die π-Periode könnte man noch etwas spannender gestalten.
KK	Dass sehr viele Körper verwandt sind und man so gewisse Formeln ableiten kann. (Vor allem jeweils im Ecken- oder Rundland)	Guter Start für das Thema. Durch aktives mitarbeiten konnte man sich gut annähern und verstand dann Zusammenhänge besser.	Das Eckenland (v. a. Blatt mit Oktaeder etc...) ist zuerst sehr erschreckend und kompliziert. Wenn man sich dann ein bisschen eingearbeitet hat, geht's jedoch auch dann nicht ohne weitere Komplikationen.	Sehr kompliziert, dass man eine Zahl nicht darstellen kann, man kennt nur den Wert. Zu sehen, wie man sich schon früher mit der Zahl befasste, war interessant.	Ein bisschen einfacher als Eckenland, da einige Formeln noch präsenter sind. Trotzdem auch sehr anstrengend (Zusammen mit dem Eckenland vielleicht ein bisschen viel, obwohl klar ist, dass es aufeinander folgend „einfacher" ist).	Auftritt ist eine sehr willkommene Abwechslung. Vielleicht geht Archimedes ein bisschen schnell vor im Erklären, aber für ihn ist das ja auch einleuchtend. Wenn man dann all die Auskünfte „sacken liess", konnte man ja immer noch Fragen stellen (merci !) Das Thema wird immer vertrauter, da man ja schon viel vorgearbeitet hat.	Gut nun noch mal alles zusammenzufügen und zu repetieren. Positives Gefühl zu sehen, wie viel man dann doch gelernt hat. (Vergleich Formelsammlung, die wir am Anfang hätten ausfüllen sollen und die von heute!)	Archimedes Besuch war toll (sehr gute Idee!) Die viele Theorie wächst einem jedoch manchmal über den Kopf. Glücklicherweise hat man viele Übungsmöglichkeiten und Lernkontrollen, merci!
LL	Die Formeln für die Kugel.	Das fand ich gut.		Zuviel Zusatzinformationen (Archimedes). Annäherung an π war ziemlich lang.	Interessant, gut aufgebaut.	Das war interessant. Und vor allem mal was anderes. Und man konnte es sich vorstellen (Sand, Waage,…).	Überblick zum Abschluss: Das ist gut.	Die Annäherung an π war etwas lange, aber grundsätzlich gut. Es ist auch gut, dass wir nicht nur eine Aufgabe nach der anderen machen müssen, aber dafür konnten wir zum Teil etwas wenig üben.
MM	Annäherung an π. Körperberechnungen und deren Verhältnisse.	Guter Einstieg mit dem Ton. Ging aber danach verloren, denn wir führten den Ton nicht weiter. Dieser Teil war zu kurz.	Bis auf Pyramide kannte ich alles schon.	Hat mich verblüfft, dass Archimedes das alles im Kopf rechnete. Die Sätze waren kompliziert zu verstehen. Dieser Abschnitt war zu lang.		War wieder einmal (Pythagoras) lustig.	War hilfreich, alles noch ein bisschen „auffrischen" zu können.	Es hat mich beeindruckt, wie Archimedes (oder Hans?) das alles herausgefunden hat. Es sollte mehr Aufgaben geben, womit man sich trainieren kann.
NN	Wie die Annäherung von π geht. Wie rund begrenzte und eckig begrenzte Flächen zusammen hängen.	Die erste Formeltabelle konnte kaum von jemandem ganz ausgefüllt werden. Man fühlte sich ein bisschen hilflos.	Erinnerungen an die Sekundarschule wurden wieder wach. Ein paar Körper waren mir noch geläufig, andere musste ich wieder lernen.	Es war interessant zu sehen, wie im Laufe der Zeit die Zahl π immer genauer wurde. Die Sätze von Archimedes sind hoch interessant, aber nicht so leicht zu verstehen.	Der Zusammenhang zwischen „Eckenland" und „Rundland" wird ersichtlich.	Eine gute Idee, dass Archimedes vorbeischaute, aber nach ein paar Minuten wurde es ein bisschen langweilig. Die Idee ist ausbaufähig. Bringt Abwechslung in den Unterricht.	Gut, dass man sich nochmals alles, was man gelernt hat, durch den Kopf gehen lassen kann, war ja nicht gerade wenig, aber interessant.	Wie man sich schrittweise an π annäherte fand ich interessant. Zwischendurch wurde das Thema ein bisschen langweilig, da man nicht recht vorwärts kam, dann ging es aber plötzlich mit einem „Affenzahn" weiter.
OO	Ich fand es gut, dass man zuerst die Körper herstellte. Ich würde sagen, am Anfang war vielleicht zu viel Lernstoff.	Es war interessant, die Körper zu erstellen und zu schauen, wie es vom Eckenland ins Rundland ging.	Ich fand es nicht gut, dass man alle Körper in der gleichen Zeit anschaute.	Ich finde es interessant, dass man schon so früh an diese Zahl kam. Die Annäherung mit den eckigen Körpern fand ich gut.	Es war einfacher als die Aufgaben vom Eckenland, weil es nicht so viele Körper gibt.	Sehr interessante und lehrreiche Stunde.	Wenn man am Anfang schaute, wusste man gerade die Formeln vom Eckenland und die Kreise, aber jetzt kann man alle Formeln.	Die Stunde mit Archimedes war sehr gut. Was nicht gut war, dass am Anfang zu viel Stoff beisammen war.

PP	Vertiefter Einblick in das Rundland und Eckenland bekommen zu haben. Den Übergang von Rund- zu Eckenland gesehen zu haben, auch mit vertieftem Einblick in die Zahl π.	Ich fand diese Lektionen unterhaltend und doch lehrreich. Es erleichtert vieles, wenn man das Besprochene vor den Augen hat.	Das Aufzeichnen der verschiedenen Körper mit der entsprechenden Erklärung half mir sehr, weil ich mir dann die Formeln vorstellen konnte.	Das Bearbeiten der Zahl π fand ich gut, vor allem dass man mal ein bisschen länger an etwas macht und sich vertieft. Doch diese Formeltabellen der Annäherung fand ich zu viel, auf Dauer zu klar und langweilig.	Bei den Sätzen von Archimedes musste ich zweimal lesen, bis ich sie verstand. Den Teil mit dem Kegel fand ich sehr anspruchsvoll $\rightarrow$ Oberfläche des Kegels. Das Anfreunden mit dem Rundland war für mich sicherlich schwieriger als mit dem Eckenland.	Der Archimedes beeindruckte mich sehr. Ich finde es spannend zu sehen, wie er auf diese Formeln kam und was er schon alles gemacht hat. Die Beziehungen zwischen Zylinder, Kugel und Kegel fand ich gut ersichtlich.	Lehrreich waren die beiden Lektionen nicht gerade. Doch das Vorlesen fand ich schön. Ich wusste gar nicht, dass es solche Bücher gibt (nicht nur Formeln).	Den Besuch von Archimedes fand ich lehrreich und zugleich eindrücklich. Es ist mal etwas anderes als das ständige Aufgaben und Formeln lösen.
QQ	Körperberechnung. Annäherung an die Zahl π.	Die erste Lektion war sehr interessant. Das eigene Formen von Körpern hat Spass gemacht. (Gute Idee mit Halbklasse). Das Abzeichnen und Schattieren der Körper war überflüssig.		Die historische Übersicht hat mir sehr gefallen. Man konnte schauen, wie lange man π schon kennt. Die Sätze von Archimedes haben mir nicht sehr geholfen, sie haben mich eher verwirrt.	Das Ausschneiden eines Trichters war eine sehr lehrreiche Aufgabe.	Das Herleiten der Formel für die Berechnung der Kugel hast du viel zu schnell und kurz erklärt.		Sehr lehrreich waren die Teile des Unterrichts, bei denen man nicht nur überlegen, sondern auch von Hand etwas machen musste (Ton, Trichter). Der Auftritt von Archimedes war überzeugend. Wenn du etwas an der Wandtafel erklärst, was wir aufschreiben sollten, geht es meistens viel zu schnell.
RR		Visualisierung der zentralsten Körper. Positiv: Tonkneten Negativ: Formeltabelle ausfüllen ohne Grundkenntnisse.	Positiv: selbständige Arbeit mit dem Blatt, wo man selbst die Körper zeichnen musste, Formelzusammenfassung.	Die Nachahmung der Annäherung war sehr interessant. Die Tabelle z. T. zu kompliziert.	Positiv: selbständiges Arbeiten.	Der Auftritt war interessant, amüsant und unterhaltsam, lehrreich im Bezug auf Archimedes' Lebenswerk.	Das erneute Erstellen der Formeltabelle half, um Wissensfortschritte zu beobachten. Gute Formelsammlung.	Positiv: selbständiges Ausprobieren (Trichterberechnung), Aufgabenblätter. Es waren etwas viele Formeln zum auswendig Lernen aufs Mal.
SS	Die Annäherung an die Zahl π !	Diese Lektionen waren sehr lustig und amüsant. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass wir dieses Thema dazumals spielerisch in Angriff genommen haben. Das fand ich sehr gut.		Wieder mal ein bisschen Abwechslung durch geschichtliche Texte und Ereignisse in Archimedes Leben. Sehr eindrücklich und interessant.		Fand ich sehr lustig! Ein bisschen Abwechslung schadet nie!	Sehr praktische Formelsammlung! Danke!	Ich finde es sehr gut, dass sie den Unterricht so gestalten, dass wir nicht nur stur Matheaufgabe für Matheaufgabe lösen, sondern, dass sie uns immer mit geschichtlichen Hintergründen, Erzählungen ... ein bisschen Abwechslung ins „Spiel“ bringen. Jedoch sollten sie während dem Unterricht mehr nachfragen, ob wirklich allen alles klar ist, denn ich glaube dies ist nicht immer der Fall.
TT	Die Annäherung an die Zahl π und die Zusammenhänge der Körper.	Interessante Lektionen als Einführung in die Stereometrie.	Für mich das Kapitel, das am schwersten zu verstehen war.	Annäherung an die Zahl π war sehr komplex, es war schwierig, alles nachvollziehen zu können. Etwas viel Details, die vom Wesentlichen abweichen!	Habe ich recht schnell begriffen. Unterricht war gut erklärt.	Amüsante Lektion mit Archimedes. So fällt es leichter, den Stoff aufzunehmen.	Endlich ist sie da!	An der Tafel, wenn wir Formeln erarbeiteten, ging es manchmal zu schnell. Du warst oft schon fertig mit Aufschreiben, während wir noch am Anfang der Formel waren und überlegten. Dann konnten wir nicht beim aktuellen Schritt mitdenken und wussten nicht mehr, was passiert war. doch im Grossen und Ganzen war der Unterricht sehr lehrreich und interessant.
UU	Alles hängt mit allem ZUSAMMEN !	Super fand ich das Körperformen mit Ton.	Habe ich schon gekannt.	Ich fand es interessant, zu sehen wie sie schon damals auf diese Zahl π gekommen sind.	Die beiden Körper sind ähnlich und doch verschieden.	Dass Archimedes immer noch lebt, beweist, dass er ein Genie ist. Sein Leben und seine Taten finde ich wirklich interessant und bewundernswert.	Mit der Formelsammlung müssen wir weniger auswendig lernen und das freut mich sehr.	Weniger Beweise, mehr praktisches Rechnen. Ansonsten fand ich den Unterricht lebendig gestaltet (Archimedes, Ton, …)
VV	Es besteht ein Zusammenhang zwischen dem Ecken- und Rundland. Figuren aus dem Rundland können durch Figuren aus dem Eckenland hergeleitet werden. Grenzwärter π.	Durch das Erstellen von Tonfiguren konnten wir uns die dreidimensionalen Figuren ansehen und mussten sie uns nicht nur vorstellen. Die Formeltabelle strukturierte das Ganze.	Berechnung der Körper im Eckenland zum Herleiten von Formeln fürs Rundland.	Entwicklung der Zahl π. Rekord der Zahl π.				Gefallen: Tonfiguren: Sehen der dreidimensionalen Figuren in Wirklichkeit. Formelsammlung auf Blatt: Hilfreich für den Überblick. Archimedes: Einblick in sein Leben. Goldkugel: praktische Anwendung. π-Rekord: Aktuelles. Verbesserungsmöglichkeit: Für die Flächenberechnung des Drehkegels ein Blatt als Stütze.
WW	Die Annäherung zur Zahl π. Formel von Grundfläche und Volumen. Zusammenhänge verschiedener Figuren.	Bei Körperfamilie waren wir uns nicht einig. Die Formeltabelle ist grösstenteils geraten.	Würfel und Quader leicht. Für Pyramide und Prisma, leichte Probleme beim Finden der Formel.	War interessant. Ich frage mich immer noch, wie Archimedes diese Zahlen ohne Taschenrechner rechnen konnte. Und ich finde es faszinierend, dass man vor Christus schon π um 1/10 verfehlte.	Dies war fast eine Repetition, weil man die Formeln vom Eckenland kennt (Pyramide und Quader).	Der Auftritt war hilfreich. Die Kugel war anfangs schwer begreiflich, bis man das Blatt mit Brücken zwischen Oberfläche und Volumen der Kugel bekam. Es war am Schluss eine hilfreiche, auffrischende Repetition.	Man hat nun eine Formelsammlung. Damit kann man diese Formeln jedes Mal nachsehen.	Ja, sie war sehr lehrreich. Mir kommen keine Verbesserungsvorschläge in den Sinn (ausser beim Archimedes-Kostüm).

Im Einstieg entsteht die Körperfamilie:
Am Einstieg hat das praktische Gestalten gefallen. Es wird als „unterhaltend und doch lehrreich“ (PP) empfunden. Das Arbeiten mit Halbklassen hat den Vorteil, dass alle gut beteiligt sein können. Für EE kommt bereits hier zum Ausdruck, dass alle Formen miteinander verbunden sind. MM kritisiert, dass wir das Arbeiten mit Ton nicht weiterführten. Die Körper waren immer da und auch der Ton wäre bereit gewesen. Manchmal setze ich ihn beim Unterteilen eines Würfels in gleiche Pyramiden wieder ein. Denkbar ist auch eine Wiederverwendung im Rundland im Zusammenhang mit der Waage. Die Tabelle, als erste Auseinandersetzung mit Formeln zu den Körpern gedacht, wird von VV als strukturierendes Element erlebt, während sich NN hilflos fühlt bei dieser ersten Annäherung an die Tabelle. Am Ende des Lehrstücks kommt die Tabelle ja wieder: „Gut, dass man sich nochmals alles, was man gelernt hat, durch den Kopf gehen lassen kann, war ja nicht gerade wenig, aber interessant.“

Die Körper im Eckenland:
Bis auf die Pyramide sollte dieser Abschnitt Repetition des 8. Schuljahres sein. Wir wiederholen vieles. Die Unterschiede sind gross. Von UU: „Habe ich schon gekannt.“ bis TT: „Für mich das Kapitel, das am schwersten zu verstehen war.“ Das Blatt mit den Körpern im Würfel fördert das Anschauungsvermögen und ist geeignet für selbständige Auseinandersetzung mit diesen Körpern. Ich setzte es ein, um die Wissensunterschiede zu verkleinern.

Annäherung an die Zahl π:
Der historische Teil zur Zahl π, auch ein Stück Ideengeschichte, kommt gut an. Zur Tabelle meint RR: „Die Nachahmung der Annäherung war sehr interessant. Die Tabelle z. T. zu kompliziert.“ Dabei ist vermutlich die Ausrechnung gemeint. Diese ist anspruchsvoll und aufwändig, aber immer noch einfacher, als wenn wir, wie Archimedes vor 2250 Jahren, alles von Hand rechnen würden. NN: „Die Sätze von Archimedes sind hoch interessant, aber nicht so leicht zu verstehen.“ Genau das ist die herausfordernde Seite an diesen Sätzen! Wer sich durchringt, bis er sie versteht, hat einen Denkprozess geleistet, auf den er stolz sein darf.

Im Rundland:
Wer sich von den Überlegungen im Eckenland leiten liess, hatte im Rundland nicht allzu viel Mühe. Nach dem aufwändigen Ausfüllen der Tabelle ist die Trichteraufgabe ein Methodensprung: Nachdenken und Handeln in enger Verbindung. EE gelingt es sogar, aufgrund des konkreten Trichters Rückschlüsse auf Körper im Eckenland zu ziehen.

Archimedes tritt auf, erläutert das Kugelvolumen und zeigt den Weg zu einfachen Beziehungen: Der Auftritt von Archimedes brachte „Hintergründe und durchaus Wissenswertes“ (DD), man konnte sich das dank Sand, Waage, Schreibtafel, etc. gut vorstellen. Einzig die Formel für das Kugelvolumen hatte Archimedes „viel zu schnell und kurz erklärt.“ Hier wurde ein Ausschnitt etwas anspruchsvolleren Denkens von Archimedes präsentiert, der dank der Vorkenntnisse dieses Schuljahres nachvollzogen werden kann. Zum genaueren Nachvollziehen stand in der zweiten Lektion genügend Zeit zur Verfügung. Wer sich diese Mühe macht, gewinnt eine andere Achtung vor den Leistungen des Archimedes. Eine innere Stimme sagt mir: *„Bleibe bei dieser Präsentation! Wir neigen dazu, immer alle Hindernisse aus dem Weg zu räumen. Wo bleibt da die besondere Herausforderung? Wo sollen interessiertere und begabtere Schülerinnen und Schüler ihre Kräfte entfalten? Warum verweigern wir ihnen das mögliche Erfolgserlebnis? Und wie sollen sie die Leistung von Archimedes würdigen können, wenn sie nicht für* einmal *seinen Weg gegangen sind?* Immer nur *die Normalrouten zu begehen, das ist zu wenig!“*

Eigene Formelsammlung. Überblick zum Abschluss:
Die Freude ist gross. Erstens das Erlebnis von GG: „Ich war darüber sehr erfreut, die Formelsammlung ohne grosse Mühe ausfüllen zu können.“ Zweitens wird ein klärender Überblick geschaffen von NN: „War ja nicht gerade wenig, aber interessant.“ Drittens herrscht bei den meisten, wie bei AA: „Freude über die erste Formelsammlung!“ Oder TT: „Endlich ist sie da!“ Und UU: „Mit der Formelsammlung müssen wir weniger auswendig lernen und das freut mich sehr.“ Allerdings hat die Formelsammlung auch eine andere Seite. Wir haben uns intensiv mit den Formeln, ihrem Zustandekommen und ihrer gegenseitigen Bedingtheit auseinandergesetzt, so dass diese Formeln samt ihren Bedeutungen im Kopf abrufbar sein sollten, und zwar ohne zusätzliches Auswendiglernen. Alle wissen, dass die Kreisfläche das π-fache von r^2 ist. Wer sich jetzt an die zwei Seiten des Mondes erinnert, wird leicht die Kugeloberfläche bestimmen können. Die Formelsammlung verleitet leider immer wieder dazu, nachzuschlagen statt nachzudenken. Schade!

Schlussbemerkungen:
Wir hören viele positive Stimmen wie schon bei den Rückmeldungen zu den einzelnen Akten. Pflücken wir ein paar kritische Anmerkungen heraus: AA wünscht: „Bitte ein bisschen länger, eingehender, einfacher erklären.“ In Lehrstücken arbeiten wir oft prozesshaft. In der Klasse nimmt der Prozess nicht immer den einfachsten Weg. Die Bitte von AA bezieht sich besonders auf die Berechnung des Kugelvolumens. Das Dilemma des Vorgehens habe ich erwähnt, es geht immer auf Kosten des einen oder anderen Schülers. Vielleicht werde ich im Nachhinein mit einem Arbeitsblatt die einfache Variante darstellen. Vermeiden möchte ich allerdings, dass wir damit die grossartige Leistung von Archimedes schmälern. – SS kritisiert: „Jedoch sollten sie während dem Unterricht mehr nachfragen, ob wirklich allen alles klar ist, denn ich glaube, dies ist nicht immer der Fall.“ *Es gibt im Lehrstück Phasen, wo wir lange gemeinsam verweilen, in die Tiefe gehen, den Kern der Sache erörtern, bis ihn alle begriffen haben. Es gibt andere Sequenzen, in denen sich der Einzelne in grosser Eigenverantwortung mit möglicher Unterstützung von Kollegen, Kolleginnen und Lehrkraft Klarheit verschaffen muss (wenn er wirklich will!). Vielleicht muss ich diesen Unterschied in Zukunft noch klarer kommunizieren! – Die Arbeit an der π-Tabelle wird von Einzelnen als lange, langweilig oder als kompliziert empfunden. Hier könnten wir die Berechnung früher an die Tabellenkalkulation delegieren, bereits nach einigen Zeilen, sobald das weitere Vorgehen klar ist.* – Im Aufgabenteil habe ich Pyramidenstumpfe eingebaut, die logisches Denken erfordern und zeigen, wie Streckungsüberlegungen in der Stereometrie nützlich sind. Dies hat offenbar einige Schüler überfordert. UU wünscht: „Weniger Beweise, mehr praktisches Rechnen.“ Das logische Herleiten der Formeln ist Kernidee dieses Lehrstücks und sollte deshalb nicht weiter gekürzt werden. Die Anwendungsbeispiele liessen sich vermehren, was allerdings das Lehrstück verlängern würde. Heben wir zum Schluss von den vielen positiven Rückmeldungen wenigstens DD hervor: „Alles war von Anfang bis Schluss sehr komplett und auch hintergründig gut gestaltet und mit viel Finesse verfeinert.“ Danke!

Werfen wir den Blick darauf, wie zwei Schüler oder Schülerinnen das Lehrstück als Ganzes erlebt haben.

EE erlebt als zentrale Erkenntnis die Tatsache, „dass das eine mit dem anderen verbunden ist.“ Das bezieht sich wohl auf Eckenland und Rundland, heisst aber auch: „Alle Formen sind mit einander verbunden.“ Offenbar bezieht sich AA auf bereits Bekanntes und findet Interesse daran, dass neue Formeln daraus abgeleitet werden können. Das Strukturieren beginnt. Bei den Pyramiden und damit auch bei den Anwendungen im Würfel tauchen die ersten Schwierigkeiten auf. Es ist erstaunlich, dass die anspruchsvolle Annäherung an π weniger Probleme bereitet. Als Novum hat die Zahl π vermutlich neues Interesse geweckt. Erfreulich ist, dass die kopf- und handorientierte Auseinandersetzung mit dem Trichter sogar rückwirkend die Pyramide begreifen lässt. Der Auftritt von Archimedes war lustig und einleuchtend. Allerdings musste sich AA sehr anstrengen, um die anspruchsvollen Zusammenhänge zu verstehen. Das Erfolgserlebnis blieb nicht aus. Die Beziehung zu den Formeln ist hergestellt. Diese sind nicht schwer einzusehen. Ohne die nötige Vorsicht könnten sie aber verwechselt werden. Die kleine Formelsammlung wird begrüsst. Alles ist einigermassen verstanden. Rätselhaft geblieben sind die Pyramiden, vor allem wenn oben ein Teil fehlt. Bei AA hören wir ein Staunen und Achtung vor dem Wissen, das sich die Menschen bereits vor Jahrtausenden aneigneten. Die ganze Geometrie bis zum 9. Schuljahr (und noch viel mehr) wurde bereits damals entwickelt.

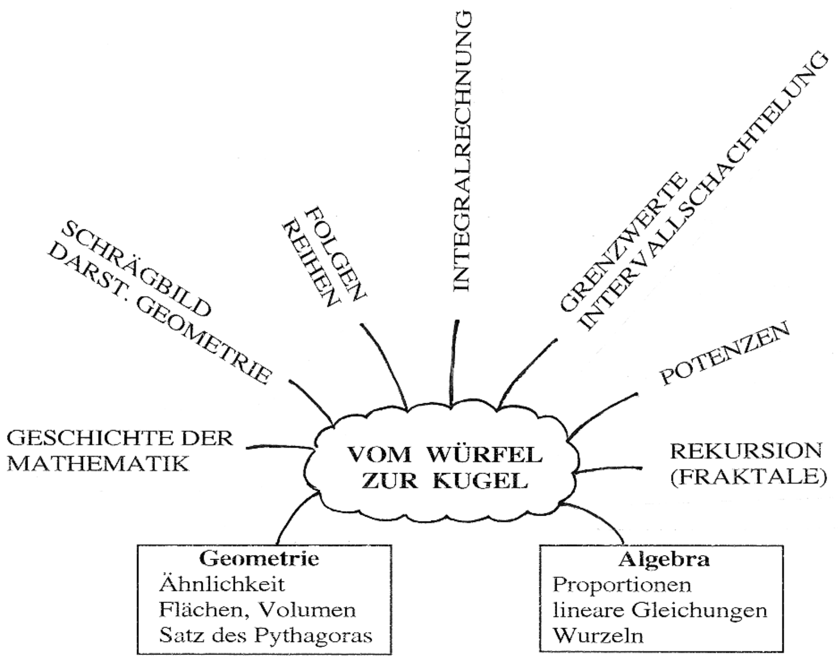
HH tut sich schwer mit der Mathematik. Der Einstieg fand Gefallen. Er knüpfte offenbar bei Bekanntem an, wies auf Vergessenes und Neues hin. Die Oberfläche der Pyramiden und die Diagonalen bereiteten Probleme. Hier sind ein gutes Vorstellungsvermögen und der Satz des Pythagoras gefragt. Für HH ist der Zugang vom Sprachlichen her zum Problem offenbar einfacher als über Berechnungen. Die Wurzeln faszinierten. Der Trichter verlangte wieder viel Denk- und Vorstellungsvermögen. Die Aspekte über Archimedes und sein Leben fanden Anklang, die Kletterroute zum Kugelvolumen war für HH allerdings zu schwierig. Trotzdem wurde es HH möglich, die Beziehungen der Körper im Rundland zu verstehen. Der Überblick und die Formelsammlung am Schluss bieten willkommene Orientierung: „Jetzt weiss ich wo mein Kopf steht". HH ist langsam, kann sich aber helfen und findet den Weg: „Weiss, wo ich noch Probleme habe und was ich nochmals anschauen muss!"

Leider konnte ich den Schülerinnen und Schülern die Gedanken, wie ich sie oben formuliert habe, nicht mitteilen. Die Sommerferien kamen dazwischen und ich gab die Klasse für ein halbes Jahr an einen Kollegen ab. Zwar traf ich die Klasse kurz, um das Poster fertig zu stellen, aber das Interesse an einer Rückmeldung war nicht vorhanden.

3.6 Didaktische Interpretation: Methodentrias

Exemplarisch
Die einfachsten der Körper, die uns tagtäglich umgeben, sie entstehen in unseren Händen. Diese Körper stehen in Beziehung zueinander, sie bedingen einander in der Körperfamilie. Welches ist ihr gegenseitiger Bezug, welches ihr Verwandtschaftsverhältnis? Die Beziehungen dieser Körper zueinander bestimmen die Struktur des Lehrstücks und liefern zugleich den roten Faden bis zum Schluss. Wir nehmen uns Zeit, diese Körper herzustellen, uns mit ihren Namen und Formen anzufreunden und ihre Entsprechungen im Alltag ins Auge zu fassen. Im Eckenland steht der Übergang vom Quader zur Pyramide im Zentrum. Warum muss bei der Volumenberechnung durch 3 geteilt werden? Zerlegungen von Würfel und Prisma zeigen uns die Begründung. Der Würfel lehrt uns auch verschiedene andere regelmässige Körper wie Tetraeder, Oktaeder und Kuboktaeder unter neuem Aspekt zu sehen und zu verstehen.

Eckenland und Rundland sind zwei getrennte Welten. Für den Übergang hilft uns Archimedes als Fährmann. Das Runde wird – in einem endlosen Prozess – von innen und von aussen durch das Geradlinige angenähert. Das Jahrtausende alte und noch heute andauernde Ringen der Menschheit um diesen Übergang und um die Bestimmung von π verweist auf die Schwierigkeiten dieses Übergangs. Sind wir im Rundland angelangt, so werden die Bezüge wieder einfach. Einzig die Kugel will errungen sein. Meister Archimedes als Protagonist weist uns einen genialen Weg und führt uns zur Schönheit der Verhältnisse. Das Rätsel ist gelöst, die Familie der Körper ist uns vertraut, der Weg vom Würfel zur Kugel ist durchschritten und die Resultate liegen jetzt auch mit der Formelsammlung vor uns. Ob wir uns wieder an die einfachen Bezüge erinnern beim Betrachten einiger Gläser auf dem Tisch oder des Vollmondes am Himmel?



Genetisch
Der Weg vom Würfel zur Kugel, vom Eckigen zum Runden entspricht in etwa auch dem Gang der Erkenntnis. Das Eckenland ist früh ergründet, obwohl auch für das Pyramidenvolumen ein unendlicher Grenzprozess vonnöten ist. Über Zylinder und Kegel ist vieles bekannt, aber erst 150 Jahre nach Euklid gelingt es Archimedes, das Geheimnis der Kugel, der einfachsten und reinsten Gestalt, zu fassen. Methodisch folgen wir den Spuren von Archimedes: Mit den Händen erschaffen wir unsere Körper, durch Experimentieren und Wägen gelangen wir zu unseren Vermutungen und schliesslich können wir mit dem Kopf die Erkenntnisse klar formulieren und begründen. Historisch-genetisch setzen wir uns mit verschiedenen in der Antike formulierten Erkenntnissen auseinander, versuchen sie zu verstehen und zu ergründen. Und erst später gelingt es sogar, diese Erkenntnisse in einer eleganten Kurzschrift, mit einer Formel, festzuhalten. *Formen – Formulieren – Formeln* (im Sinne von Formeln gewinnen), diese drei Tätigkeiten begleiten uns durch das Lehrstück und dies ist auch der Dreischritt, den wir alle individual-genetisch durchlaufen sollten. Nur so ist eine Formel eingewurzelt und bedeutungsvoll, nur so erleben wir mit dieser Kurzform auch die Kraft der damit verbundenen Form und die Stärke der klar formulierten Erkenntnis.

Dramaturgisch
Archimedes begleitet uns durch das ganze Lehrstück hindurch. Es beginnt mit dem grossen Wurf des Sandrechners in die Weite des Alls und des Zahlenreichs, über seine Annäherung von π und die Eroberung der Kugel bis zum Geheimnis über Archimedes' Grabmal. Ebenso begleitet uns die Körperfamilie. Sie entsteht in und aus unseren Händen, wird formiert und bestimmt die Struktur des Lehrstücks mit Eckenland, Übergang zum Runden und Rundland.

Wir erleben in gut 20 Lektionen den zu Beginn vorgezeichneten Weg vom Würfel zur Kugel, wobei jeder der Körper zu seiner Zeit im Zentrum steht und dann wieder zurücktritt, aber präsent bleibt. Gleichzeitig verwandelt sich das anfängliche Formelchaos zur geordneten, bedeutungsvollen Formeltabelle, die Formen werden ergänzt durch die Formeln. Die verwirrende Vielfalt der Körper vom Anfang hat sich strukturiert und weist schliesslich überraschend einfache Verhältnisse auf. Mit Blick zurück lässt sich der Gang durch die Welt der mathematischen Körper eindrücklich mit einem Poster abrunden.

3.7 Das Lehrstück in der Fachschaft

Am 5. Dezember 2003 präsentiere ich das Lehrstück in meinem Zimmer: Von den 16 eingeladenen Fachlehrkräften kommen immerhin deren fünf: Martin und Hansueli vom mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium, Bärbel und Hans vom Literargymnasium und meine künftige Praktikantin Isabelle. Da zwei von ihnen frühzeitig wieder gehen müssen, bleiben nur 45 Minuten Zeit. Das Material habe ich auf Tischreihen für einen Rundgang durch das Lehrstück nach Akten ausgebreitet. Nach einigen einführenden Bemerkungen über Lehrstücke konzentrieren wir uns kurz auf die Anordnung der Körperfamilie. Martin berichtet, dass auch im mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium die Jugendlichen die Körpernamen nicht kennen. Das Zeichnen der Körperfamilie findet bei allen Anwesenden grossen Gefallen. Ich bin selbst erstaunt, wie viel in der ersten Doppelstunde behandelt wird. Im Eckenland liegen viele aus Karton hergestellte Körper. Bärbel erkundigt sich, ob all diese Körper in der Stunde entstanden seien. Nein, öfters habe ich den Hausauftrag erteilt, ganz bestimmte Körper zu bauen und oft wurden diese dann in der folgenden Stunde zueinander in Bezug gesetzt, z.B. indem einige von ihnen zusammen in einen Würfel passen mussten. Beim Kreis wendet Martin ein, dieser sei ja bekannt. Aber es wird zugegeben, dass hier viel Neues, insbesondere auch Historisches dazukommt und dass ein hohes Mass an anspruchsvoller Repetition des Quartastoffes integriert ist: Pythagoras und der Umgang mit Wurzeln, Gleichungen lösen, Ähnlichkeit. Der Text des Papyrus Rhind scheint unbekannt zu sein. Dass wir hier beim algorithmischen Rechnen an Grenzen stossen, wird besonders beachtet. Im Rundland werden vor allem die vielfältigen Zusammenhänge und meine Gläser bestaunt. Leider sind die 45 Minuten allzu rasch um. Zum Poster gibt es keine Reaktionen. Von Bärbel, welche kürzlich mein Lehrstück zu Pythagoras angeschaut hat, erfahre ich, dass ihr dieses Lehrstück bedeutend besser gefällt. Schade, dass alle bereits wieder im eigenen Unterricht verschwinden müssen. Das eine oder andere zusätzliche Feedback hätte mich interessiert. Dafür nimmt sich Urs Höner, unser Rektor, wenig später eine Viertelstunde Zeit, um mit mir zusammen die Auslage anzusehen. Derartige Unterstützung und Wertschätzung wünsche ich allen Lehrkräften, die innovativ ihren Unterricht verbessern wollen und damit die Schule verändern!

Da einige meiner Kollegen ihr Bedauern ausdrücken, dass sie nicht dabei sein konnten, beschliesse ich nach Rücksprachen, die Präsentation am 12. Januar zu wiederholen. Wiederum erscheinen fünf Interessierte: Klaus, Heiner und Niklaus vom Wirtschaftsgymnasium, Hans-Jörg vom mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium und Cornelia aus einem anderen Berner Gymnasium. Diesmal haben wir eine ganze Stunde zur Verfügung. Der Rundgang durch das Lehrstück wird etwas lebendiger, insbesondere da Cornelia das Lehrstück kennt und ebenfalls im Unterricht anwendet. Auch sie lässt in der ersten Doppelstunde die Körper abzeichnen. Beim Einstieg zum Kreis bringt sie ein Brett mit gezeichnetem Kreis und eingeschlagenen Nägeln, um den Umfang zu diskutieren. Klaus lässt auf einem Seidenpapier einen grossen Kreis und darin an beliebiger Stelle ein Quadrat mit dem Radius als Seitenlänge zeichnen. Dann wird das Blatt mehrfach gefaltet und mit einer Nadel hundertfach durchstochen. Nach dem Entfalten lässt er die Punkte innerhalb des Quadrats und des Kreises auszählen und daraus erhält er π auf drei Stellen genau. Dem entspricht der „Zufallsregen", den Hans Jörg am Computer auf ein Quadrat mit einbeschriebenem Viertelkreis fällen lässt, um dann auch das Punkteverhältnis zu bestimmen. Mit dem Vorgehen von Cornelia sind wir allerdings am nächsten bei den Überlegungen von Archimedes. Vor dem Buch mit den Abhandlungen von Archimedes stehend, verdeckt Hans Jörg mit einem Finger das „Ab". Es entsteht ein neuer Untertitel für das Lehrstück: „Handlung und Abhandlung" oder „Von der Handlung zur Abhandlung". Mit Hinweis auf die Auslage erwähne ich meinen bisherigen Untertitel: „Formen – Formulieren – Formeln". Ist es ein Qualitätszeichen für Lehrstücke, wenn prägnante Untertitel entstehen? Wir diskutieren die Methoden zur Herleitung des Kugelvolumens. Entscheidend für die Wahl wird wohl die Leistungsbereitschaft der Klasse sein. Zum Abschluss bemerkt Cornelia über das Lehrstück: „Da steckt die ganze Mathematik drin." Sie nimmt die vorkommenden Ideen gezielt später im Unterricht wieder auf: Volumenberechnungen bei den Reihen, Kegel bei den Optimierungsaufgaben, die Idee der Scheiben in der Integralrechnung. Hans Jörg, der selbst vor Jahren Wagenschein persönlich in Seminaren erlebt hat, ist begeistert vom Ausmass der Handlungen in diesem Lehrstück. Der Umgang mit Material liege ihm weniger, er und seine Kollegen am mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium würden zu formal und zu platonisch unterrichten. Klaus gefällt diese Inszenierung wegen der vielen einprägsamen Bilder, die erzeugt werden. Er kann sich gut vorstellen, das Lehrstück bei sich bietender Gelegenheit in dieser Form durchzuführen. Selbst die Rolle des Archimedes scheut er nicht. Er bedauert ein wenig, dass die Jugendlichen in diesem Lehrstück nicht die Möglichkeit haben, in eine Rolle zu schlüpfen wie im Lehrstück zur Wahrscheinlichkeit, wo sie mit spielerisch-kreativen Elementen Briefe entwerfen. Niklaus findet das Lehrstück vielfältig und abwechslungsreich. Ihm gefällt besonders der Bezug zur Antike, die sonst auf unserer Stufe oft vernachlässigt werde. Die Akte III und IV erforderten intensives Mitdenken der Schüler. Der I. Akt mit dem Ton entspreche weniger seinem Naturell. Vielleicht werde er aber über seinen Schatten springen. Ich werde mit ihm zusammensitzen, bevor er in wenigen Monaten die Stereometrie unterrichten wird.

Insgesamt haben sich mit diesen zwei Präsentationen 8 der 15 Fachkollegen der Gymnasien Bern-Neufeld, also gut die Hälfte, für dieses Lehrstück interessiert und es kennen gelernt.

3.8 Die Ideengeschichte im Lehrstück

Betrachten wir in den Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler die zentralen Erkenntnisse, so erhalten wir Hinweise auf die erlebten Grundideen. VV: „Es besteht ein Zusammenhang zwischen dem Ecken- und Rundland. Figuren aus dem Rundland können durch Figuren aus dem Eckenland hergeleitet werden. Grenzwärter π." UU: „Alles hängt mir allem ZUSAMMEN!" WW: „Zusammenhänge verschiedener Figuren." SS (u. a.): „Die Annäherung an die Zahl π!" KK: „Dass sehr viele Körper verwandt sind und man so gewisse Formeln ableiten kann." II: „Dass ich die Formeln nachvollziehen kann. (Formeln der Stereometrie)" Das räumliche Strukturieren [6] mit den verschiedenen Körpern, die Annäherung an π [8,9] und das Entwickeln und Verstehen von Formeln [7] sind offenbar die zentralen Ideen.

Zu Beginn lassen wir die verschiedenen einfachen Körper in unseren Händen entstehen. Sie werden uns durch das ganze Lehrstück hindurch begleiten. Dabei denke ich an Heymann (1996, S. 177): „Die Idee des räumlichen Strukturierens kann sich nur entfalten, wenn (auch) immer wieder der dreidimensionale euklidische Raum praktisch und vorstellungsmässig als

Referenzrahmen herangezogen wird.“ (Grundidee [6]) Wir erleben, wie sich die einfachen Körper zueinander in Beziehung setzen lassen. Sie unterteilen sich in Eckenland und Rundland, es gibt aber eine intensive Verwandtschaft selbst über die Kluft hinweg, so zwischen Prisma und Zylinder einerseits, zwischen Pyramide und Kegel andererseits. Wir formen die Körper aus Ton, bauen sie aus Karton oder Papier, erstellen Handskizzen und zeichnen aus ihren Rissen die Körper im Würfel. Dabei schärfen wir das Auge für Körper und Formen im Alltag.

Beim Formen zu Beginn des Lehrstücks entsteht die Kugel als „einfachster“ Körper. Aber was ist eine Kugel? Hier sollten wir verstärkt die Gedanken auf das Wesen der Kugel, auf die dahinter stehende Idee gemäss Platon lenken. Bei all unseren Betrachtungen durch das ganze Lehrstück hindurch haben wir zwar die realen Gegenstände vor uns, wir befassen uns aber immer mit deren idealen Formen dahinter [2]. Erst die Idee der idealen Figur lässt uns die von Hand geformte Kugel wirklich begreifen. Wittenberg (1990, S. 220) nennt es „ein geistiges Greifen dessen, was vorher ungreifbar blieb.“ Diese Zweiseitigkeit steckt auch in der „Methode“ des Archimedes: Der experimentelle Ansatz mit den real existierenden Körpern, welcher keine exakten Aussagen liefert, steht bei ihm gleichwertig neben der theoretischen Erkenntnisfindung und Begründung, die sich auf die idealen Gegenstände bezieht. In unserem durch Technik geprägten Umfeld finden wir viele Körper, die sehr nahe an der idealen Gestalt sind und sich somit mit den herauskristallisierten mathematischen Formeln einfach berechnen lassen [3].

Die zentrale Idee der Formeln [7] wird im Schullehrplan für das neunte Schuljahr angesprochen: „Die Bedeutung von Formeln erfassen; Formeln gewinnen, deuten, anwenden und umformen.“ (Erziehungsdirektion des Kantons Bern 1996, S. 44) Ausgehend vom Formen beginnen wir Zusammenhänge zu formulieren, die sich schliesslich in Formeln verdichten. Das Grundmuster: „Formen – Formulieren – Formeln“ zieht sich durch das ganze Lehrstück hindurch. Die Kraft der Formeln und ihre gegenseitig Abhängigkeit werden deutlich in der entstehenden Formeltabelle.

Aufgrund der Beziehungen und der Formeln offenbaren sich Zusammenhänge, die sich in einfachsten Zahlenverhältnissen [4] ausdrücken. Im Eckenland ergeben drei Pyramiden ein Prisma, im Rundland stehen die Volumina vergleichbarer Zylinder, Kugel und Kegel im Verhältnis von 3 : 2 : 1. Archimedes bringt es auf den Punkt mit seinem Satz über die Kugel und den ihr umschriebenen Zylinder.

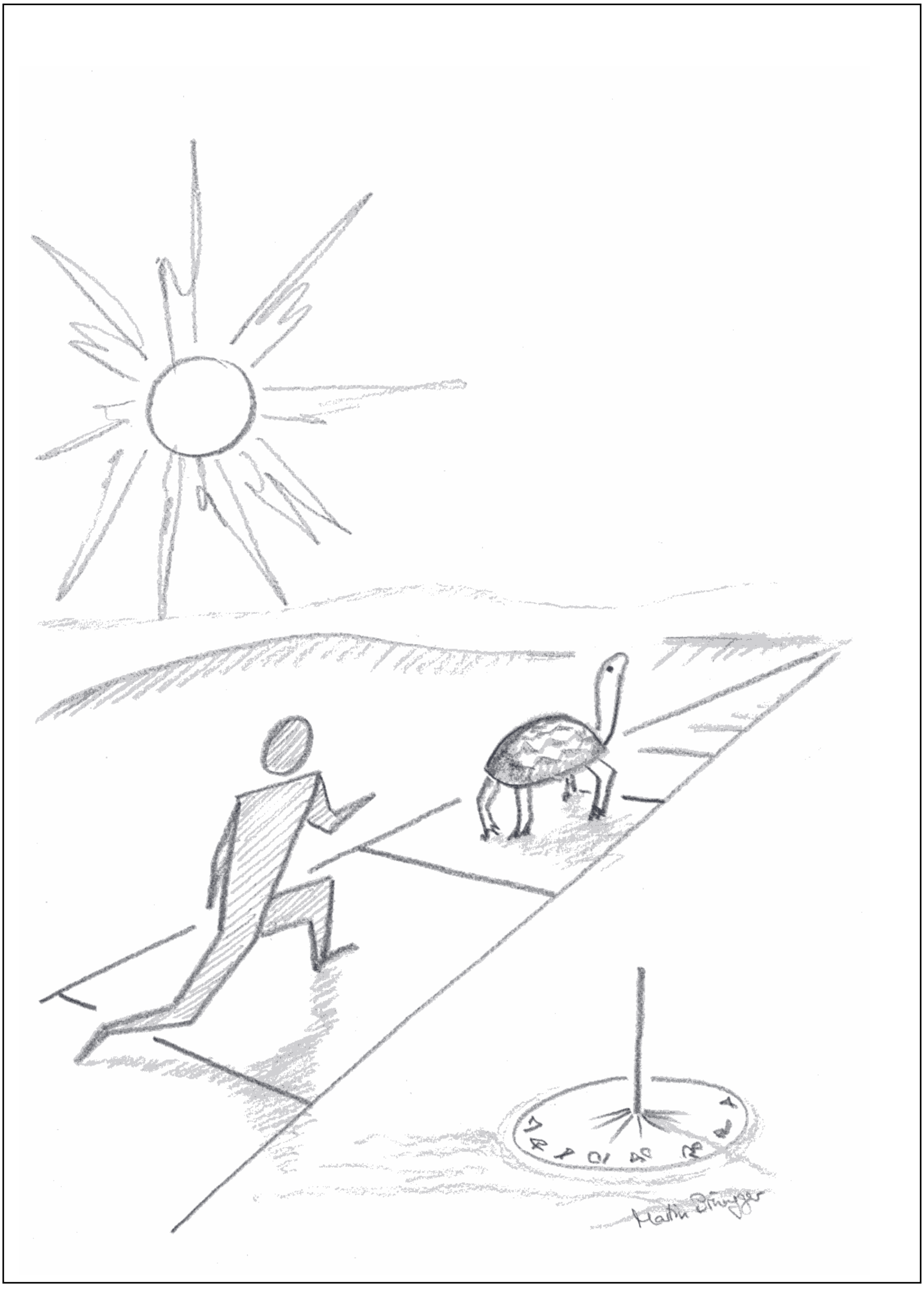
Die ganzen Zahlen genügen aber nicht, wenn wir den Schritt vom Eckenland ins Rundland gehen wollen. Um π, den Vermittler zwischen dem Geradlinigen und dem Runden kennen zu lernen, müssen wir Messen [5]. Im Satz 3 seiner „Kreismessung“ formuliert Archimedes (Archimedes 1798, S. 104): „Jedes Kreises Umfang ist dreymal so gros als der Durchmesser, und noch um etwas grösser, nämlich um weniger als 1/7, aber um mehr als 10/71 des Durchmessers.“ Doch der Umfang lässt sich nicht einfach messen. Archimedes muss den Umfang mit immer kleineren Seitenlängen von aussen und von innen annähern. Erst ein Algorithmus [8] liefert das Instrument, um dem Umfang und damit der Zahl π wesentlich näher zu kommen. Es braucht eine Intervallschachtelung, einen nicht abbrechenden Prozess [9], der es uns erlaubt, die Zahl π zu fassen. Die historische Entwicklung der Annäherung an π zeigt, dass das Verhältnis Durchmesser zu Radius die Menschheit seit Jahrtausenden und bis heute beschäftigt. Auch bei der Bestimmung des Kugelvolumens begegnen wir einem Prozess, der ins unendlich Kleine hineinreicht, ein Verfahren, das für die Infinitesimalrechnung von fundamentaler Bedeutung ist.

Bei den Körpern erleben wir die Mathematik als logisches Gebäude [1] wie in der ebenen Geometrie. Die entstehenden Formeln lassen sich voneinander herleiten, es gibt eine logische Hierarchie der Sätze.

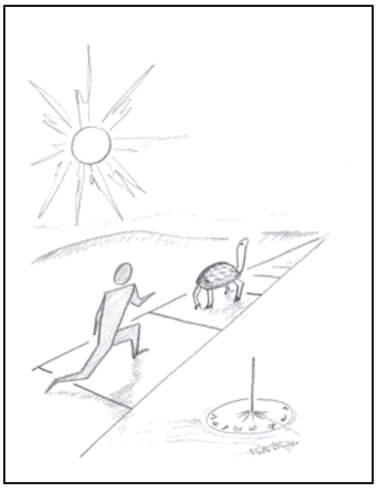
Die Tatsache, dass die Grundideen in diesem Lehrstück sehr stark präsent sind, oder wie Cornelia meint: „Da steckt die ganze Mathematik drin“, ist in der Tabelle ersichtlich:

Grundidee	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**	**[6]**	**[7]**	**[8]**	**[9]**	**[10]**
Repräsentanz	●●	●●	●	●●●	●●	●●●	●●●	●●●	●●●	

Godfrey Harold Hardy (1877-1947), ein britischer Zahlentheoretiker, soll einmal gesagt haben: „An Archimedes wird man sich erinnern, wenn Aischylos vergessen ist – weil zwar Sprachen sterben, nicht aber die mathematischen Ideen.“



4. ACHILLES UND DIE SCHILDKRÖTE
Ein Lehrstück über geometrische Reihen und Grenzwerte für die 11. Klasse des Gymnasiums



4.1 Einleitung

Mit der Paradoxie „Achilles und die Schildkröte“ liegt ein wunderschönes Kernproblem vor, das Mathematiker wie Philosophen seit dem Altertum bis heute immer wieder intensiv beschäftigt hat. Der Umgang mit dem unendlich Vielen und dem unendlich Kleinen ist das zentrale Problem in der Mathematikentwicklung, das überall und immer wieder auftaucht. Poincaré soll einmal gesagt haben: Mathematik betreiben bedeute, Geschichten erzählen über das Unendliche. Diese Geschichten von Zenon gehören zu den schönsten und fruchtbarsten.

Zenons Geschichte von Achilles und der Schildkröte aus dem 5. vorchristlichen Jahrhundert ist uns dank Aristoteles überliefert. Hier liegt erstmals eine Auseinandersetzung mit dem Unendlichen und mit einem nicht abbrechenden Prozess genetisch echt vor uns. Sie bietet *einen* Zugang zum Verständnis von Grenzwerten, von Summen beliebig klein werdender Grössen am Beispiel der nicht abbrechenden geometrischen Reihe. Die Summe von unendlich vielen Gliedern einer Reihe wird manifest auf einer endlichen Strecke; das Unendliche im Endlichen wird denk- und greifbar. Diese infinitesimalen Prozesse können sowohl von geometrischer wie auch von rechnerischer Seite angepackt werden. Eine gelungene Verknüpfung der beiden Betrachtungsweisen führt zu einer grossen Bereicherung und Vertiefung des Verständnisses.

Wie in der Menschheitsgeschichte stellt Otto Toeplitz in seiner genetisch fundierten „Entwicklung der Infinitesimalrechnung I“ die Provokation von Zenon an den Anfang der Auseinandersetzung mit dem Infinitesimalen. Wir sind den unendlichen Prozessen bereits in der Annäherung an π bei Archimedes, bei den Primzahlen und bei der Irrationalität von Wurzel 2 begegnet. Hoffentlich wirken die damaligen Überlegungen nach. Jetzt legen wir konzentriert die Fundamente für Begriffe wie Konvergenz und Grenzwert, die uns hin zur Infinitesimalrechnung sowie zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und durch sie hindurch stets begleiten werden. Ohne diese beiden Wissenszweige sähe unsere heutige Welt ganz anders aus! Erstaunlich ist, dass diese herausfordernde Geschichte von Martin Wagenschein nie aufgenommen und für eine Unterrichtseinheit verwendet wurde.

Aristoteles: Physikvorlesung

Vier Bewegungstheoreme hat Zenon aufgestellt, die den Widerlegungsversuchen die grosse Mühe machen. Das erste Theorem wendet sich gegen eine Möglichkeit von Bewegung mit dem Argument, ein Gegenstand, der in Bewegung sollte sein können, müsste, bevor er an das Ende seiner Bahn kommen könnte, doch erst einmal an den Halbierungspunkt gelangt sein – ein Argument, auf das wir mit der erforderlichen Unterscheidung weiter oben bereits geantwortet haben. – Das zweite Theorem ist der sogenannte Achilleus; es lautet: Das Langsamste kann in seinem Lauf vom Schnellsten niemals eingeholt werden. Denn der Verfolger muss, bevor es zum Überholen kommen soll, erst einmal den Punkt erreicht haben, an dem der Verfolgte gestartet war (ein Verhältnis, das sich dauernd fortsetzt), so dass das Langsamere dauernd einen gewissen (wenn auch abnehmenden, so doch nie zu Null werdenden) Vorsprung behalten muss. Auch dieses Theorem ist im Grund wieder das (obige) Teilungstheorem, nur dass es sich hier nicht um fortlaufendes Halbieren der Strecke, die hier immer neu hinzukommt, handelt. Die These von der Nichteinholbarkeit des Langsameren gibt sich zwar als Resultat aus der angegebenen Begründung, kommt aber in Wahrheit aus derselben Quelle wie das Teilungstheorem – denn in beiden Fällen geht es um die angebliche Unerreichbarkeit des Wegzieles infolge einer Art Teilung der zu durchlaufenden Wegstrecke, nur kommt im zweiten Theorem noch als Besonderes die Steigerung hinzu, dass selbst das, was die Dichtung als Ausbund der Geschwindigkeit feiert, bei der Verfolgung des Langsamsten sein Ziel nicht zu erreichen vermag –; dementsprechend muss denn auch die Widerlegung bei beiden Theoremen in gleicher Weise erfolgen. Die Behauptung, was einen Vorsprung habe, werde nicht eingeholt, ist trügerisch. Solange freilich etwas einen Vorsprung hat, wird es gewiss nicht eingeholt; aber es wird sofort eingeholt werden können, wenn man nur zugibt, dass es möglich ist, eine endliche Strecke zu durchlaufen.

Aristoteles in Ernst Grumbach (Hrsg.): Physikvorlesung (1967, S. 173f)

Achilles und die Schildkröte

Von Zenon, dem Griechen, stammt die Geschichte über den Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte. Fair, wie man zu jener Zeit war, räumt Achilles dem offensichtlich unterlegenen Gegner einen bestimmten Vorsprung ein, sieht sich jedoch bereits kurz nach dem Start in ein auswegloses Problem verwickelt (nach Zenon): Wann immer Achilles den ursprünglichen Vorsprung der Schildkröte auch einholt, also an deren Startplatz anlangt: sie ist in der Zwischenzeit ein Stück weiter gekrochen. Und bis Achilles dieses durchläuft, hat die Schildkröte ebenfalls ein Stück Wegs geschafft. Gelangt Achilles dort an, so ist sie bereits wieder ein Stückchen weiter. Sicherlich läuft Achilles schneller als sein kriechender Gegner, und die Distanz zwischen beiden wird immer kleiner, aber es ist nicht zu übersehen, dass, wenn Achilles an irgendeinem Punkt der Rennstrecke ankommt, die Schildkröte inzwischen bereits dort gewesen sein muss.

Heinz Haber in „Das Mathematische Kabinett Folge 2“ (1974, S. 78)

Die Anfänge des infinitesimalen Denkens bei den Griechen

Es misst die erhabene Grösse eines Begriffs, wenn er den Zeitgenossen seiner Entstehung, wenn er denen, die ihm zuerst begegnen, als lächerlich erscheint. Die Paradoxien ZENOS geben uns das erste Signal von dem Auftauchen der Idee des unendlichen Prozesses aus einer Zeit, über deren geistiges Geschehen wir sonst nur dürftige Kunde haben. Zweifellos waren sie für ihren Autor nicht die Scherze, als die sie uns erzählt werden und als die die Form ihrer Einkleidung sie vielleicht darbietet. Schon ARISTOTELES streift in seinem Bericht, dem wir überhaupt im wesentlichen ihre Kenntnis verdanken, diese Aufmachung ab und formuliert so: „Ich vermag nicht von hier bis zur Wand zu gehen; denn dazu müsste ich zuerst die Hälfte dieser Distanz durchmessen, und dann vom Rest wieder die Hälfte, und von dem dann bleibenden Rest wieder die Hälfte, und mit diesem stets fortsetzbaren Prozess kann ich nie zu einem Ende gelangen." Es ist töricht zu meinen, ZENO hätte nicht gewusst, dass die Zeiten, die man zum Durchlaufen der sukzessiven Hälften gebraucht, ihrerseits auch immer kleiner werden. Er protestiert nur gegen den Abgrund des unendlichen Prozesses, an dem man beim Durchlaufen eines Kontinuums entlang schreitet, und er dokumentiert mit diesem Protest, den er mit jugendlicher Verve aufgeschrieben hat und den man fast gegen seinen Willen publiziert hat, dass zu jener Zeit man zuerst die Kühnheit besessen haben muss, solche Summationen von unendlich vielen immer kleiner werden Zeitteilchen, wie $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$ vorzunehmen. Es ist interessant, damit einen der paar Wortfetzen zu vergleichen, die uns von ANAXAGORAS, also ebenfalls aus dem fünften vorchristlichen Jahrhundert, überliefert sind: „Es gibt kein kleinstes unter den Kleinen und kein grösstes unter den Grossen, sondern immer noch ein kleineres und ein grösseres." Infolge einer einseitigen Gewöhnung erscheinen uns heute diese Worte trivial. Sie waren es gewiss nicht in einer Zeit, wo die Atomistik Problem war, nicht die Atomistik, an die wir leicht denken, bei der im Raume der Geometrie diskrete materielle Atome verteilt liegen, sondern eine Atomistik, die mit einer diskontinuierlichen Struktur des Raumes selbst rechnet, mit der Möglichkeit, dass man eine Strecke nicht ins Unbegrenzte unterteilen kann. Über die glatte Absage an diesen Atomismus, die in den Worten des ANAXAGORAS gelegen ist, geht die in den Zenonischen Paradoxien gelegene Kritik weit hinaus; sie wendet sich – so undurchsichtig uns vieles an dem gegenseitigen Verhältnis von Eleaten, Pythagoräern und anderen Philosophenschulen ist – unzweifelhaft gegen irgendwelche erste positive Gehversuche in einer neuen Mathematik, die Gesetze eines systematisch denkenden Verstandes an Stelle der nahe liegenden, aus einer naiveren Anschaulichkeit entspringenden Phantasie der Atomistiker zu setzen unternimmt.

Wir sehen den eben berührten Konflikt bei den sogenannten Pythagoräern in dem Augenblick ausbrechen, wo sie das „Irrationale" entdecken und damit denjenigen Tatbestand schaffen, der den Anlass zur Idee des unendlichen Prozesses gegeben hat und den auch bis heute noch wirksamen Untergrund dafür liefert.

Otto Toeplitz: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung I (S. 1f)

Für mich begann die erste Auseinandersetzung mit der Geschichte „Achilles und die Schildkröte“ in der ersten Berner Lehrkunstwerkstatt, in der ich Material dazu sammelte, mit der Absicht damit ein Lehrstück zur Differentialrechnung zu entwickeln. Plötzlich wurde ich aber von den geometrischen Körpern gepackt, und die Geschichte von Zenon geriet in den Hintergrund. Das spannende Thema nahm ich in meinem Urlaub in Marburg 2000/01 wieder auf und die Geschichte erlebte einen zweistündigen Unterrichtsversuch zusammen mit Beate Nölle. Es folgten die gedankliche Weiterentwicklung, zwei erste Gesamtinszenierungen 2001 sowie zwei weitere Inszenierungen 2003 in der Sekunda (11. Schuljahr) am Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld. Über die erste Inszenierung des Jahres 2003 werde ich im Folgenden berichten.

4.2 Struktur des Lehrstücks

Ouvertüre:

Mit einer Geschichte, welche die Menschheit schon bald 2500 Jahre beschäftigt, steigen wir in ein Lehrstück ein. Erstmals in der Menschheitsgeschichte wird dabei das „unendlich Kleine“ mit einem nicht abbrechenden Prozess thematisiert. Ohne diese Auseinandersetzungen in den verschiedensten Variationen wären die höhere Mathematik und damit unser heutiger technischer Stand undenkbar. Es folgen ein paar Erläuterungen über Zenon und Achilles, damit diese beiden Personen in den Köpfen bereits etwas Gestalt annehmen können.

I. Akt: Die unerhörte Geschichte von Zenon

Zenon tritt auf und konfrontiert mit der Geschichte „Achilles und die Schildkröte“. In Gruppen werden wortlose Darstellungen vorbereitet, welche die Kernaussage der Paradoxie möglichst treffend darstellen sollen. Es folgen die wortlosen Präsentationen. Wo finden wir das Zentrale der Geschichte besonders deutlich dargestellt? (Gespräch) Jeder zeichnet auf sein Blatt mit der Geschichte diejenige Darstellung, die er am treffendsten findet, und notiert sich ein paar Gedanken dazu.

II. Akt: Annäherung von Denken und Erfahrung

Wir versuchen, das was Zenon sagte, in Zahlen auszudrücken. Begriffe wie *Aufholvorgang, Annäherung, Rückstand* werden wichtig. Es folgt ein Experiment mit Gläsern: Was hat es uns zu sagen? Wir betrachten verschiedene konkrete Situationen: $v_S = 1/2 \cdot v_A$ und $v_S = 1/10 \cdot v_A$ und stellen die Rückstände und den von Achilles zurückgelegten Weg im Koordinatensystem dar. Was ist 1/9? Was sind 9/9?
Die unendlich vielen Aufholvorgänge rücken in eine endliche Zeit! Kann eine endliche Zeitspanne unendlich viele Teile haben? Philosophische und physikalische Fragestellungen werden aktuell.

III. Akt: Vom Konkreten zum Allgemeinen

Die erweiterte Vielfalt führt zur allgemeinen Erfassung: $v_S = q \cdot v_A$. Wir entwickeln die Formeln der abbrechenden und der nicht abbrechenden geometrischen Reihen und stellen das Gefundene in einen theoretischen Rahmen.

IV. Akt: Ausweitung und weitere Vertiefung der Problematik

Verschiedene Probleme lassen sich mit geometrischen Reihen bewältigen. Die Zenonsche Betrachtungsweise lässt sich vielfältig übertragen und liefert Resultate, die auch mit andern Ansätzen erhalten werden können.

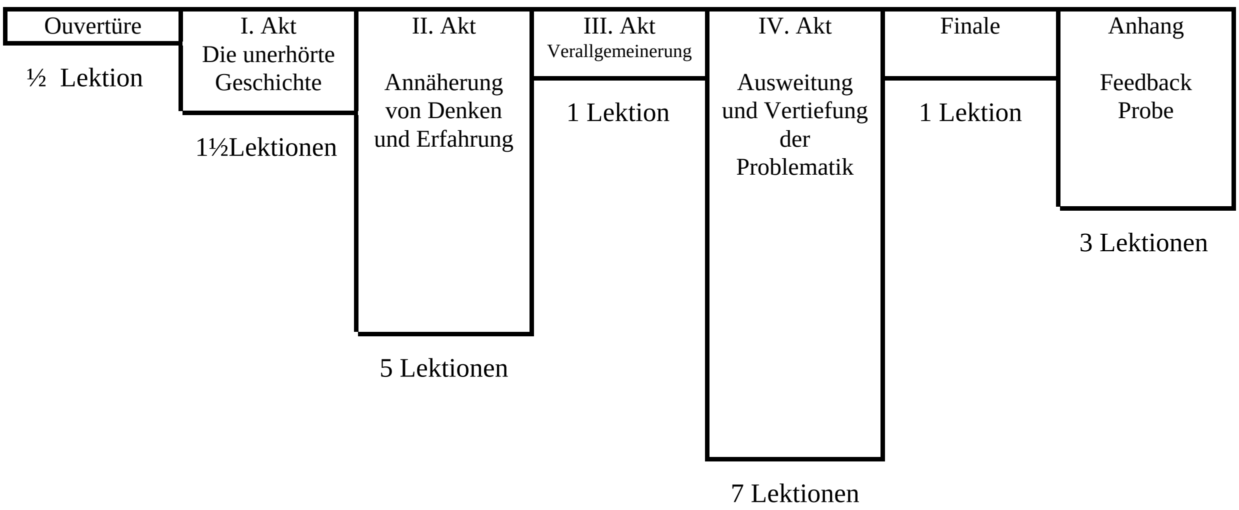
Finale: Wir betrachten nochmals die Geschichte, verfolgen den Lauf unserer Darstellungen, Gedanken und Argumente. Zur individuellen Standortbestimmung und da wir Zenon nicht persönlich antworten können, schreiben wir ihm Briefe.

4.3 Unterrichtsverlauf: 19 Lektionen in der Sekunda

Meine Klasse 3A steht unmittelbar am Anfang des 11. Schuljahres und hat noch zwei Jahre vor sich bis zur Matur. Zwar ist der Arbeitseinsatz der einzelnen Schülerinnen und Schüler nicht überaus gross, aber während der Stunden sind sie doch mehrheitlich interessiert und aktiv. Seit Beginn vor zwei Jahren haben wir ein gutes, ja freundschaftliches Verhältnis und ich arbeite gerne mit dieser Klasse. Sie ist sich schon einiges gewohnt von früheren Lehrstücken, das heisst, ich kann sicher sein, dass sie aktiv und konstruktiv mitwirken wird.

Im letzten Schuljahr haben wir uns unter anderem mit quadratischen Funktionen und Potenzrechnung befasst. Der Bereich Exponential- und Logarithmusfunktionen wurde noch nicht behandelt. Für gewisse Überlegungen wäre es vorteilhaft, dieses Wissen zur Verfügung zu haben, aber es ist keineswegs notwendig. Der Unendlichkeit in Form von unendlichen Prozessen sind die Schülerinnen und Schüler früher schon bei den Zahlmengen und Hilberts Hotel, bei den Primzahlen, bei der Irrationalität von Wurzel 2 und bei der Kreisberechnung von Archimedes begegnet.

Neu sind eine Schülerin und ein Schüler in der Klasse, die ich noch nicht kenne. Da lasse ich mich überraschen. Insgesamt sind es 11 Schüler und 6 Schülerinnen. Wir beginnen mit dem Lehrstück unmittelbar nach den Sommerferien, Mitte August 2003, und werden es nach 19 Lektionen mit einer Probe kurz vor den Herbstferien beenden. Es wird sich die folgende zeitliche Gliederung ergeben:

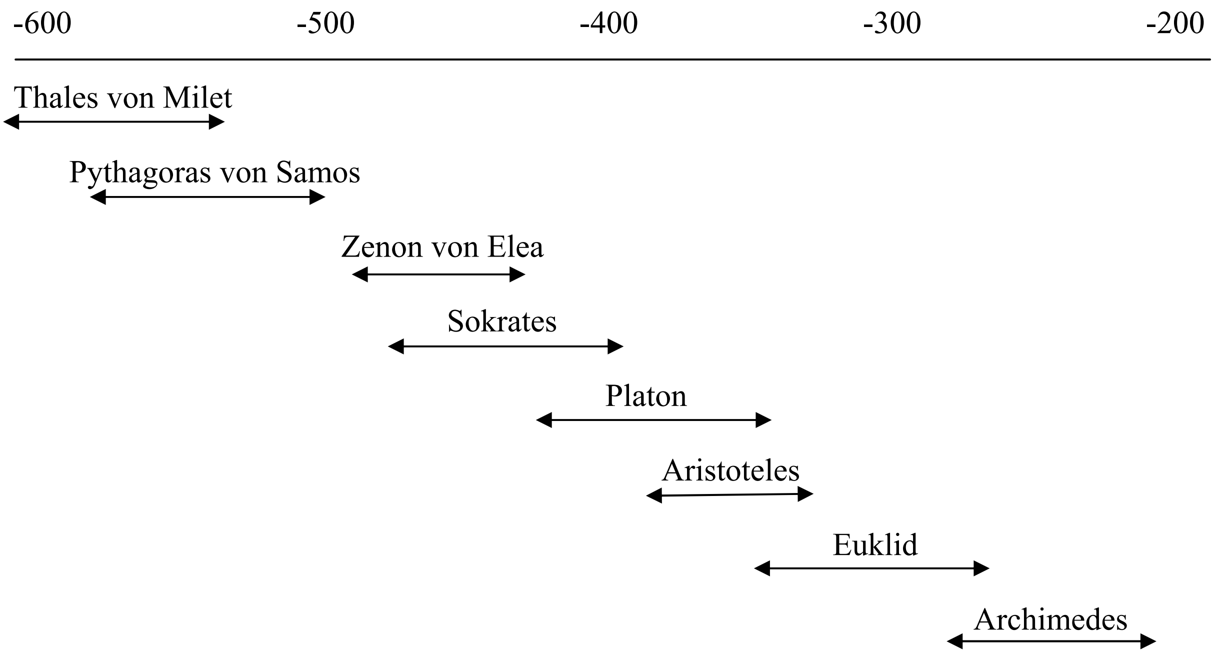


Lektionen 1/2

Ouvertüre:

Achtzehn Stühle sind im Halbkreis angeordnet. Vorn, das heisst im Zentrum des Kreises, steht einsam eine Säule. Ausserhalb des Halbkreises stehen Tischgruppen, an denen später gearbeitet werden kann. Schon beim Hereinkommen reagieren einige Schülerinnen und Schüler auf Stuhlanordnung und Säule. „Machen wir nochmals die Primzahlen?“ – „Kommt wieder ein Besuch?“ Ich begrüsse zum neuen Semester, zur zweiten Halbzeit an unserem vierjährigen Gymnasium. Mit Blick auf die Säule verweise ich bereits auf einen kommenden Besuch. Vorerst beziehe ich mich allerdings mit einigen Bemerkungen auf die vor den Ferien erhaltenen Rückmeldungen zum letzten Semester und versichere, dass ich weiterhin versuchen werde, eine sinnvolle und abwechslungsreiche Mischung von Unterrichtsmethoden anzubieten.

„Um unseren heutigen Gast besser zu verstehen, versetzen wir uns nach Griechenland, in eine Säulenhalle von Athen in eine Zeit um 450 vor Christus.“ Da zwei Schüler spontan nach hinten blicken, verweise ich auf das seit langem dort hängende Raffael-Bild „Schule von Athen“. Im Zentrum befinden sich Platon, der nach oben in das Reich der reinen Ideen zeigt, und Aristoteles, der sich mehr der Erde zuwendet. „Dies ist ein Treffpunkt, wo regelmässig bedeutende griechische Denker unter sich und mit dem interessierten Volk diskutieren. Bei ihnen befindet sich der weit herum bekannte, enthaltsam lebende und pflichtbewusste, 490 vor Christus in Elea bei Neapel geborene Zenon.“ Um ihn zeitlich einzuordnen, tragen wir einige der aus dem Geschichts- und früheren Mathematikunterricht bekannten Namen zusammen und ordnen sie.



„Zenon von Elea hat verschiedene Geschichten ausgedacht, um auf widersprüchliche Zusammenhänge aufmerksam zu machen und zum genaueren Hinsehen und Nachdenken herauszufordern. Die heutige Geschichte hat fast zweieinhalb Jahrtausende lang die verschiedensten Leute immer wieder zum Denken angeregt. Sie hat der Mathematik und der Philosophie wichtige Impulse geliefert und so wesentlich zur Entwicklung der sogenannten Infinitesimalrechnung beigetragen. Ohne diese sähe unsere heutige Welt ganz anders aus.“ Damit weise ich bewusst vorwärts auf Gewicht und Bedeutung der bevorstehenden Geschichte. Der neu zur Klasse gestossene Schüler Jason wirft spontan ein, das „infinite“ hätte doch sicher etwas mit „unendlich“ zu tun. Ich bekräftige, dass die Grundlage der Infinitesimalrechnung der Umgang mit sehr kleinen oder eben unendlich kleinen Grössen sei, die in unendlichen Prozessen entstünden, wie wir sie ja auch schon bei der Kreisannäherung von Archimedes oder beim Heronschen Verfahren zur Bestimmung von Wurzel 2 kennen gelernt hätten. Erstmals in der Menschheitsgeschichte seien aber diesbezügliche Gedankengänge bei Zenon von Elea in seinen Geschichten verbürgt. „In der Geschichte begegnen wir Achilles, dem Sohn des Königs Peleus und der Meeresgöttin Thetis.“ An dieser Stelle will ich einiges über Achilles und seine Ferse erzählen, aber ich höre Nadine, wie sie das Stichwort „Achillessehne“ zur Nachbarin flüstert. Dieses greife ich auf und gemeinsam entsteht ein Bild von Achilles und seiner Zeit: Seine Mutter wollte ihn durch ein Bad im Fluss der Unterwelt

Styx unsterblich machen; an den Fersen blieb er aber verwundbar. Noch heute sprechen wir von der Achillesferse, wenn wir eine schwache, verwundbare Stelle meinen. Dieser Achilles wirkte als hervorragender Kämpfer bei Troja und galt als schnellster Sprinter aller Zeiten. Insbesondere Philippe, ein sehr an Geschichte interessierter Schüler, ergänzt in Kürze die wesentlichen Ursachen und Umstände der Kriege um Troja. Ich staune über sein Wissen. Die Klasse ist sich dies von ihm gewöhnt.

Damit nicht sofort nach der Geschichte eine heftige Diskussion einsetzen wird, kündige ich jetzt schon an: „Nach dem Auftritt von Zenon wollen wir noch nicht über die vorgetragene Geschichte diskutieren, sondern uns vorerst anders mit ihr auseinandersetzen.“

I. Akt: Die unerhörte Geschichte von Zenon

Nachdem jetzt etwa 20 Minuten verstrichen sind, stehe ich auf, wende mich kurz ab, ziehe ein weisses Hemd über und trete als Zenon an die Säule mit einer kleinen Schildkröte aus Stoff in der Hand. Die Geschichte erzähle ich frei nach der Darstellung in „Das Mathematische Kabinett. Folge 2“ (Hrsg. Heinz Haber, dtv 1974):

„Meine lieben Athenerinnen und Athener. Es freut mich sehr, dass ihr nach den Ferien zur Fortsetzung wiederum so zahlreich, ja noch zahlreicher als bisher, erschienen seid. Und ich hoffe, euch auch heute nicht zu enttäuschen. – Seid ihr euch bewusst, dass Achilles, unser grosser Held vor Troja und schnellster Sprinter aller Zeiten, eine Schildkröte im Wettlauf nicht einholen kann? Fair wie er ist, räumt Achilles dem vermeintlich unterlegenen Gegner einen bestimmten Vorsprung ein, sieht sich jedoch bereits kurz nach dem Start in ein auswegloses Problem verwickelt. Wann immer Achilles den ursprünglichen Vorsprung der Schildkröte auch einholt, also an deren Startplatz anlangt – sie ist in der Zwischenzeit ein Stück weiter gekrochen. Und bis Achilles dieses durchläuft, hat die Schildkröte ebenfalls wieder ein Stück Wegs geschafft. Gelangt Achilles dort an, so ist sie bereits wieder ein Stückchen weiter. Sicherlich läuft Achilles schneller als sein kriechender Gegner, und die Distanz zwischen beiden wird immer kleiner, aber es ist nicht zu übersehen, dass, wenn Achilles an irgendeinem Punkt der Rennstrecke ankommt, die Schildkröte inzwischen bereits dort gewesen sein muss. Somit wird klar, dass Achilles die Schildkröte nie einholen, geschweige denn überholen wird.“

„Ich sehe ungläubige Gesichter, Kopfschütteln und höre ein Raunen. Lasst mich doch meine Geschichte wiederholen.“ Noch gewichtiger beginne ich von Neuem: „Wahrlich, ich sage euch: Achilles, unser grosser Held vor Troja und schnellster Sprinter aller Zeiten, wird eine Schildkröte im Wettlauf nicht einholen können . . .“ – Nach längerem Blick ins Halbrund bewegt sich Zenon langsam von der Säule weg, zieht sein Hemd aus und ich setze mich wieder an den Rand des Halbkreises. Solange es ruhig ist, lasse ich die Geschichte nachwirken.

Um sich wirklich mit der Aussage von Zenon zu befassen und noch etwas tiefer in den Widerspruch zwischen Alltagserfahrung und Verstand einzutauchen, ist es mir an dieser Stelle sehr wichtig, die offene Diskussion nicht gleich losbrechen zu lassen. Deshalb ergreife ich die Initiative: „Seht ihr Möglichkeiten, den Inhalt dieser Geschichte möglichst im Sinne von Zenon, aber *ohne Worte* darzustellen, zu veranschaulichen?“ Manuela schlägt vor, das Ganze mit Bildern darzustellen. Philippe erwähnt ein Weg-Zeit-Diagramm. Ich notiere die vorhandenen Vorschläge je auf einen Papierstreifen, lege sie in die Runde und ergänze durch eine Reihe weiterer Möglichkeiten:

Weg-Zeit-Diagramm	Bilderfolge	Graphik	Parallelgeschichte
Mittels zweier Figuren	Theatersequenz	Tonfolge singen	Gitarre

Maximal vier Schülerinnen oder Schüler sollen sich um ein Thema gruppieren. Notfalls arbeiten zwei Gruppen mit der gleichen Darstellungsart. Der Wahlprozess verläuft heute sehr schleppend. Schliesslich entstehen doch nur vier Gruppen mit den Methoden „Bilderfolge“, „Weg-Zeit-Diagramm“, „Theatersequenz“, „Mittels zweier Figuren“. Für die Vorbereitung der Präsentation stehen 20 bis 30 Min. zur Verfügung. Das Ziel wird von mir mehrmals klar betont: Wortlos soll möglichst deutlich dargestellt werden, was Zenon mit dieser Geschichte ausdrücken will. Jede Gruppe erhält den Text schriftlich, um ihn nochmals lesen zu können und sich daran zu orientieren. Material steht zur Verfügung. Bilderfolgen, graphische Darstellungen usw. erbitte ich auf Packpapier. Dies erlaubt mir, die entsprechenden Darstellungen auch später sofort wieder aufhängen und darauf Bezug nehmen zu können. Es folgen noch Fragen wie: „Geht der Wettlauf geradeaus oder im Kreis?“ – Ich antworte: „Es gibt Rennen auf Rundbahnen und es gibt Streckenläufe, wie den Marathonlauf.“ – Und wieder kann uns Philippe informieren, diesmal über den Lauf von Marathon. Ich bin beeindruckt.

In den vier Gruppen wird jetzt die Präsentation vorbereitet. Ein gutes Zeichen ist, dass die Diskussion losgeht, zum Teil sehr intensiv. Zwei der Gruppen arbeiten und diskutieren weit in die Pause hinein. Simon ist recht verwirrt und fragt mich: „Das geht doch nur, wenn Achilles langsamer wird?“ Im Text steht aber nichts davon! Die Damengruppe mit der Bildersequenz sucht noch nach einem Begriff. „Wie heisst das, wenn sich zwei Kurven beliebig nahe kommen?“ – „Asymptote?“ Sie sehen offenbar schon klar dieses asymptotische Verhalten. Da in den Gruppen viele kontroverse Gespräche laufen und ein intensiver Prozess in Gang kommt, braucht die Vorbereitung der Präsentation viel Zeit. Eine fruchtbare Zeit! Nach einem Drittel der zweiten Lektion sind dann alle vier Gruppen bereit für die Präsentation.

Die Bilderfolge wird an der Tafel aufgehängt und wortlos eine Weile betrachtet. Sie zeigt sehr schön die einzelnen Aufholvorgänge der beiden, wie sich Achilles von hinten immer mehr nähert. Interessant ist die einfache Sonnenuhr, welche den Ablauf der Zeit anzeigt. Dann folgt daneben ein Weg-Zeit-Diagramm, das zum Glück eher zu einer Darstellung der verschiedenen Stadien geworden ist und nicht verständlich wird. Im langen Gang draussen verfolgen wir die Theaterszene, gespielt durch Betime und Jan. Erst durch Intervention der andern Schüler wird nach jedem Aufholvorgang ein Stopp eingeschaltet. Das Klatschen eines Schülers automatisiert dann den Ablauf. Wir hören, dass das Klatschen in immer kürzeren Abständen erfolgt. Jede bewegte Darstellung wird mindestens zwei- bis dreimal langsam wiederholt, auch rückwärts. Mit „Sprung und Stopp“, „Sprung und Stopp“ lassen sich die einzelnen Sequenzen, die Aufholvorgänge, deutlich voneinander abgrenzen. Einwand von Simon: „Man darf nicht anhalten, unterbrechen, die beiden bewegen sich ununterbrochen durch, und dann holt Achilles die Schildkröte ein.“ Meine Rückfrage: „Aber wie machen wir dann das Anliegen von Zeno deutlich? Könnten wir am Ende jedes Aufholvorgangs ein Bild, ein Foto machen und die beiden Läufer nicht behelligen?“ Bei der Darstellung mittels zweier Kartonfiguren an der Tafel beginnen wir am Ende jedes Aufholvorgangs auf den Tisch zu klopfen. Wann hören wir den letzten Klopfer? Eigentlich gibt es ihn nicht! Wir haben den Konflikt klar. Ich formuliere es so: „Zenon ist natürlich nicht dumm, und er weiss genau, dass in Wirklichkeit Achilles die Schildkröte überholt. Aber er ist provokant und bringt einen Konflikt auf den Punkt. Die Augen und die Erfahrung sagen ‚Ja, Achilles überholt’, der Verstand sagt ‚Nein, Achilles bleibt immer hinten’.“ Mit der Zuspitzung dieser Verwirrung entlasse ich für heute die Klasse. Dies ist das Ende der ersten Doppelstunde!!!

II. Akt: Annäherung von Denken und Erfahrung

An der Tafel hängt die Bildsequenz vom vergangenen Mittwoch und in der Mitte der Text mit der Geschichte von „Achilles und die Schildkröte“. Darunter habe ich eine Rennstrecke und unsere beiden Akteure in den Startpositionen gezeichnet. So haben wir die Geschichte fürs erste vor Augen. Marcel und Michel bitte ich nach vorn, um uns nochmals vorzuspielen, was Zenon uns erzählt hat. Mit „Sprung und Stopp“, „Sprung und Stopp“, . . . können wir die verschiedenen Aufholvorgänge klar vergegenwärtigen. Natürlich wird die Kritik wieder laut, die beiden würden ja nicht stoppen unterwegs. Ich bitte um kontinuierlichen Lauf und Jan soll immer dann klatschen, wenn es vom einen Aufholvorgang zum nächsten geht. Wir hören gut, wie sich diese Klatscher immer rascher folgen, eigentlich ohne Ende! Und so stehen wir jetzt also wieder mitten in unserem Widerstreit von Verstand und Erfahrung. „Gibt es einen Weg, ein Vorgehen, wie wir diesen Widerstreit bearbeiten könnten? Simon, beharrlich wie er ist, insistiert wie letztes Mal: „Es geht nur, wenn Achilles immer langsamer wird. Sonst überholt er.“ Ich insistiere ebenfalls: „Zenon sagt nichts von einer Ermüdung von Achilles, er ist ein Superathlet. Beide Kontrahenten bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit.“ Achim meint, wir könnten die Sache graphisch lösen und versucht es an der Tafel mit linearen Funktionen, wie wir sie vor bald zwei Jahren behandelt haben. Zum Glück gelingt ihm die Darstellung nicht auf Anhieb.

Ich lasse die Klasse Dreiergruppen bilden mit der Aufgabe, graphisch oder zahlenmässig der Sache auf den Grund zu gehen und die Überlegungen auf einem A3-Blatt festzuhalten. So soll eine Vielfalt von Vorschlägen zustande kommen, die konstruktiv weiterführen kann. Aus den Kleingruppen kann ich einiges aufschnappen. Ramona meint, mit einem Weg-Zeit-Diagramm könne das nicht gehen, denn da sehe man ja, dass Achilles überholt. Nadine zeichnet eine Funktion, die asymptotisch gegen die x-Achse abnimmt. Diese beiden Gruppen vereinigen sich und es entsteht eine Graphik, die eben beide Ansätze in sich zu vereinen sucht. Simon zeichnet mehrere Diagramme, weil er nicht alles zusammenbringt. Philippe, Roman und Jason zeichnen ein Weg-Zeit-Diagramm. Auf meine Nachfrage hin, wo da Zenon mit den Aufholvorgängen Platz hätte, zeichnen sie ganz sanft, aber absolut korrekt einige Aufholstufen ein. Da ist schon mal ein wichtiger Erkenntnisschritt im Ansatz vorhanden. Auf einem andern Blatt finden wir nebst einer graphischen Darstellung eine Zahlenfolge 1 , 1/2 , 1/4 , 1/8 , 1/16, usw.. Auch hier steckt ein fruchtbarer Ansatz und ich denke bereits an meine kommende Präsentation der Gläser. Die beendeten Darstellungen werden an die Tafel gehängt.

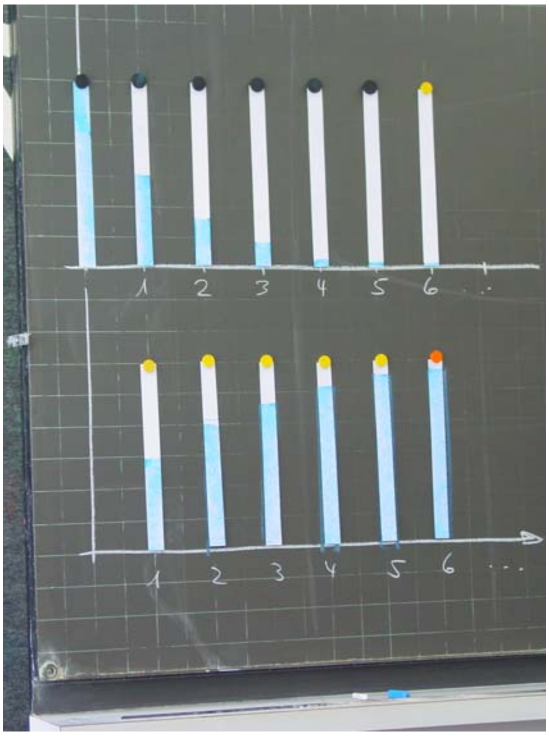
Kurz vor Schluss der Stunde trete ich nochmals im weissen Hemd als Zenon auf und verkünde: „Meine lieben Athenerinnen und Athener: Seid ihr euch bewusst, dass ihr diesen Raum niemals wieder verlassen könnt? Bevor ihr die Türe erreicht, müsst ihr nämlich in der Hälfte der Distanz zur Türe ankommen. Dort angelangt, müsst ihr zuerst die Hälfte der verbleibenden Strecke zurücklegen und von dort müsst ihr wieder erst in die Mitte des restlichen Stückes schreiten usw. Und so wird euch doch wohl allen klar, dass ihr diesen Raum nie und nimmer werdet verlassen können.“ – Stille! – Es läutet, wir räumen noch auf und ich sammle die Blätter. Damit ist eine weitere der Paradoxien von Zenon in einem günstigen Moment präsentiert. Aristoteles, dem wir überhaupt im Wesentlichen die Kenntnis der Aporie verdanken, formuliert (nach Toeplitz, S. 1f) so: „Ich vermag nicht von hier bis zur Wand zu gehen; denn dazu müsste ich zuerst die Hälfte dieser Distanz durchmessen, und dann vom Rest wieder die Hälfte, und von dem dann bleibenden Rest wieder die Hälfte, und mit diesem stets fortsetzbaren Prozess kann ich nie zu einem Ende gelangen.“

Die Stühle habe ich wieder im Halbrund angeordnet. An der Tafel hängen der Text der Geschichte, die Bilderfolge und die A3-Blätter mit den graphischen Darstellungen der Schülergruppen aus der letzten Lektion. Auf einer Tischreihe vor der Tafel stehen zehn gleiche zylinderförmige Gläser nebeneinander. Die ersten zwei voll Flüssigkeit (mit Kaliumpermanganat gefärbtes Wasser). Schon vor Stundenbeginn fragt mich Kim, wo denn bei Zenons Überlegungen der Fehler stecke. Ich vertröste sie auf die heutigen beiden Lektionen. Ein Zeichen, dass sich die Geschichte und der Konflikt beim einen oder der andern im Kopf eingenistet haben.

Zu Beginn der Stunde verweise ich nochmals auf unseren Wettlauf von Achilles mit der Schildkröte, zeige auf die vorliegenden graphischen Darstellungen der letzten Lektion und rufe den Konflikt in Erinnerung: „Zenon behauptet mit seiner Geschichte, dass Achilles die Schildkröte im Wettlauf nie einholen wird, was aber unserer Erfahrung völlig widerspricht. Heute wollen wir der Sache tiefer auf den Grund gehen und schauen, ob es uns gelingt, mehr Klarheit zu gewinnen. Vorerst gibt es zum Thema ein Experiment mit den Gläsern."

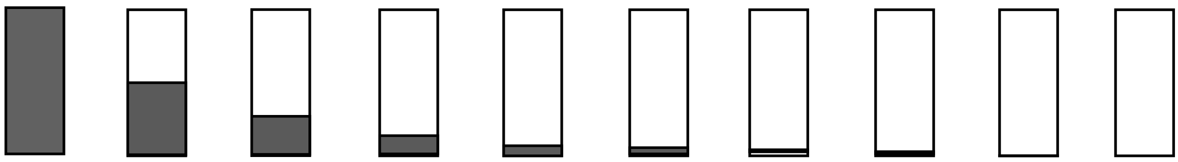
Ich stehe hinter der Gläserreihe und nehme das zweite volle Glas. Bedächtig und wortlos giesse ich die Hälfte der Flüssigkeit ins dritte Glas, die Hälfte des dritten ins vierte, usw. Bei einigen Halbierungsvorgängen muss ich hin- und herschütten, bis es stimmt. Die Schülerinnen und Schüler geben Anweisungen: „Zu viel!" – „Zu wenig!", bis wir mit den Halbierungen zufrieden sind. Betime übernimmt drei der Halbierungsvorgänge. Nach acht Halbierungen deute ich mit einer Geste an, dass dieser Vorgang jetzt beliebig weiter ginge, beliebig weiter, es gibt kein letztes Glas. Wir betrachten das Bild der abnehmenden Flüssigkeitsinhalte einen Moment und Nadine bemerkt bestätigt: „Das ist ja asymptotisch, wie wir es gezeichnet haben." Den Umschüttvorgang mache ich Glas für Glas rückgängig, bis wieder zwei gleich volle Gläser nebeneinander stehen. Achim erwähnt, dass jedes Glas gleich viel Flüssigkeit beinhaltet, wie alle folgenden Gläser zusammen. Etwas schneller wiederhole ich den Halbierungsvorgang! An der Tafel halten wir das Bild mit gefärbten Papierstreifen in gleichen Abständen fest. Jetzt nehme ich das zweite Glas und bewege es schrittweise nach rechts. Dabei giesse ich den Inhalt des nächsten Glases hinzu und stelle es vor das geleerte Glas. Es füllt sich von der Hälfte zu drei Vierteln, zu sieben Achteln, … und der Inhalt nähert sich immer mehr dem vollen Glas. Die einzelnen Stadien halten wir an der Tafel ebenfalls mit Papierstreifen fest.

Kim konzentriert sich auf die erste Darstellung und bemerkt: „Das ist ja dasselbe wie bei Achilles. Die Abstände werden immer kleiner.“ Weiter geht aber im Moment die Übertragung auf unser ursprüngliches Problem noch nicht. Deshalb bitte ich die Schülerinnen und Schüler in den verbleibenden 15 Minuten das, was wir eben gemacht haben, auf einem vorbereiteten Arbeitsblatt festzuhalten und zahlenmässig weiterzuführen. Dann sollen sie sich miteinander überlegen, was dieses Gläserbeispiel mit Achilles und der Schildkröte zu tun hat.



Die Folgen werden zügig notiert, da und dort entsteht bereits eine Verallgemeinerung. Diejenigen, die fertig sind, muss ich allerdings nochmals bitten, sich doch zu überlegen und allenfalls graphisch darzustellen, was das mit unserem ursprünglichen Problem zu tun hat. Simon beginnt zu zeichnen und zeichnet noch weit in die Pause hinein. Er ist drauf und dran, die Darstellung mit den Geraden und mit den Säulen zu vereinen. „Ein nützlicher Ansatzpunkt für die Fortsetzung“, denke ich.

Zu Beginn der zweiten Lektion von heute stellen wir unsere Zahlen zusammen:



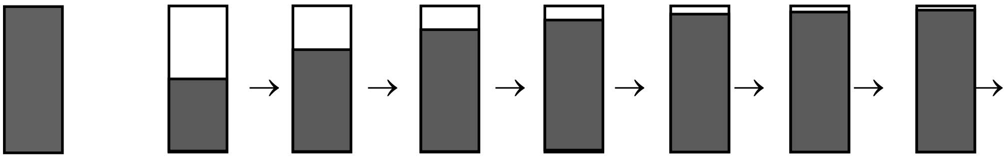
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(a_n)	1/2	1/4	1/8	1/16	1/ 32	1/64	1/128	1/256	. . .

Als allgemeine Formel für den Inhalt wird vorgeschlagen: $a_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (∗)

Die Funktion $y = (1/2)^n$, falls schon behandelt, wäre sofort sichtbar.

Manuela und Nadine haben herausgefunden $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$, das heisst, jedes Glied ist halb so gross wie das vorhergehende. Erst in der Diskussion wird ihnen klar, dass dies zur vollständigen Beschreibung der Folge noch nicht genügt, dass wir noch die Angabe eines Gliedes benötigen, also zum Beispiel $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$ und $a_1 = \frac{1}{2}$.(∗∗) Damit haben sich bereits die explizite (∗) und die rekursive (∗∗) Definition einer Folge ergeben.

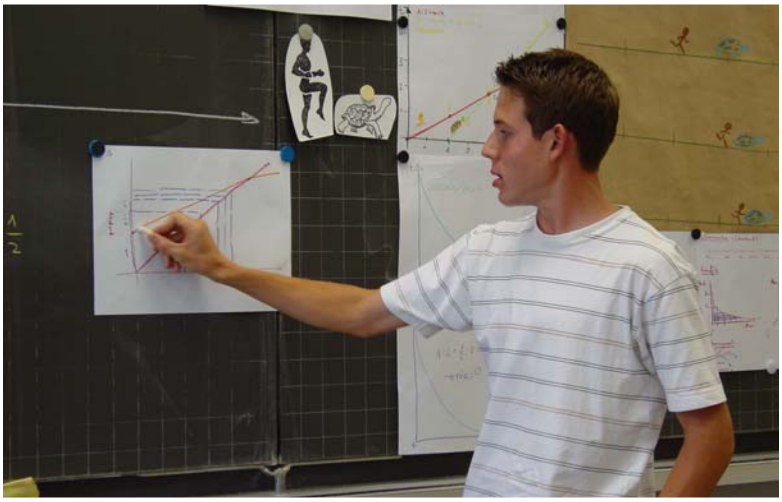
Die Flüssigkeit wird gesammelt:



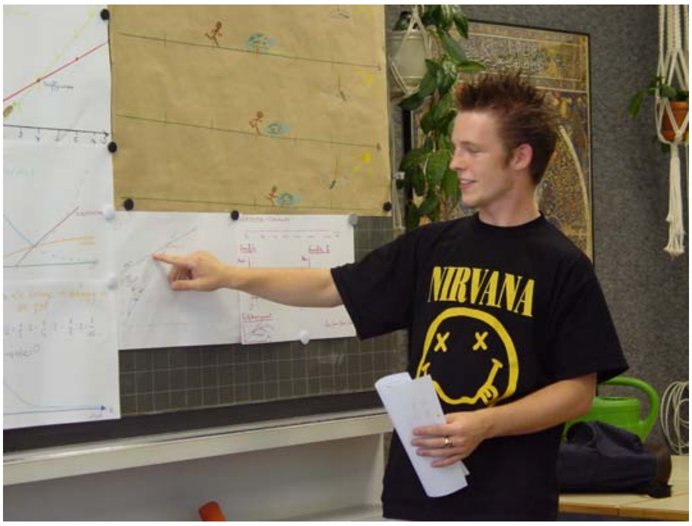
	1	2	3	4	5	6	7	
Folge (s_n)	1/2	3/4	7/8	15/16	31/ 32	63/64	127/128	. . .

Achim bringt die Formel $s_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ und begründet, dass eben zum Inhalt 1 immer noch der Inhalt von $a_n = \frac{1}{2^n}$ fehlt, damit es ganz voll ist. Und es fehlt eben von Mal zu Mal weniger. Die erste Schreibweise der Formel entsteht aus der Beobachtung, dass der Zähler immer um eins kleiner ist als der Nenner.

Was hilft uns das eben Analysierte für das Achillesproblem? Die Abstände nehmen in unendlicher Folge ab, aber ein Rückstand bleibt erhalten. Ramona: „Die Kurven rechts und die Darstellung links stimmen überein. Der Graph nähert sich asymptotisch der horizontalen Achse. Achilles wird die Schildkröte nie einholen.“ Ich entgegne: „Was die fallenden Graphen anbetrifft, stimmt dies offensichtlich. Anderseits habt ihr Geraden gezeichnet, die sich schneiden und behauptet, dass Achilles die Schildkröte überholt. Wie ist dies zu vereinbaren?“ Michael: „Wir haben zwei Geraden mit verschiedenen Steigungen, aber sie dürfen sich nicht schneiden oder erst im Unendlichen, sonst würde Achilles die Schildkröte ja einholen.“ Wie viel Verzweiflung oder Verwirrung muss vorhanden sein, dass jetzt sogar das „Nichtschneiden“ von zwei Geraden mit verschiedenen Richtungen gefordert wird? Die Überzeugung, dass Achilles die Schildkröte nie und nimmer einholen wird, hat offenbar stark um sich gegriffen. Das Gläserbeispiel hat Zenon unterstützt. Ich gebe etwas Gegensteuer: „Aber auf den Blättern schneiden sich eure Geraden sehr wohl im Endlichen!“ Der Konflikt ist noch grösser als zuvor.



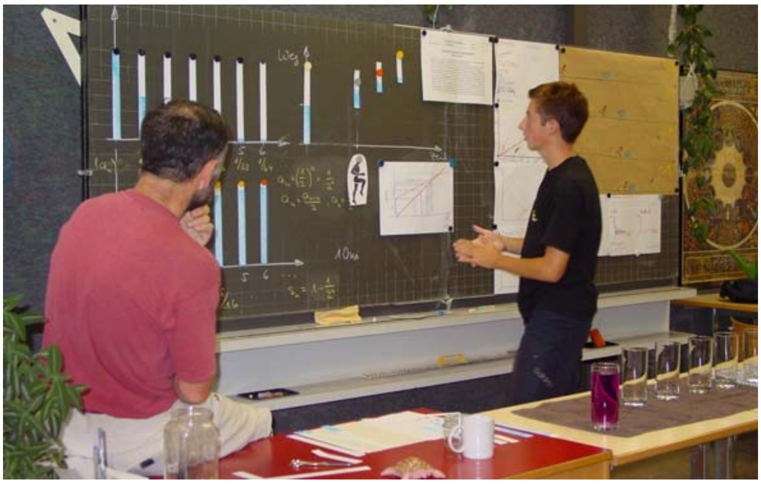
Ich bitte Simon, seine Zeichnung vorzustellen. Sehr unsicher wie seine Darstellung eben noch ist, erläutert er. Horizontal ist die Zeit, vertikal die Distanz vermerkt. Die Abstände werden vertikal summiert:
1 + 1/2 + 1/4 + …
„Es könnten auch am Anfang 10 Meter sein. Man sieht, dass sich der Abstand von Aufholvorgang zu Aufholvorgang halbiert. Und das geht nicht über 20 Meter.“ Gut sichtbar ist, dass dasselbe auch mit der Zeit passiert, aber bislang bemerkt dies niemand so richtig, auch Simon nicht. Aus der Klasse folgen leider keine Reaktionen auf Simons Erläuterungen. Hier hätte ich natürlich mit einer Frage die Zeit ins Zentrum rücken können. Ich entscheide mich aber dazu, bei Philippe nachzufragen. Er hat das



letzte Mal zusammen mit Marcel und Roman in seiner Darstellung die Aufholvorgänge sauber und exakt, aber noch zögerlich fein eingetragen. Leider können aber weder er noch seine Kollegen im Moment mehr dazu sagen. So rege ich an, die Aufholvorgänge an der Tafel ähnlich den Gläserdarstellungen festzuhalten. Ich zeichne das Koordinatenkreuz und beginne mit dem ersten Papierstreifen. Es folgen Jan, Michel, Roman, Kim, Dominik, Achim. Die seitlichen Abstände werden allerdings viel zu gross gehalten. Erst auf meine ausladende Geste hin und die Frage, wie weit hinaus das wohl gehe, interveniert Simon. Er kommt an die Tafel, rückt die Säulen näher zusammen, zeichnet seine zwei sich schneidenden Geraden und behauptet, die Zeiten würden eben auch immer kürzer. Für den ersten Aufholvorgang schlägt er 5 Sekunden vor, wohl gemäss den 5 Häuschen, die dafür an der Tafel eingeräumt sind, und schliesst daraus, dass der ganze Vorgang dann keine 9 Sekunden dauern würde. „Langsam kommen wir der Sache näher“, so denke ich.

Ich übernehme Simons Angaben für eine Tabelle:

Wegstrecke	10 m	5 m	2.5 m	1.25 m	0.625 m	0.3125 m	
Zeit	5 s	2.5 s	1.25 s	0.625 s	0.3125 s	0.15625 s	



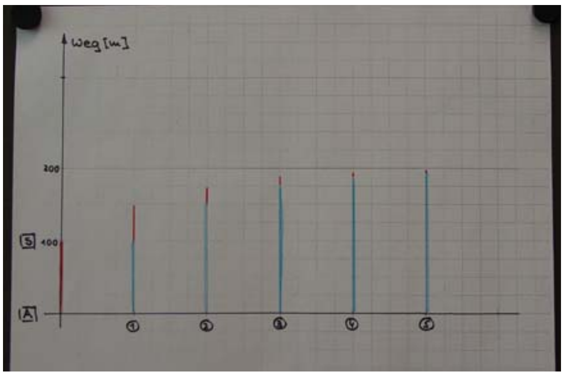
Manuela füllt die Tabelle aus, kann aber nichts dazu sagen. Michel, der in der Zwischenzeit eher unkonzentriert war, meldet sich zurück: „Das dauert nicht etwa 9 Sekunden, sondern etwas weniger als 10 Sekunden, denn 5s + 2.5s + 1.25s + 0.625s + ... , das ist ja wie mit den Gläsern!“

Meine Frage: „Und was bedeutet das jetzt?“ Da keine Antwort folgt, erinnere ich mich an eine bereits erlebte Übung. Ich kündige an, dass ich Achilles langsam auf der Zeitachse bewegen werde und bitte Tanja, am Ende jedes Aufholvorgangs zu klatschen. Ganz langsam bewegt sich Achilles, ein Klatscher ist hörbar, ein zweiter folgt, wieder einer und immer dichter. Die ganze Klasse klatscht mit; sie klatschen aber immer noch, auch nachdem Achilles die Zehnsekundenmarke überschritten hat. In der Wiederholung hört das Klatschen dann wirklich abrupt auf. Achim: „Die Abstände zwischen den Klatschern werden immer kleiner.“ Philippe: „Da muss so oft geklatscht werden, dass dies als Dauerton wahrnehmbar ist.“

Ich will es noch anders formulieren: „In diesen 10 Sekunden müssen sie alle stattfinden, diese unendlich vielen Klatscher, diese unendlich vielen Aufholvorgänge. Je näher beim Ende, desto dichter. Wir können sie im Einzelnen nicht zu Ende klatschen, aber auch nicht zu Ende denken. Mit unseren unendlich vielen Klatschern nähern wir uns beliebig nahe an die 10 Sekunden; mit den unendlich vielen Aufholvorgängen eilt Achilles beliebig nahe an die 20-Meter-Marke. Und die Schildkröte ist immer noch ein ganz klein bisschen voraus! Aber diese unendlich vielen gedachten Aufholvorgänge brauchen nur eine endliche Zeit und vollziehen sich auf einer endlichen Strecke. Offenbar können wir auf einer endlichen Strecke unendlich viele Teilstrecken durchlaufen und dies sogar in einer endlichen Zeit! Dies beruht auf der Annahme, dass wir Raum und Zeit unbegrenzt unterteilen können. Viele der heutigen Physiker sind der Ansicht, dass diese beliebige Unterteilung von Raum und Zeit gar nicht möglich ist, dass es extrem kleine Raum- und Zeiteinheiten gibt, die nicht weiter unterteilbar sind. Wenn wir unser Gläserexperiment mit der Flüssigkeit fortsetzen, so werden wir physikalisch an Grenzen stossen, spätestens bei der Halbierung von Molekülen und Atomen.“ Zum Schluss der Stunde bitte ich die Schülerinnen und Schüler, das Ganze zu Hause nochmals gut zu überdenken!

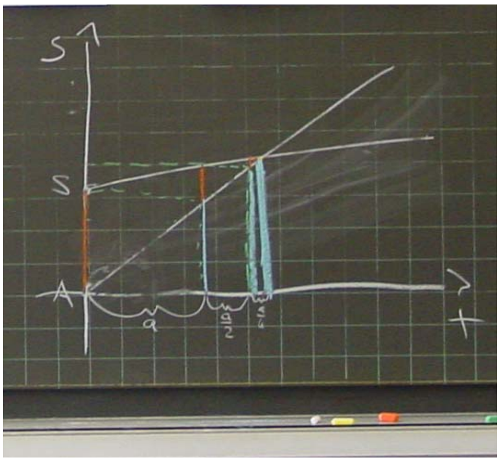
Lektion 6

An der Tafel sind ganz links die Bilderfolgendarstellung und weit rechts eine graphische Darstellung aus der 3. Lektion aufgehängt. Neben die Bilderfolge hänge ich eine Säulendarstellung mit den Aufholvorgängen, wie wir sie das letzte Mal an der Tafel hatten. Heute möchte ich diesen Zusammenhang von links bis rechts, von der Zenongeschichte mit den Aufholvorgängen bis zur Darstellung mit zwei Geraden nochmals ins Bewusstsein rufen und dann verallgemeinern. Nach der Ankündigung dieses Inhaltes frage ich nach der zentralen Aussage der letzten Stunde. Nadine meint: „Es gibt unendlich viele Aufholvorgänge.“ Sonst kommt weiter



nichts. Ich bin enttäuscht. Hat sich die Grundidee noch nicht in den Köpfen festgesetzt? „Wie sind die Darstellungen mit den Aufholvorgängen und die nüchterne Graphik mit den sich schneidenden Geraden zu vereinbaren?“ Michel kommt an die Tafel, zeichnet eine steigende Gerade für die Schildkröte und eine gebogene Kurve für Achilles, damit er die Schildkröte nicht einholt. Simon wendet ein, dass so Achilles ja immer langsamer würde. Er zeichnet an die Tafel zwei sich schneidende Geraden und zwei Aufholvorgänge. Weiter möchte er nicht zeichnen. „Und wo erscheinen die weiteren Aufholvorgänge?“ Jan: „Man kann sie nicht zeichnen, die werden verschwindend klein.“ Ich verweise auf das aufgehängte Blatt, wo sichtbar ist, dass die blauen Wege von Achilles immer länger werden.“ Achim: „Sie überlappen sich; man müsste sie ganz dünn oder alles viel grösser zeichnen.“ Ich bitte ihn trotzdem zu zeichnen, da ich vorgesehen habe, anschliessend eine saubere Zeichnung entstehen zu lassen. Roman ergänzt noch, dass sich die Zeit ja immer wieder halbiere.

Nadine präzisiert: „Weg und Zeit verhalten sich proportional. Beide halbieren sich von Mal zu Mal.“ Achim deutet dies in der Zeichnung an mit den Termen a , a/2 , a/4 , … und zeichnet einen weiteren blauen Strich für den nächsten Aufholvorgang.



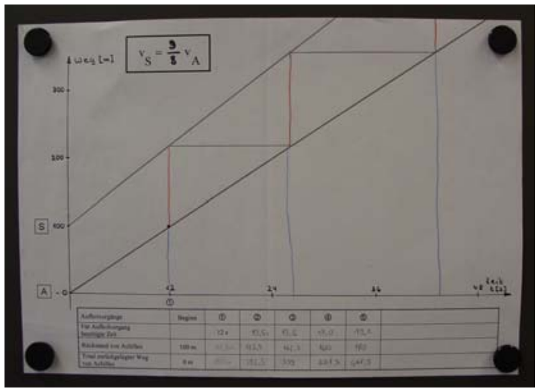
Da ich immer noch einige staunende Gesichter vor mir sehe, erachte ich es als vorteilhaft, nochmals eine Tabelle ausfüllen zu lassen:

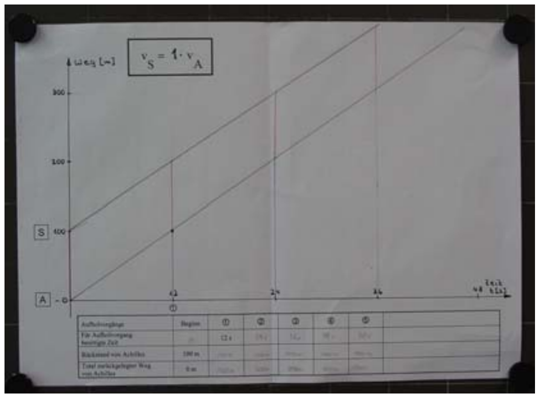
Aufholvorgänge	Beginn	①	②	③	④
Für Aufholvorgang benötigte Zeit		12 s	6 s	3 s	1.5 s
Rückstand von Achilles	100 m	50 m	25 m	12.5 m	6.25 m
Total zurückgelegter Weg von Achilles	0 m	100 m	150 m	175 m	187.5 m

Dies geht relativ zügig. Der Rückstand von Achilles halbiert sich von Aufholvorgang zu Aufholvorgang und strebt gegen Null. Der von Achilles zurückgelegte Weg nähert sich mehr und mehr der Länge von 200 m. Nadine erinnert an das Zusammenschütten der Flüssigkeit in die Gläser. Und die Zeiten werden die 24 Sekunden nicht überschreiten. Und wie ist es, wenn wir nach jedem Aufholvorgang klatschen? Für Tanja ist es klar, dass dies alles innerhalb der 24 Sekunden passieren muss. Nachher ist Stille. Aber diese unendlich vielen Klatscher, die einander immer dichter folgen, können wir nicht alle erzeugen, genauso wie wir diese unendlich vielen Aufholvorgänge nicht zu Ende denken können. Und dies alles in der endlichen Zeit von 24 Sekunden und auf einer Strecke von 200 Metern! Ich merke, dass diese Ungeheuerlichkeit immer noch für einige Schülerinnen und Schüler unfassbar ist. Statt hier weiter zu diskutieren, verteile ich immer an zwei Schüler ein Blatt, auf dem diese Aufholvorgänge berechnet und sauber eingetragen werden sollen. Jedes Blatt beinhaltet ein anderes Verhältnis der Geschwindigkeiten von Achilles und der Schildkröte. Oben behandelt haben wir den Fall, dass die Schildkröte halb so schnell ist wie Achilles, also $v_S = 1/2 \cdot v_A$. Zu bearbeiten sind nun die Situationen mit $v_S = q \cdot v_A$ für q = 1/10 , 1/4 , 2/3 , 3/4 , 7/8 , 1 , 9/8 , 5/4. Damit hoffe ich sehr, dass sich die Klasse bis zum nächsten Mal intensiver mit dem Thema auseinandersetzt. Gleichzeitig werden wir dann einen Überblick über die Auswirkungen verschiedener Geschwindigkeitsverhältnisse erhalten und davon ausgehend die Resultate verallgemeinern können.

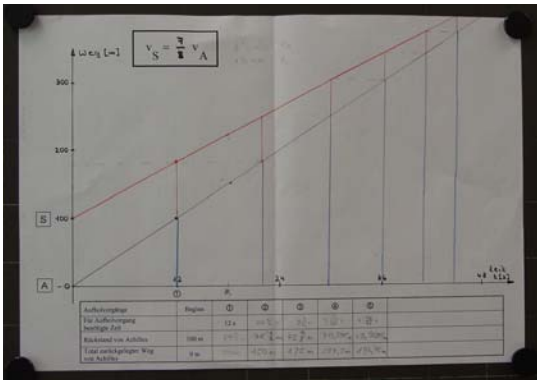
Lektionen 7/8

Wiederum hängen ganz links die Bilderfolge, ganz rechts die graphische Darstellung. Die Schüler sind gebeten, ihre verschiedenen Säulendarstellungen dazwischenzuhängen. Die neun Blätter folgen umgehend und wir können sie betrachten.

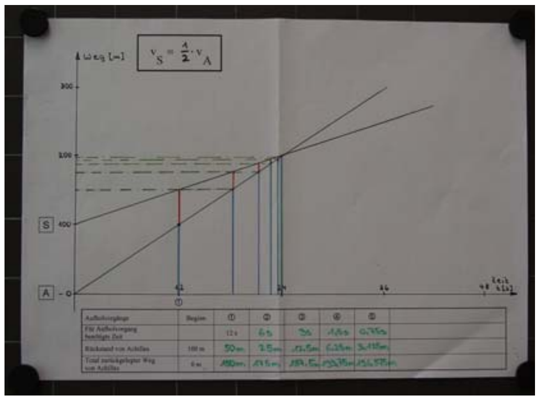




„Der Wettlauf von Achilles und der Schildkröte ist ja noch in vollem Gange. Was fällt auf beim Vergleichen der verschiedenen Darstellungen.“ Achim stellt fest, dass bei zwei Blättern der Vorsprung der Schildkröte immer grösser wird. Ich nehme diese beiden Darstellungen und hänge sie ganz oben hin. Marcel: „Bei den andern Darstellungen holt Achilles die Schildkröte ein.“ Michel: „Bei den einen holt er sie rasch ein, bei den andern weniger rasch, man könnte sie ordnen.“ Ich bitte ihn, zusammen mit seinem Nachbarn Dominik die Blätter zu ordnen. Leider reicht die Vertikale nicht, also müssen wir ganz unten an der Tafel auf die Horizontale ausweichen. Das letzte Blatt hat keinen Platz in der Zeile, aber Betime bemerkt: „Hier sind beide gleich schnell.“ Gut sichtbar ist auf einem Blatt der konstante Abstand. „Gibt es weitere Beobachtungen?“ Nadine fragt zurück: „Ist die Frage mathematisch oder real gemeint?“ Ich: „Ist da ein Unterschied?“ Nadine: „Ja, mathematisch holt Achilles nie ein,



real aber schon.“ Ich: „Das ist aber eine sehr unbefriedigende Situation!“ Simon: „Wenn wir immer wieder anhalten lassen, holt Achilles nie ein.“ Ist da immer noch das „Sprung und Stopp“ im Kopf? „Und wenn wir sie nicht stoppen? Gilt dann die Aussage von Zenon nicht? Er hat doch nichts über Stoppvorgänge gesagt.“ Immer noch schwirren die verschiedensten Vorstellungen im Kopf herum. Ich hoffe, dass der zentrale Punkt mit dem Klopfen in den verschiedenen Darstel-



lungen klarer wird. Ich beginne mit den gleich schnellen Läufern. Achilles bewege ich entlang des Diagramms und die Schülerinnen und Schüler klopfen am Ende jedes Aufholvorgangs auf den Tisch. Die Klopfer erfolgen in gleichem Abstand, ein Taktschlag nach dem andern wie bei einem Uhrwerk. Dann folgt ein Beispiel, bei dem die Schildkröte dem Achilles davonläuft. Die Klopfer folgen in immer grösseren Abständen. Diese Fälle scheinen allen klar zu sein. Und jetzt das Beispiel, bei dem Achilles doppelt so schnell ist wie die Schildkröte. Die Klopfer folgen in immer kürzeren Abständen und wollen nicht aufhören.

Tanja protestiert: „Die Klopfer hören auf!“ Beim zweiten Mal klappt es nicht schlecht.
Ich: „Wie viele Klopfer gibt es da?“ --- Schweigen.

Manuela: „Von einem gewissen Moment an gibt es keine mehr."
Ich: „Ja, kennen wir diesen Moment?"
Tanja: „Nein, es sind ja unendlich viele Klopfer."
Ich: „Und trotzdem hört ihr auf?"
Simon wird etwas ausführlicher: „Die Klopfer werden immer dichter, man klopft und klopft innerhalb dieser Zeit unendlich oft."
Ich: „Wer von euch hat unendlich oft geklopft?"
Tanja: „Nein, das kann man natürlich nicht durchführen, die Hände machen das nicht mit."
Nadine: „Und die Zeit ist ja begrenzt." Die Idee, dass da jemand die Streckenlänge und die Zeit begrenzt, haftet tief.
Ich: "Wer begrenzt denn die Zeit, etwa Zenon?"
Simon: „Wir erreichen die 24 Sekunden nie."
Ich: „So werden wir also ewig jung bleiben?" Schmunzeln allüberall.
Tanja: „Niemand begrenzt die Zeit, aber das Ganze findet in einer begrenzten Zeit statt."
Nun, dieser Ausdruck „begrenzt", hat seine Tücken, da denkt man an eine gesetzte Grenze, an eine Grenzlinie, vielleicht sogar an einen Grenzwall, an den Limes! Zenon spricht weder von einer Begrenzung der Rennstrecke noch von der Zeit. Es sind die Vorgaben selbst, nämlich der Anfangsvorsprung und die Geschwindigkeiten, welche die Länge dieser Aufholvorgänge bestimmen.

Offenbar braucht es wiederum die Tabelle für den einfachsten Fall mit $v_S = 1/2 \cdot v_A$.
Wir notieren nochmals die Zahlen.

Benötigte Zeit für die Aufholvorgänge:	12 s + 6 s + 3 s + 1.5 s + . . .	→
Laufstrecke von Achilles:	100 m + 50 m + 25 m + 12.5 m + . . .	→

Richtig wird bemerkt, dass die Laufstrecke für alle Aufholvorgänge zusammen sich immer mehr den 200 Metern nähert und die dafür benötigte Zeit gegen 24 Sekunden beträgt. So durchläuft Achilles also diese unendlich vielen Aufholvorgänge von Zenon innerhalb von 24 Sekunden auf einer Strecke von 200 Metern. „Und hier sind wir wieder am Kernpunkt unserer Geschichte wie am Ende der letzten Lektion: Diese unendlich vielen gedachten Aufholvorgänge finden auf einer endlichen Strecke und offenbar auch in einer endlichen Zeit statt. Denken wir uns Raum und Zeit unendlich oft teilbar, so sind innerhalb einer endlichen Strecke und einer endlichen Zeit unendlich viele Aufholvorgänge möglich. Und die Summe von unendlich vielen positiven Grössen, hier Strecken bzw. Zeiten, muss dabei nicht automatisch unendlich gross werden, was unserer Alltagsvorstellung und der physikalischen Wirklichkeit völlig widerspricht." Hier ist ein Paradigmenwechsel angesagt! Aber offenbar fällt es sehr schwer, sich mit diesen neuen Gedankengängen anzufreunden.

III. Akt: Vom Konkreten zum Allgemeinen

Ich greife nochmals Nadines Aussage aus der vergangenen Stunde auf, nämlich dass Achilles mathematisch gesehen nicht überholt, obwohl er in Wirklichkeit doch überholt. Mit mathematisch meint sie wohl eher die Argumentation von Zenon. „Das ist doch sehr störend. Unsere mathematischen Folgerungen sollten doch mit der Wirklichkeit übereinstimmen!" Nadine und auch Ramona nicken lebhaft. Die alten Denkgewohnheiten sitzen tief. Nochmals braucht es ein konkretes Beispiel, um den Kern der Sache zu sehen. „Schauen wir uns dies doch an einem anderen konkreten Beispiel an." Ich nehme das Blatt von Betime und Tanja (siehe oben!) mit $v_S = 3/4 \cdot v_A$ auf eine neue Tafel und frage Betime als Urheberin des Blattes, wo da ein allfälliger „Treffpunkt" der beiden Läufer stattfinde. Eingezeichnet ist er nämlich nicht. Ramona schätzt bei etwa 400 m. Neben die graphische Darstellung schreibe ich die Daten der Tabelle an die Tafel:

	a_1	a_2	a_3		a_n	
Wegstücke für Achilles	100 m	75 m	56.25 m	. . .	$100\cdot(3/4)^{n-1}$	
Benötigte Zeit	12 s	9 s	6.75 s	. . .		

Gesamte Wegstrecke von Achilles:

$$s_1 = 100 \qquad = 100 \text{ m}$$
$$s_2 = 100 + 75 \qquad = 175 \text{ m}$$
$$s_3 = 100 + 75 + 56.25 \qquad = 231.25 \text{ m}$$

Von Achilles in den ersten n Aufholvorgängen zurückgelegter Weg: $s_n = 100 + 75 + 56.25 + \ldots + 100\cdot(3/4)^{n-1}$

s_n lässt sich jetzt mit einem mathematischen Trick einfacher darstellen. Wir multiplizieren die erste Zeile mit dem Faktor 3/4 und subtrahieren anschliessend die neue Zeile von der ursprünglichen. Dabei fallen die meisten Glieder weg, es bleiben nur von der ersten Zeile das erste und von der zweiten Zeile das letzte Glied!

$$s_n = 100 + 75 + 56.25 + \ldots + 100\cdot(3/4)^{n-1} \quad | \text{ Multiplizieren mit } (3/4)$$
$$3/4\cdot s_n = 75 + 56.25 + \ldots + 100\cdot(3/4)^{n-1} + 100\cdot(3/4)^n$$
$$(1-3/4)\cdot s_n = 100 - 100\cdot(3/4)^n$$

Multiplizieren wir die letzte Zeile mit 4, so folgt: $\underline{s_n = 400 - 400\cdot(3/4)^n}$
Dies ist die Strecke, die Achilles in den ersten n Aufholvorgängen zusammen zurücklegt.

„Lässt sich dieses Resultat interpretieren?" Michel: „Drei Viertel hoch n wird immer kleiner." Ich reagiere zögernd. Achim: „Das strebt gegen 0." Michel: „Das habe ich auch gemeint." Tanja: „Diese Summe strebt immer mehr gegen 400." Ich notiere dies in Worten und auch symbolisch: $s_n \to 400$ für $n \to \infty$ Dies scheint offenbar einzuleuchten und klar zu sein. Deshalb bitte ich die Schüler auf dieselbe Art die Zeit zu erfassen. Nadine ist als erste damit fertig und fragt, ob das gegen 48 Sekunden strebe. Ja, das stimmt! Sie ist ganz stolz.

Jetzt sind wir bereit für die Verallgemeinerung. Den Ansatz notiere ich an der Tafel

$$\boxed{v_S = q\cdot v_A} \qquad a_1 \;,\; a_1\cdot q \;,\; a_1\cdot q^2 \;\ldots\; a_1\cdot q^{n-1}$$

$$s_n =$$

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten konzentriert und einigen gelingt die Verallgemeinerung bereits während der Stunde. Wer fertig ist, bekommt den Auftrag, im Zahlenbeispiel den Schnittpunkt der beiden Geraden mit deren Gleichungen zu berechnen, wie wir es vor eineinhalb Jahren bei den linearen Funktionen gelernt haben. Diese Methode müsste doch auf Resultate führen, die mit den jetzigen Überlegungen übereinstimmen.

Die Hausaufgabe auf Montag ist dreiteilig:

- Diese Berechnungen fertig führen.
- Eine vorliegende theoretische Einführung ins Thema „Folgen und Reihen“ von 2 ½ Seite lesen. Sie beinhaltet die nötigsten Fachbegriffe und Erläuterungen anhand unserer Beispiele.
- An der Tafel hängen zehn verschiedene Herausforderungen bzw. Aufgabenstellungen. Darunter befinden sich ein paar Fraktale, das sind Figuren, bei denen Teilfiguren eine verkleinerte Kopie der Gesamtfigur sind. Diese Probleme liegen in zweifacher Ausführung vor, so dass sich jeder Schüler und jede Schülerin ein Blatt wählen kann, um sich bis zum nächsten Mal zu fragen, was diese Herausforderung mit dem behandelten Thema zu tun habe?

Bezüglich dieser letzten Aufgabe bin ich sehr gespannt: Wie reagieren die Einzelnen? Können sie eine Übertragung auf die neue Situation konstruieren? Gelingt es ihnen, entsprechende Fragen zu stellen und zu beantworten?

Lektion 9

IV. Akt: Ausweitung und weitere Vertiefung der Problematik

Blicken wir kurz zurück: Ausgangspunkt des Lehrstücks war diese herausfordernde Geschichte von Zenon. Sie hat uns in hartem Ringen zu allgemeiner Erkenntnis über Grenzprozesse bei nicht abbrechenden geometrischen Reihen geführt und sich in den dazugehörigen Formeln verdichtet. Im Folgenden bietet sich jetzt eine respektable Vielfalt von Alltagssituationen, auf die wir unsere Betrachtungsweise und die gewonnenen Erkenntnisse übertragen können. Heute möchte ich mit den Schülerinnen und Schülern ein erstes Mal durch die Aufgabenvielfalt schreiten, um zu hören, was sich die einzelnen schon gedacht haben und welche Fragenvielfalt sich eröffnet. Gleichzeitig können die verschiedenen Problemstellungen bei allen Schülern und Schülerinnen aktiv werden. Auf den drei Blättern, die ich verteile, sind alle Problembereiche notiert, wie sie am Ende der letzten Stunde an der Tafel hingen.

A) Eine alleinstehende Person möchte einer Studentin CHF 100'000.- schenken. Damit auch wirklich so viel Geld fürs Studium zur Verfügung steht, übernimmt die Person die Schenkungssteuer von 40%. Dies allerdings ist wiederum ein Geschenk . . .

Einem geschenkten Gaul schaut man ...

Wenn die Schenkungssteuer vom Schenkenden übernommen wird, muss von dieser Steuer wiederum die Schenkungssteuer berechnet werden und von dieser wiederum eine Schenkungssteuer, von dieser wiederum ...! Eine unendliche Geschichte.

Eine meiner Bekannten hat mir folgenden Fall zugetragen: Ihr Neffe hat von seinem Stiefvater (nicht blutsverwandt) eine Beteiligung an dessen Unternehmen geschenkt erhalten. Dies als Zeichen der Anerkennung für seine hervorragende Arbeit und nicht zuletzt auch in der Absicht, dass der Junior einmal das Geschäft weiterführen kann. Da der Neffe meiner Bekannten nicht über die notwendigen Mittel verfügte, um die Schenkungssteuern zu bezahlen, erklärte sich der Stiefvater bereit, diese zu übernehmen. Nach intensiven Verhandlungen mit den Steuerbehörden wurde die Schenkungssteuer auf 100’000 Franken festgelegt.

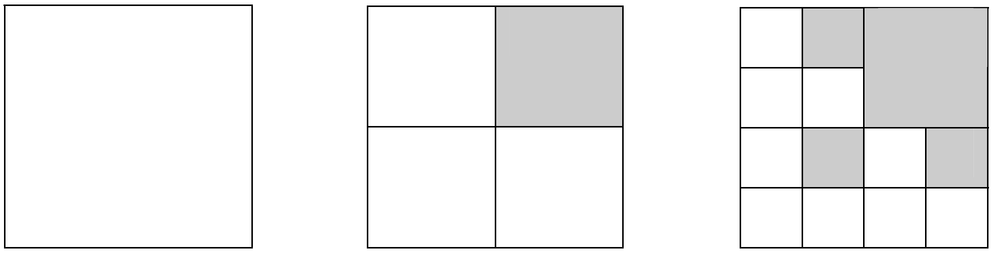
Der Beschenkte staunte in der Folge nicht schlecht, als er plötzlich eine Steuerrechnung von 150’000 Franken in Händen hielt. Im festen Glauben, es handle sich um ein Versehen, nahm er Rücksprache mit den Steuerbehörden, von denen er dann allerdings dahingehend belehrt wurde, dass es sich keineswegs um ein Versehen handle. Indem nämlich der Stiefvater die Schenkungssteuer bezahle, richte er erneut eine Schenkung aus. Und somit würden also Schenkungssteuern für die geschenkte Schenkungssteuer anfallen. Sollte diese (zweite) Schenkungssteuer wiederum vom Stiefvater bezahlt werden, würde noch eine dritte Schenkungssteuer fällig usw. usw! Um dieser unendlichen Geschichte ein Ende zu bereiten, wurde die «Übung» bei 150’000 Franken abgebrochen.

Eine Rückfrage beim Bundesgericht ergab, dass diese Praxis rechtens ist. Am 11. Dezember 1998 hat nämlich das Bundesgericht entschieden, dass eine Schuldübernahme, die ohne eine Gegenleistung erfolgt und zur Befreiung des ursprünglichen Schuldners führt, eine Schenkung darstellt.

CASH Nr. 39 1. Oktober 1999

Tanja erläutert gut die Problematik der Schenkungssteuer und stellt schon die Reihe 100'000 + 40'000 + 16'000 + ... auf, hat aber noch nicht berechnet, wohin das führt. Sie liest den kurzen Cash-Artikel vor, welcher Grundlage bietet für diese Aufgabe. Diese ist also nicht nur reine Theorie! Ich weise darauf hin, dass es noch eine andere, einfachere Berechnungsart gebe. Da niemand auf die Idee kommt, frage ich direkter: „Wie viele Prozent des geschenkten Betrags bleiben der Studentin?“ – Nach einer Weile meldet sich Simon strahlend: „60 % und dies sind ja 100'000 Franken. Daraus ergibt sich der geschenkte Betrag.“ Tanja erhält die Aufgabe, die Schenkungssumme auf beide Arten zu berechnen. Wir hoffen, dass die beiden Berechnungsarten dasselbe Resultat liefern.

B)



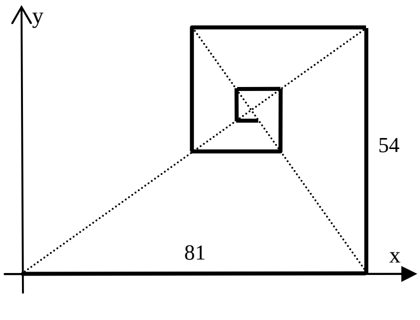
Ramona sieht zwar, wie das weiter geht, aber weiss nicht, was sie tun soll. Nadine behauptet, dass die gefärbte Fläche mehr und mehr das ganze Quadrat überziehen wird. Berechnet hat sie aber nichts. Ich wende ein, dass es ja immer mehr weisse Quadrate gibt. Und wie steht es mit der Anzahl der gefärbten Quadrate?

C) Im Kinderzimmer wird einem Würfel mit der Kantenlänge 7 dm ein zweiter Würfel so aufgesetzt, dass die Ecken der Grundfläche des zweiten Würfels die Kanten der Deckfläche des ersten Würfels im Verhältnis 4:3 teilen. Auf gleiche Weise wird dem zweiten Würfel ein dritter aufgesetzt usw. . . .

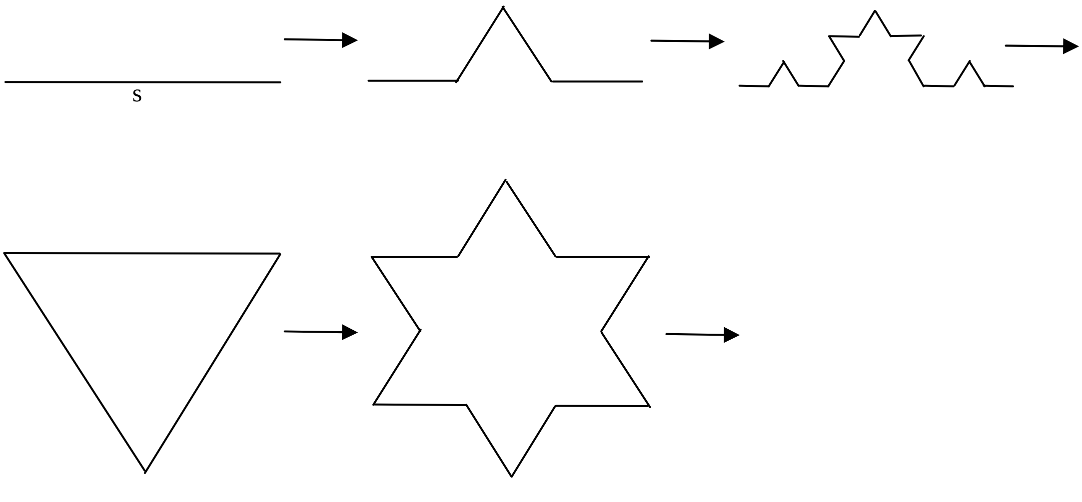
Roman liest den Text vor, versteht die Situation vorerst aber falsch. Nachdem geklärt ist, wie der zweite Würfel auf dem ersten steht, können wir uns fragen, wie die Höhe wächst mit zunehmender Anzahl der Würfel. Roman ist überzeugt, dass der Turm unendlich hoch wird. Lässt sich wohl etwas sagen über das für den Turmbau benötigte Material?

D) Eckige Spirale im Koordinatensystem.

Diese Figur hat niemand gewählt. Somit überspringen wir sie für den Augenblick.

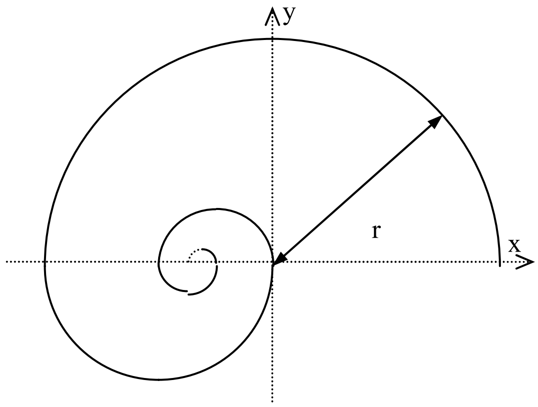


E



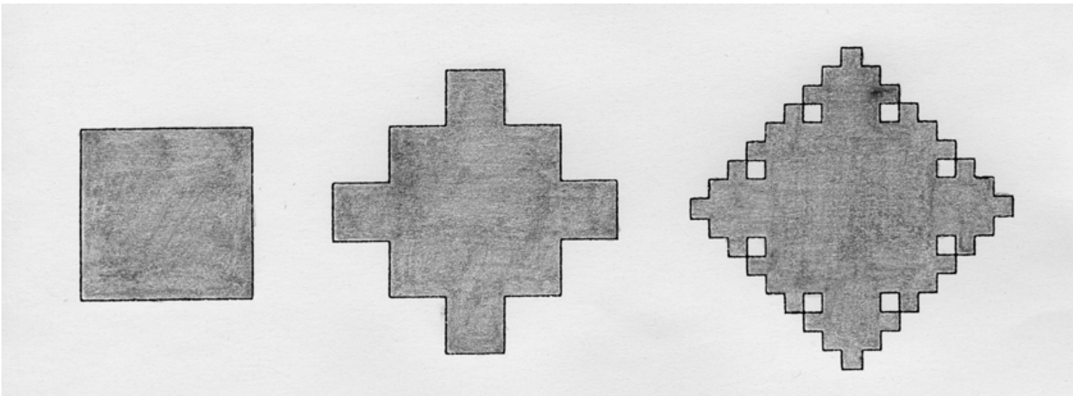
Manuela hat diese eckigen Figuren gewählt. Sie kann zwar den Fortgang des Prozesses beschreiben, hat aber keine Ahnung, was sie da allenfalls berechnen soll. Marcel sieht, dass der Streckenzug immer länger wird, aber mit welcher Gesetzmässigkeit? Lassen sich Inhalt und Umfang der unteren Figuren bestimmen. Achim behauptet, dass der Flächeninhalt zwar immer grösser, aber nicht unendlich gross wird.

F) Studiere die nebenstehende Spirale. Sie ist aus unendlich vielen Halbkreisbogen zusammengesetzt, deren Radien jeweils halbiert werden.



Simon will die Fläche aller Halbkreise bestimmen. Jason meint, man könnte die Länge der ganzen Spirale ins Augefassen. Achim vermutet, dass alle Kreisbogen vom zweiten an zusammen gleich gross sind wie der erste Kreisbogen. Ich ergänze mit der Frage, ob sich der Strudelpunkt, um den sich die Spirale immer enger zusammenzieht, bestimmbar sei.

G)

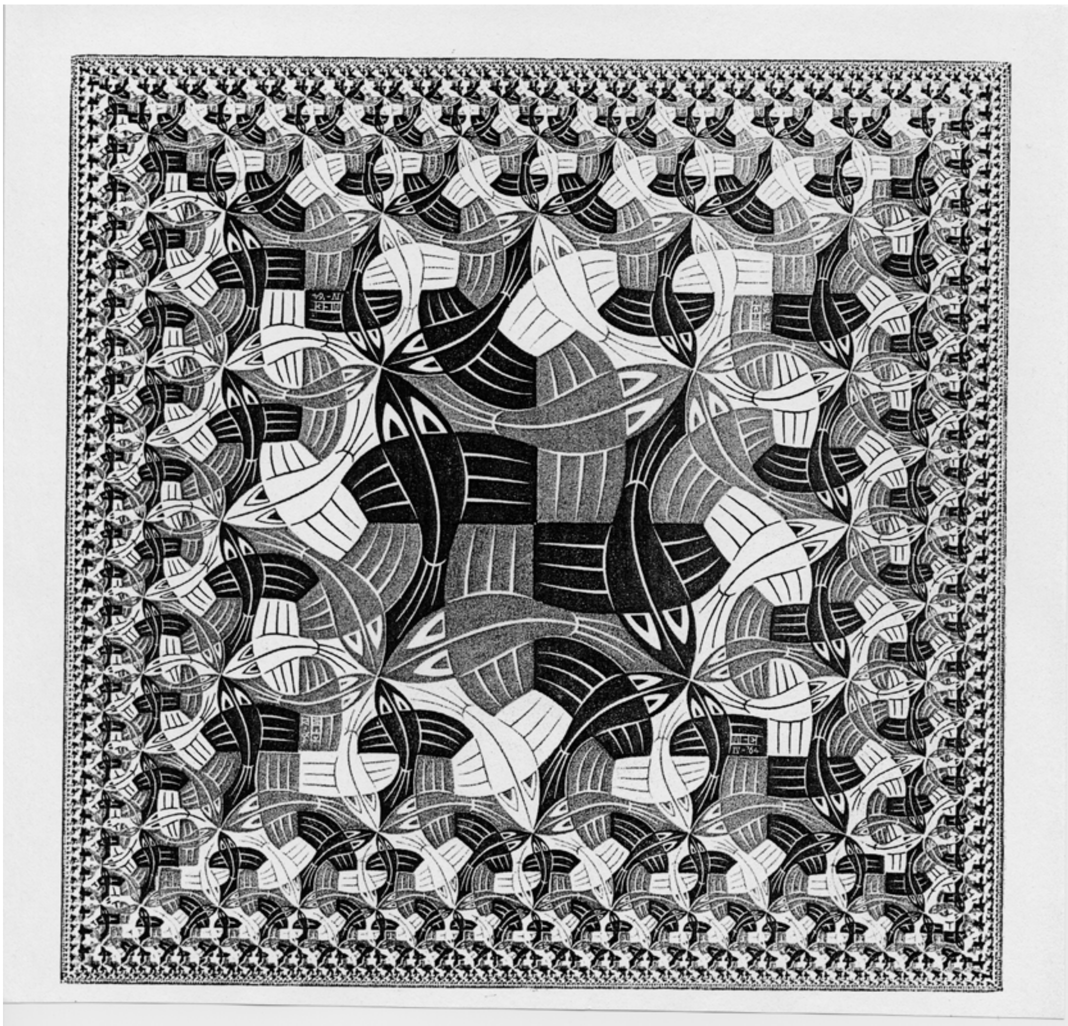


Achim erläutert an der Tafel das Prinzip dieser Figurenfolge, die Schneeflockengebilde, und ist überzeugt, dass die Fläche nicht beliebig gross wird. Und wie steht es mit dem Umfang? Zur Hilfe für die Weiterarbeit gebe ich ihm eine vorbereitete Tabelle zum Ausfüllen.

H) Tim und Tina sitzen vor einer vollen Kaffeetasse. Tim trinkt die Hälfte mit einem Schluck. Tina nimmt vom Rest die Hälfte und anschliessend Tim, . . .
Tina fühlt sich benachteiligt. Bei der zweiten Tasse nimmt Tim nur den vierten Teil und dann auch Tina nur ein Viertel des Restes, . . .

Dominik ist bei diesem Beispiel erinnert an die Gläserfolge. Die Aufteilung ist so sicher nicht gerecht, da im ersten Fall Tim mehr als die Hälfte, aber weniger als drei Viertel trinkt. Aber wie viel trinkt er wirklich? Lässt sich eine gerechte Aufteilung finden?

I) Quadratlimit, Holzschnitt von M. C. Escher, 1964



Jan schildert die Punktsymmetrie der Figur, wie sie im Zentrum gut sichtbar ist, und erwähnt die Verjüngung gegen aussen. Er meint, dies passiere etwa mit einem Faktor ¾. Dies muss genauer untersucht sein. Gleichzeitig beobachte ich Simon, der bereits mit einem Masstab intensiv dahinter geht. Er ist offenbar durch das Bild spontan angesprochen und will es ergründen.

K) Wann nach acht Uhr decken sich der grosse und der kleine Zeiger der Uhr erstmals?

Michel und Marcel können keine Parallele zur Zenongeschichte finden. Achim erläutert, wie der lange Zeiger in 40 Minuten zur Startposition des Stundenzeigers gelangt, und dieser bereits weiter ist, usw.. Jetzt ist's klar. Ich empfehle den beiden, den Weg in Winkelgrad auszudrücken und nicht in Minuten, da sonst für Zeit und Weg die gleichen Einheiten vorkommen, was zu Verwirrungen führen kann. Ich hoffe auf zwei Darstellungen und Berechnungsweisen: Mit Reihen und mit Geradengleichungen.

L) Eine Parallelgeschichte zu Zenons „Achilles und die Schildkröte“ schreiben und vortragen.

Betime hat eine Geschichte bereit. Ich werde ihr später dafür Zeit einräumen.

Somit haben jetzt alle den Überblick über die verschiedenen Lernherausforderungen und gleichzeitig neue Impulse für die eigene, gewählte „Knacknuss“. Die letzten sieben Minuten reichen gerade noch für die Besprechung der Hausaufgabe zur Schnittpunktberechnung bei Achilles und der Schildkröte für den Fall $a_1 = 100$ m und $q = ¾$.

Nur wenigen ist es gelungen, die beiden Gleichungen aufzustellen. Umso wichtiger ist es, dass Roman das Zustandekommen dieser Gleichungen erläutert.

$$\left| \begin{array}{l} w_A(t) = 100/12 \cdot t \\ w_S(t) = 75/12 \cdot t + 100 \end{array} \right| \quad \text{(Steigung 100/12, denn Achilles legt die 100 m in 12 s zurück)}$$

Das Auflösen dieses Gleichungssystems traue ich allen zu. Es führt, wie zu erwarten aus den Reihenberechnungen, auf $t = 48$ s und $w_A(48) = w_S(48) = 400$ m, das heisst innerhalb von 48 Sekunden und 400 Metern Wegstrecke vollenden sich diese unendlich vielen gedachten Aufholvorgänge und Achilles ist mit der Schildkröte auf gleicher Höhe. Der Vergleich mit der Darstellung von Tanja und Betime zeigt, dass deren Schnittpunkt etwas zu weit rechts oben zu liegen kommt.

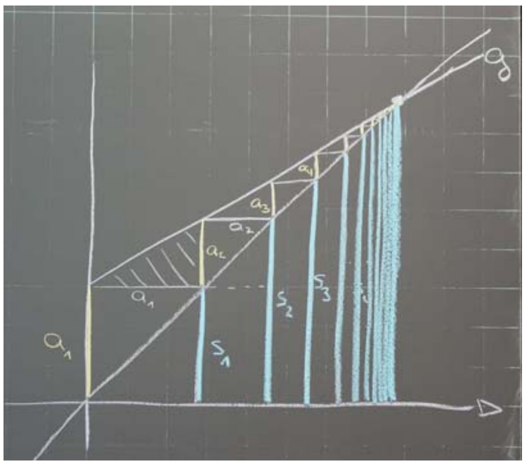
Lektionen 10/11

An der Tafel sehen wir wiederum Achilles im Wettlauf mit der Schildkröte. Heute soll die Herleitung der wichtigsten Formeln noch kurz gesichert werden, dann wollen wir die aufgeworfenen verschiedenen Probleme genauer studieren und dabei den Bezug zur Ausgangsgeschichte sehen und die entwickelten Formeln anwenden. Unter dem Wettlaufbild habe ich die Formelherleitung bereits notiert, so wie sie in der Theorie steht:

$$\begin{array}{lclllllll} s_n & = & a_1 + & a_1 \cdot q + & a_1 \cdot q^2 + & \ldots & + a_1 \cdot q^{n-2} + & a_1 \cdot q^{n-1} & \\ q \cdot s_n & = & & a_1 \cdot q + & a_1 \cdot q^2 + & \ldots & + a_1 \cdot q^{n-2} + & a_1 \cdot q^{n-1} + & a_1 \cdot q^n \\ \hline \end{array}$$

$$s_n - q \cdot s_n \quad = \quad a_1 - a_1 \cdot q^n \rightarrow s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} \quad \rightarrow \quad S = \lim_{n \to \infty} s_n \quad = \quad \frac{a_1}{1-q}$$

Im Gespräch ergänzt Tanja richtig, dass dies nur für $q < 1$ gilt, da bei $q > 1$ der Term q^n mit wachsendem n gegen unendlich strebt und Achim ergänzt, dass bei $q = 1$ die Summe mit jedem Summanden um gleich viel wachse, also auch über alle Grenzen steige. Zur Verdeutlichung zeige ich nochmals die von den Schülerinnen und Schülern früher gezeichneten graphischen Darstellungen und ergänze, dass wir uns bislang auf positive Quotienten q konzentriert haben. Dieser Grenzübergang gilt also (vorläufig) nur für $0 < q < 1$. Zur Illustration der Zusammenhänge zeichne ich rechts davon mit Hilfe der Schüler ein gewohntes Bild, wobei ich allerdings jetzt die Ursprungsgerade als Winkelhalbierende im Koordinatensystem zeichne. Damit haben wir die Grössen a_1, a_2, a_3, … auch horizontal. Bei der Winkelhalbierenden entstehen jetzt Quadrate mit



den Seiten a_1, a_2, a_3,… und die zwischen den beiden schrägen Geraden gibt es Steigungsdreiecke mit den Steigungen a_2/a_1, a_3/a_2, a_4/a_3, usw. Da bei unseren geometrischen Folge gilt: $a_2 = qa_1$, $a_3 = qa_2$, ... , haben alle Steigungsdreiecke die Steigung q und sie sind ähnlich, wie Nadine ungefragt einwirft. Nochmals sehen wir, wie sich diese „Aufholvorgänge" immer dichter folgen. Die Gesamtlänge der Teilsummenfolge nähert sich mehr und mehr der y-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Geraden.

Hier werde ich nächstes Mal zusätzlich mit den Geraden diese y-Koordinate berechnen lassen. Folgendes sind die Geradengleichungen.:

$$\left| \begin{array}{l} y = x \\ y = qx + a_1 \end{array} \right| \quad \textit{Aufgelöst ergibt das System} \quad x = y = \frac{a_1}{1-q}$$

Diesen Wert haben wir ja definiert als Summe der nicht abbrechenden Reihe!

Um diese Definition noch etwas klarer werden zu lassen, füge ich ein Beispiel ein und frage nach der Bedeutung von 9/9.
„9/9 ist eins", tönt es unisono. „Lässt sich dieser Bruch anders darstellen?" - Keine Ahnung!
Auf meine Frage: „Was ist denn 1/9 ?", folgt spontan: 1/9 = 0.11111… oder $0.\bar{1}$.
„Und lässt sich dies als Reihe darstellen?" Achim erklärt es und ich schreibe:

Ich schreibe $1/9 = 0.1111111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \cdots$

also gilt: $9/9 = 0.9999999... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \cdots$

Ich lasse jetzt die Summe der ersten n Summanden berechnen und umformen:

$$s_n = \frac{9}{10} \cdot \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n - 1}{(-1)} = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n \to 1 \qquad \text{oder} \qquad s = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

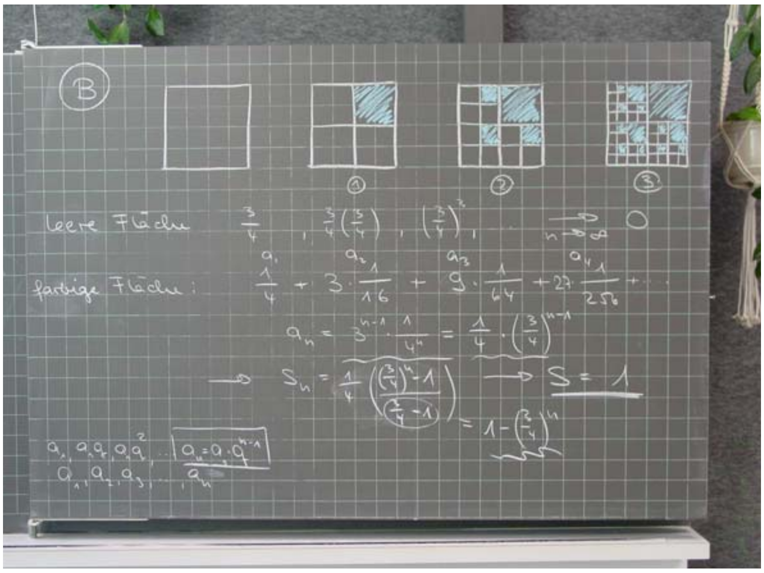
Und wiederum haben wir einen Prozess, den wir nicht zu Ende denken können. Und wenn die Mathematiker dem Grenzwert dieses unendlichen Grenzprozesses den Wert 1 zuordnen, so sind wir bei unserer ersten spontanen Antwort: „9/9 ist eins". So sieht im Wesentlichen die Reihe aus, wenn Achilles zehnmal so schnell wie die Schildkröte läuft, dann ist $v_S = 1/10 \cdot v_A$, also q = 1/10.

Der Blick auf die Uhr zeigt, dass wir schon fast die erste Lektion gebraucht haben, um hier zusammen die von den Schülerinnen und Schülern entwickelten und im Theorietext nachgelesenen Formeln im Kontext nochmals zu vergegenwärtigen.

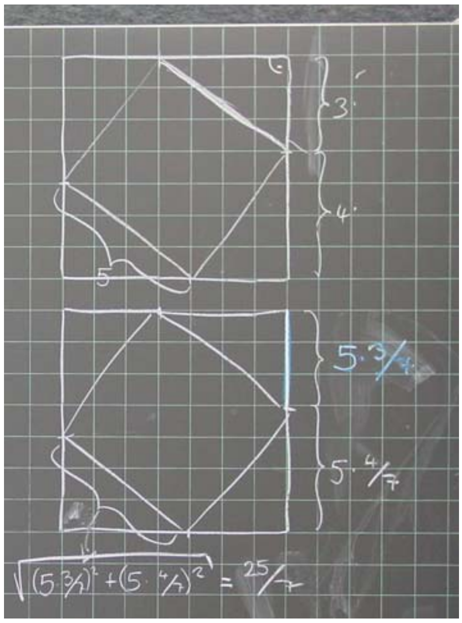
Es bleiben uns gerade noch 7 Minuten, um uns von Tanja Aufgabe A, das Steuerbeispiel, erläutern zu lassen. Eher zurückhaltend erläutert sie vor der Klasse nochmals kurz die Problematik und notiert 40'000 + 16'000 + 6'400 + … (40 % sind 2/5)

$= \frac{40'000}{3/5} = 66'666.66$ ohne dieses Resultat allerdings kommentieren zu können.

Erst auf Nachfrage wird formuliert, dass also die Gönnerin insgesamt 100'000.- + 66.667.-, also 166'667.- schenken muss, damit der Studentin noch 100'000.- bleiben. Die zweite Berechnungsart hat Tanja nicht ganz begriffen. Achim erläutert, dass der Studentin ja 60 % vom Schenkungsbetrag übrig bleiben und dies 100'000.- sein sollen. Jetzt ist Tanja alles klar, mit einem Dreisatzschema bewältigt sie die Berechnung gerade noch bis zur wohlverdienten Pause. Ein Blick in die Klassenrunde bestätigt mir, dass das begriffen ist. Wiederum haben wir ein Beispiel, bei dem zwei ganz unterschiedliche Denk- und Berechnungsarten auf ein und dasselbe Resultat führen.



Mit Beginn der zweiten Lektion widmen wir uns Aufgabe B. Nadine behauptet, dass die leere Fläche (es ist gefährlich von der weissen Fläche zu sprechen, weil die weisse Fläche des Arbeitsblattes an der Tafel schwarz ist) gegen null strebt, und ich wiederhole meinen Einwand, es gäbe ja immer mehr kleine leere Quadrätchen. Nadine diktiert die leeren Flächen. Ich lasse auch die farbige Fläche berechnen und es zeigt sich, dass diese wirklich gegen eins strebt. Langsam wird der Umgang mit diesen Gedankengängen und mit den Formeln vertrauter. Und trotzdem darf das Sensationelle nicht übersehen werden: Die Anzahl der leeren Quadrätchen wächst ins Unendliche: 3 , 9 , 27 , 81, . . . während die Gesamtfläche aller leeren Quadrätchen von Figur zu Figur um ein Viertel abnimmt und sich null nähert! Zur Anzahl der farbigen Quadrate kommt immer eine Dreierpotenz dazu 1 + 3 + 9 + 27 + …, sie wächst über alle Grenzen, und trotzdem übersteigt die Gesamtfläche aller farbigen Quadrate die Gesamtfläche des Quadrates nicht!



Als nächstes widmen wir uns dem Würfelturm, Aufgabe C. Roman zeichnet zwei Deckflächen, leider beide gleich gross, und notiert die ersten Seitenlängen:
$a_1 = 7$, $a_2 = 5$, $a_3 = 3.57$, . . . Dass hier der Satz des Pythagoras dahinter steckt, ist klar, aber mit dem Dezimalbruch können wir nichts anfangen. Zügig notiert Roman die Berechnung und Ramona gibt den dritten Wert als Bruch 25/7 an. Jetzt wird ersichtlich, dass sich die Seiten mit dem Faktor 5/7 verkleinern. Tanja sieht und äussert klar, dass das untere Quadrat eigentlich nur Seitenlänge 5 haben sollte und die Figur zur oberen ähnlich ist, wegen der gleichen Teilungsverhältnisse. Jetzt frage ich Roman: „Hätte dieser Turm in deinem Zimmer Platz?“ – „Fragt sich, wie hoch mein Zimmer ist.“ – Simon entgegnet: „Sicher nicht, der Turm wird unendlich hoch.“ Über diese Aussage von Simon bin ich jetzt sehr erstaunt. Die Vorstellung, dass das Aneinanderreihen von unendlich vielen Strecken zu einer unendlich grossen Strecken führen muss, ist offenbar ganz tief in uns verankert, schlägt immer wieder durch, wenn wir nicht wachsam und vorsichtig sind. Meine spontane Umfrage: „Wer denkt, dass der Turm höher als 10m wird?“ endet mit dem Resultat, dass zwei bejahen, acht verneinen und die übrigen sechs unentschieden sind,

sich lieber nicht festlegen. Manuela sagt: „Wir können es ja bestimmen“, und rechnet gleich vor: „70 cm + 50 cm + 35 cm + … , das macht etwa 180 cm.“ Ich wünsche ein genaueres Resultat. Philippe liefert schon bald das richtige Resultat samt Begründung:

$$\text{Höhe } h = 7 + 7\cdot(5/7) + 7\cdot(5/7)^2 + \ldots = \frac{7}{1-5/7} = 24.5 \text{ dm}$$

Simon, der vorher für einen unendlich hohen Turm plädierte: „Das ist ja wie beim Achilles, auch wenn wir den Turm nie vollenden können.“ – „Ja, wir können ihn denken, aber wir können ihn weder im Detail zu Ende denken, noch können wir ihn physisch zu Ende erschaffen!“ Es stellt sich noch die Frage nach dem benötigten Material für diesen Turm. Achim sieht da klar und diktiert:

$$V = 7^3 + (7\cdot 5/7)^3 + (7\cdot (5/7)^2)^3 + \ldots \quad \text{mit } a_1 = 7^3 \text{ und } q = (5/7)^3$$

Diese Ausrechnung und die Bearbeitung der Aufgabenbereiche E, H und K sind Aufgaben auf den kommenden Montag.

Die Bearbeitung dieser Aufgaben beansprucht viel Zeit,, aber ich bin überzeugt, dass sie nützlich ist. Erst so kann sich das neue Gedankengut langsam durchsetzen, kann sich der Paradigmenwechsel vollziehen.

Jason kommt nach der Stunde noch vorbei und wendet ein: „Aber der Turm wird doch unendlich hoch, wenn ich unendlich viele Türme aufeinander schichte!?“ Gemeinsam schauen wir uns nochmals die Graphik der letzten Stunde mit den zwei Geraden an (vgl. Seite *22*!). Hier sieht man die Würfel seitlich verschoben förmlich vor sich. Jason nickt zufrieden, bedankt sich und zieht in die Pause.

Lektion 12

Den ganzen heutigen Montag brauchen wir für die Diskussion von Aufgabe E. Manuela sieht noch nicht viel weiter als das letzte Mal, dafür bemerke ich, dass sie offenbar vom Escherbild angesprochen ist und begonnen hat, dieses zu kolorieren.
Manuela: „Der Streckenzug wird immer länger.“ Dass die Länge des Streckenzugs mit Faktor 4/3 wächst, ist bald allen klar, aber das genügt uns jetzt nicht mehr. So frage ich: „Wächst die Länge über 1000 m hinaus?“ Achim: „Die Länge wächst ins Unendliche“ und Simon ergänzt: „Da die Länge mit dem Faktor 4/3 wächst, kommt jedes Mal ein Drittel dazu, das heisst, die Länge wächst um immer mehr.“ Damit ist die Grundlage für die Figurenfolge gelegt. Es dauert eine Weile, bis die entsprechenden Folgen vor uns stehen.
Tanja vermutet, dass sich die Figur immer mehr dem Umkreis des Dreiecks annähert.

Umfang: $3s \quad 3s(3/4) \quad 3s(3/4)^2 \quad 3s(3/4)^3 \quad 3s(3/4)^4 \; \ldots \; 3s(3/4)^{n-1} \; \ldots \to \infty$

Fläche des gleichseitigen Dreiecks: $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot s^2$

Flächenzuwachs: $3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{s}{3})^2 + 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{s}{9})^2 + 48\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{s}{27})^2 + \;.\;.\;.\;.$

Die Anzahl der Seiten wächst mit dem Faktor 4 und damit auch die Anzahl der neu dazukommenden Quadrätchen. Deren Seitenlänge verkleinert sich auf einen Drittel und damit die Fläche jedes neu dazukommenden gleichseitigen Dreiecks auf einen Neuntel. Zusammen ergibt dies einen Flächenzuwachs von vier Neunteln des vorherigen Zuwachses, der Quotient der Reihe ist also 4/9. Nachdem dies geklärt ist, berechnen die Schüler und Schülerinnen den gesamten Flächenzuwachs und sehen, dass dieser gegen drei Fünftel der Ursprungsfläche strebt. Insgesamt nähert sich der Flächeninhalt also immer mehr dem 1.6-fachen der Fläche des Ursprungsdreiecks, also einem endlichen Wert. Und gleichzeitig wächst der Umfang über alle Grenzen!

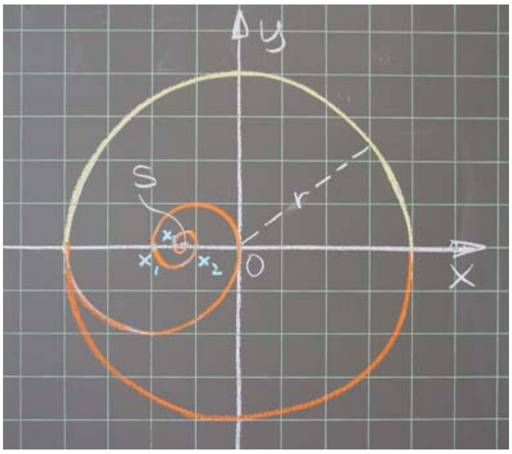
Da der Flächeninhalt gegen $1.6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (s)^2$ strebt, kann es nicht der Umkreis sein!

Berechnungen ergeben für den Umkreis mit $r = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot s$ eine Fläche von $\frac{\pi}{3} \cdot s^2$.

Die Sternfolge strebt also gegen eine Fläche, die nur knapp zwei Drittel des Umkreises der Figur ausmacht, genauer 66.16 %. Dies ist erstaunlich weniger, als man von Auge erwarten würde. *Wiederum haben wir sehr viel Zeit gebraucht, da sich die Schüler zu Hause wenig überlegt haben!* Hausaufgaben aufs nächste Mal: Einige elementare Aufgaben lösen.

Lektionen 13/14

Heute möchte ich nur wenig Gemeinsames besprechen, dafür die Schülerinnen und Schüler umso länger betreut arbeiten lassen. Vorerst konzentrieren wir uns aber gemeinsam auf Aufgabe F mit der Spirale. Dieses Beispiel ist wichtig, da wir hier erstmals eine Reihe mit negativem Quotienten treffen. Die Länge, die sich aus lauter Halbkreisen zusammensetzt, wird von Simon, dem Exponenten dieser Aufgabe, gut erklärt und leuchtet ein.



$L = \pi \cdot r + \pi \cdot r/2 + \pi \cdot r/4 + \pi \cdot r/8 +$

$= \pi \cdot r/(1-1/2) = 2\pi \cdot r$

Dies ist gerade der ganze Umfang des grossen Kreises. Alle haben schon einmal beim Geschenke Einpacken ein Band mit einer Schere gestreift, damit sich das Band nach innen einrollt wie hier, in ewiger Wiederkehr des Gleichen. Den Strudelpunkt zu finden bereitet mehr Mühe. Achim sieht, dass man auf der x-Achse immer nach links und nach rechts gehen kann und so diesem Punkt immer näher kommt. Ist die Grundidee einmal klar, so ergibt sich $x_S = -r/2 + r/4 - r/8 + r/16 - + \ldots = -r/2 \,/\, (1-(-1/2)) = -r/3$. Erstmals taucht eine geometrische Reihe mit negativem Quotienten ($q = -1/2$) auf. Für wachsende n strebt $(-1/2)^n$ gegen Null wie $(+1/2)^n$, einzig mit wechselnden Vorzeichen. Deshalb können wir die hergeleitete Formel $s = a_1/(1-q)$ auch hier verwenden. Damit haben also wir den Strudelpunkt $S(-\frac{r}{3},0)$ lokalisiert, gegen den sich die Spirale immer enger windet. Man kann sich da einen Adler vorstellen, der sich von hoch oben in sich verjüngenden Halbkreisschwüngen auf die Beute stürzt.

Als weiteres Anwendungsbeispiel der Reihen notiere ich an der Tafel: $2.\overline{73} = 2.73737373\ldots$. Jason erinnert sich noch, dass ein periodischer Dezimalbruch eine rationale Zahl ist. Diese lässt sich also als Bruch darstellen. Nur Achim (wie bei 0.111… in einer früheren Lektion) weiss, wie sich dieser Dezimalbruch als Reihe darstellen lässt. Für die andern ist dieser Zusammenhang bereits wieder in Vergessenheit geraten!

$2.\overline{73} = 2.7373\ldots = 2 + 7/10 + 3/100 + 7/1000 + 3/10000 + 7/100000 + 3/1000000 + \ldots$

Simon schlägt vor:

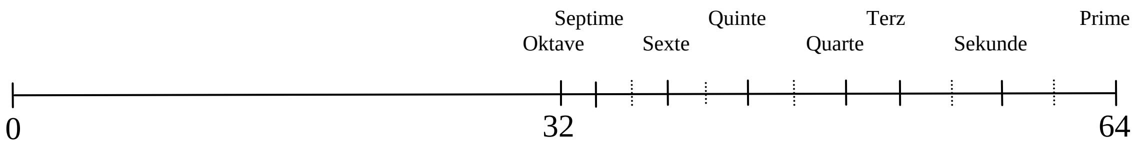
$2.\overline{73} = 2.7373\ldots = 2 + 73/100 + 73/10000 + 73/1000000 + \ldots$

und ergänzt, dass wir hier einen Quotienten von 100 hätten.

Ich lasse den Bruch berechnen, warne aber vor einem nahe liegenden Fehler. Ramona hat das Resultat als erste: $2 + (73/100)/(1-1/100) = 2 + 73/99 = 271/99$. Wer die 2 als erstes Glied in die Formel eingesetzt hat, sieht den Irrtum rasch ein.

Betime möchte Aufgabe 4 besprochen haben. An Beispielen und allgemein diskutieren wir eine besondere Eigenschaft von geometrischen Folgen, nämlich dass jedes Glied ($n>1$) der Folge betragsmässig geometrisches Mittel der beiden Nachbarglieder ist.

Philippe, unser Gitarrenspieler, wünscht noch die Behandlung von Aufgabe 3: „Schalte zwischen 32 und 64 elf Glieder so ein, dass eine geometrische Folge entsteht! (Vergleiche mit einer Gitarre!)“ Auf meine Frage, wie lang auf seiner Gitarre die frei schwingende Saite sei, weiss er, dass diese Länge Mensur heisst. Ich ergänze: „Sie liegt meist zwischen 63 und 65 cm. Häufig ist eine Mensur von 64 cm. Dazwischen liegen elf Bünde, damit wir vom Grundton bis zur Oktave 12 Halbtonschritte bekommen. Bei dieser pythagoräischen Stimmung wird nach einfachen Zahlenverhältnissen unterteilt: 1:2 für die Oktave, 2:3 für die Quinte, 3:4 für die Quarte, 4:5 für die grosse Terz. Würden wir jetzt aber in einer weit entfernten Tonart wie E-Dur (mit 4 Kreuzen) oder in Es-Dur (mit 4 b) spielen, so hätten wir keine wohlklingenden Schwingungsverhältnisse mehr. Früher wurden Spinette und Klaviere während eines Konzerts zwischen verschiedenen Stücken umgestimmt. Um dies zu umgehen, hat man im 15. / 16. Jahrhundert die Einteilung mit einer geometrischen Folge ausgeglichen, so dass Musikstücke, gespielt auf Instrumenten mit fester Tonschritteinteilung wie Klavier, Gitarre, Flöte usw., in allen Tonarten in derselben Reinheit ertönen. Diese Stimmung nennen wir temperiert. Den Unterschied zur pythagoräischen Stimmung hört allerdings nur ein geübtes Ohr.“ An der Tafel zeichne ich die Saite mit den 64 cm Länge.



Nachdem klar ist, dass die Folge aus 13 Gliedern besteht, ergibt sich:

$$64 = 32 \cdot q^{12}, \text{ woraus folgt: } q = \sqrt[12]{2}$$

Eine Tabelle ergibt:

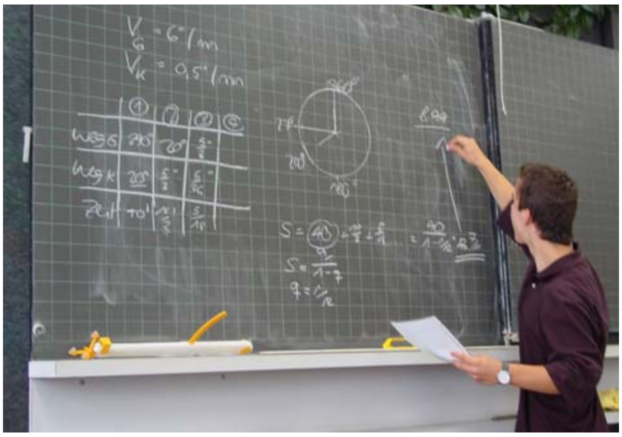
	Oktave	Septime	Sexte	Quinte	Quarte	Terz	Sekunde	Prime
pythagoräisch	1/2	8/15	3/5	2/3	3/4	4/5	8/9	1
	32	34.133	38.400	42.667	48.000	51.200	56.889	64
temperiert	0.5000	0.5297	0.5946	0.6674	0.7492	0.7937	0.8909	1.0000
	32	33.903	38.055	42.715	47.946	50.797	57.018	64

Die Berechnungen zeigen, wie wenig sich die Saitenlängen bei den beiden Stimmungen unterscheiden. Bemerkenswert ist allerdings, dass die temperierte Musik auf einem *irrationalen* Verhältnis basiert. Hier gelten die einfachen rationalen Beziehungen von Pythagoras nicht mehr! Erst das irrationale Verhältnis erlaubt diesen perfekten Ausgleich.
Der Vorgang des Halbierens der Saite kann gegen 0 hin, wie bei Achilles und der Schildkröte, beliebig fortgesetzt (gedacht!) werden. Nach jeder Halbierung ertönt eine höhere Oktave. Natürlich stossen wir auch bei diesem Beispiel bald einmal an physikalische Grenzen. Einerseits wird der Ton zu hoch, um noch gehört zu werden, anderseits ist die Saite bald zu dick im Vergleich zur Länge und schwingt nicht mehr richtig.

Nach diesem Exkurs in die Musik ist die erste Lektion bereits wieder vorbei. Die zweite Lektion ist ganz für das individuelle Arbeiten an den Beispielen da. Für den kommenden Montag, an dem wir ausnahmsweise drei Lektionen zur Verfügung haben, kündige ich den Abschluss des Lehrstücks an. Als Hausaufgabe bitte ich, Zenon einen Brief zu schreiben als Reaktion auf seine provokative Geschichte von Achilles und der Schildkröte. An Jan und Jonas, die sich beide mit dem Bild von Escher befassen, verteile ich einen Textabschnitt über das Unendliche bei M. C. Escher. Dieser wird am kommenden Montag im Finale Thema sein.

Lektionen 15/16/17

Heute haben wir drei Lektionen vor uns. Am kommenden Mittwoch wird dann noch eine Probe über das Thema stattfinden. Ich stelle kurz den von mir vorgesehenen Ablauf der heutigen Lektionen vor: Vorerst werden wir einige der Parallelsituationen ansehen, dann im Finale den Überblick über das Lehrstück schaffen, die Briefe an Zenon ins Zentrum rücken, uns für eine Rückmeldung nochmals auf das Lehrstück besinnen und schliesslich individuell Fragen klären, die bezüglich der bevorstehenden Probe noch relevant sein könnten. Die Klasse erklärt sich mit diesem Programm einverstanden. Als erstes erläutert Marcel an der Tafel und am Wecker eindrücklich die verschiedenen Aufholvorgänge. Experimentell an der Uhr hat er für das Übereinanderliegen der beiden Zeiger nach 8 Uhr die Zeit 8 h 44' gefunden. Der Minutenzeiger bewegt sich mit 360°/h, also 6°/min. und der Stundenzeiger mit 30°/h, also 0.5°/min. Also ist dieser ein Zwölftel so schnell wie der Minutenzeiger.



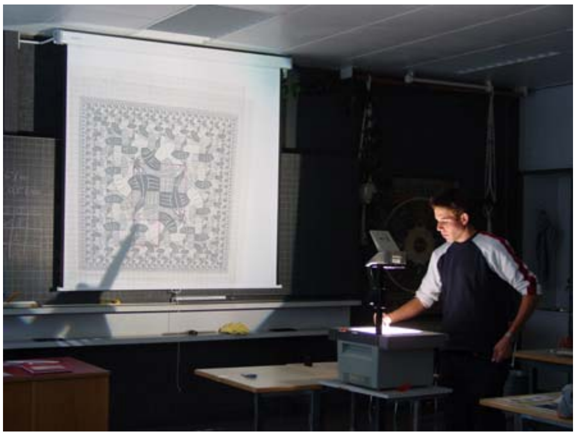
Während der Minutenzeiger in 40 Minuten 240° bis zur VIII zurücklegt, bewegt sich der Stundenzeiger 20° weiter. Bewegt sich der Stundenzeiger 20°, so avanciert der Minutenzeiger um 20°/12, also 5/3°, usw. Seine Tabelle verdeutlicht den Vorgang, die Schülerinnen und Schüler nicken.

Aufholvorgang	①	②	③	④
Weg_M	240°	20°	5/3°	
Weg_S	20°	5/3°	5/36°	
Zeit	40'	10/3'	5/18'	

Daraus ergibt sich für die Zeit $T = 40 + 10/3 + 5/18 + \ . \ . \ .$ mit $q = 1/12$, da $v_S = v_M/12$. Marcel liefert ein sehr gutes Resultat für diese Summe. Er hat etwa 8 Glieder mit dem Taschenrechner zusammengezählt und dann gesehen, dass der Zuwachs nur noch minimal ist. Mit unserer hergeleiteten Formel erhalten wir exakt T = 40/(1-1/12) = 480/11' = 43' 38''. Von einem andern Lösungsweg mit Geradengleichungen, wie wir sie vor bald zwei Jahren bewältigt haben, wollen weder Marcel noch die Klasse jetzt etwas wissen. Es ist erstaunlich für mich, dass der Lösungsweg mit der nicht abbrechenden Reihe mehr Gefallen findet.

Als nächstes wenden wir uns dem Escherbild zu. Jan macht auf die vier Fische im Zentrum aufmerksam und ergänzt, dass nach aussen alles mit einem bestimmten Faktor kleiner wird. Mehr kann er nicht sagen, trotz des Textes, den ich ihm und Jonas letztes Mal gegeben habe. Simon, der sich schon seit einiger Zeit mit dieser Figur beschäftigt hat, übernimmt das

Szepter. Am Hellraumprojektor zeigt er, wie sich die Quadrate nach aussen immer mit dem Faktor 0.5 verjüngen, wie bei Achilles, der doppelt so schnell ist wie die Schildkröte, nur ist das Ganze jetzt zweidimensional sichtbar. Nach aussen nähert es sich asymptotisch einer klar bestimmten Grenze, das Bild verfeinert sich in unendlichem Prozess, bleibt aber eingebunden in einem endlichen Quadrat. Und immer wieder finden wir dieselben Figurenkonstellationen. Wiederum zeigt sich die Unendlichkeit in der ewigen Wiederkehr des Gleichen.



Die Klasse kommt zusammen und ich zeige aus einem Buch (Ernst 2002, S. 102ff) einige weitere Bilder, die mit dem Unendlichen verbunden sind. Bilder mit Prozessen, die von aussen nach innen verlaufen, spiralförmige Prozesse, nichteuklidisch aufgebaute Bilder.

Jetzt kommt Betime mit der Parallelgeschichte: Wir essen einen Kuchen, nehmen aber immer nur die Hälfte und dann vom Rest wieder die Hälfte, usw. Ich provoziere und spreche von paradiesischen Zuständen. Betime relativiert, wir hätten bald nur noch kleinste Krümel, bald nur noch Moleküle oder Atome, die wir sogar noch spalten müssten. Ich nutze die Gelegenheit, um nochmals auf die physikalischen Grenzen unserer Modelle aufmerksam zu machen. Dass wir Atome nicht beliebig halbieren können, daran haben wir uns gewöhnt, dass aber Strecken und die Zeit nicht beliebig teilbar sein sollen, das ist uns doch eher fremd, auch wenn viele Physiker dies heute postulieren. Die Mathematiker entwickeln ihr Fachgebiet, als wären Raum und Zeit beliebig teilbar. Die Physiker rechnen mit diesen Grundlagen und erhalten – o Wunder! – Resultate, die exakt der Natur entsprechen. Dies ist doch seltsam und bemerkenswert. Ein Moment des Wunderns ist angesagt!

Zenon hat verschiedenste paradoxe Geschichten erzählt und so bringe ich als Zenon noch eine dritte in die Runde: „Meine lieben Athenerinnen und Athener! Seid ihr euch bewusst, dass wir uns nicht bewegen können? Bewegung ist Illusion! Wie sollte ich mich von A nach B bewegen? Bevor ich in B ankommen könnte, müsste ich mich zur Mitte von A und B bewegen. Bevor ich aber dorthin gelangte, müsste ich die Hälfte der Distanz zwischen A und dieser Mitte zurücklegen. Um dies zu tun, müsste ich wiederum erst die Hälfte davon zurücklegen und so weiter. Zu welchem Punkte sollte ich mich denn als erstes bewegen? So ist uns doch allen klar, dass es Bewegung überhaupt nicht geben kann! Bewegung ist reine Illusion!“ Während ich erzähle, merke ich, wie sich die Gesichter bald verändern. Ein „Aha!“, eine Erhellung ist zu erkennen als Zeichen, dass die Argumentation verstanden wird.

Michel und Philippe möchten noch eine weitere Geschichte hören. So erläutere ich, jetzt nicht mehr als Zenon, die vierte der bekannten Bewegungs-Paradoxien (Falletta 1988, S. 205ff), die bekannte Paradoxie vom fliegenden Pfeil. Der Pfeil kann in jedem beliebigen Moment beobachtet werden: keine Bewegung ist zu erkennen! Dies ist in jedem Moment wahr. Also kann ein Pfeil niemals in Bewegung sein. Kann überhaupt eine kontinuierliche Veränderung durch eine Reihe von Zuständen zustande kommen? (vgl. dazu Bertrand Russell 2000, S. 811f)

Nach einem Moment des Nachdenkens kann ich es nicht verkneifen, die Lektion mit dem zu den Bewegungsparadoxien gehörenden Kalauer zu beenden: „Es heisst, ein Schüler des

Zenon hätte die ewigen Beweisführungen gegen die Bewegung nicht mehr ausgehalten und sei deshalb dauernd während der Reden des Zenon auf und ab gegangen, bis Zenon schliesslich verärgert gerufen habe: ‚Kannst du nicht endlich einen Augenblick stillstehen?' Worauf der Schüler ruhig erwidert habe: ‚Willst du damit sagen, dass ich mich bewege?'"

Finale

Zu Beginn der zweiten Lektion wende ich die Tafel. Verschiedenste Darstellungen aus den letzten 16 Lektionen sind chronologisch aufgehängt. Gemeinsam gehen wir den Prozess durch: Von der Geschichte, ihrer nonverbalen Darstellung, dem inneren Konflikt zwischen Erfahrung und Verstand zu den graphischen und rechnerischen Bearbeitungsversuchen, den resultierenden Formeln und der Ausweitung in verschiedenste Problemsituationen, die wir intensiv bearbeitet haben. Ganz rechts habe ich ein gelbes Couvert als Briefkasten für Zenon aufgehängt.

Und wie lauten die Briefe an Zenon? Ich bin gespannt. Der Reihe nach rufe ich Raffael, Ramona, Michael und Nadine auf. Die Schüler wollen noch weitere Briefe hören und schliesslich werden alle vorgelesen. Ich bin positiv überrascht, dass alle einen Brief mitgebracht haben, ohne Ausnahme! Zwar zieht sich das Lesen in die Länge, dafür bietet sich da und dort die Möglichkeit einer zusätzlichen Bemerkung, einer Vertiefung, einer gemässigten Korrektur. Es folgen hier ein paar Beispiele von Briefen:

Lieber Zenon
Das Achillesproblem ist sehr komplex und ich hatte sehr lange, bis ich begriff, was du meinst. Doch selbst du musst zugeben, dass wenn man die Zeit laufen lassen würde und in der Realität nachspielen würde, deine Theorie nicht erfüllt wäre.
Das Problem, das du uns aufgabst ist, dass man eine endliche Strecke in unendliche Abschnitte unterteilen kann. So ist es möglich, dass man nie mehr zur Klassentür hinkommt.
Ich habe mich gefreut, wieder einmal einen Denktriathlon zu vollführen.
Alles Gute
Michael

Hier war Gelegenheit, nochmals auf die heikle Bedeutung des Wörtleins „nie“ aufmerksam zu machen. In gewissem Sinne eine Präzisierung steckt im folgenden Brief:

Lieber Zenon
Wie sicher schon viele haben wir uns mit deinem Rätsel befasst, und habe es nach einigem Studieren auch knacken können.
Läuft A. an den Startpunkt von S., hat S. in dieser Zeit eine gewisse Strecke zurückgelegt. … Wir kennen das Weitere.
Da S. ja immer wieder Zeit zur Verfügung steht, kann sie auch ein kleines Stück zurücklegen. Dies funktioniert, solange du bei den Aufholvorgängen bleibst. Es gibt also unendlich viele Aufholvorgänge in einer gewissen Zeit. In dieser Zeit kann A. S. nicht überholen.
Erstaunlich ist der tägliche Gebrauch. Laufen wir zur Tür hinaus, machen wir unendlich viele Abstandsverkleinerungen, kommen aber doch zur Tür hinaus. Wir sind also Meister der Unendlichkeit.
Achim

Ein gewaltiger Schlusssatz!

Zenon
Wir haben im Unterricht deine Aporie: „Achilles und die Schildkröte“ bearbeitet und studiert. Leider, muss ich sagen, dass obwohl wir über die Aporie stundenlang diskutiert haben und uns den Kopf darüber zerbrachen, glaube ich, dass sie für viele Schüler, mich einbezogen, immer noch sehr verwirrend und unglaublich ist. Es ist jedoch erstaunlich, wie du darauf gekommen bist, denn es braucht viele Überlegungen, um es dann noch auszuformulieren und zu beweisen. Ich glaube einfach, dass es in der Zeit, in der ich lebe, nicht möglich ist, dass solche Theorien in der Gesellschaft Anerkennung und Akzeptanz erhalten, denn heute hinterfragt man alles und stellt Vergleiche an mit der Realität und da kann es nicht sein, dass eine Schildkröte schneller als ein Mensch ist.
Ich kann es nun akzeptieren, jedoch verstehen werde ich es nie ganz, denn für mich gibt es immer noch zu viele Widersprüche und offene Fragen.
Betime

Das eingehende Hinterfragen und Vergleichen mit der Realität hat offenbar bei Betime keine Klärung gebracht. Auf meine Nachfrage hin konnte Betime leider keine der offenen Fragen oder der Widersprüche formulieren.

Zenon, Philosoph zu Troja
Als wir, eine Gruppe wissbegieriger Gymnasiasten, dem von euch beschriebenen Problem – das Rennen zwischen Achilles und der Schildkröte – erstmals begegneten, war die Skepsis gross. Ihr hattet eine Geschichte konzipiert, in der (nach einigen Erläuterungen unseres

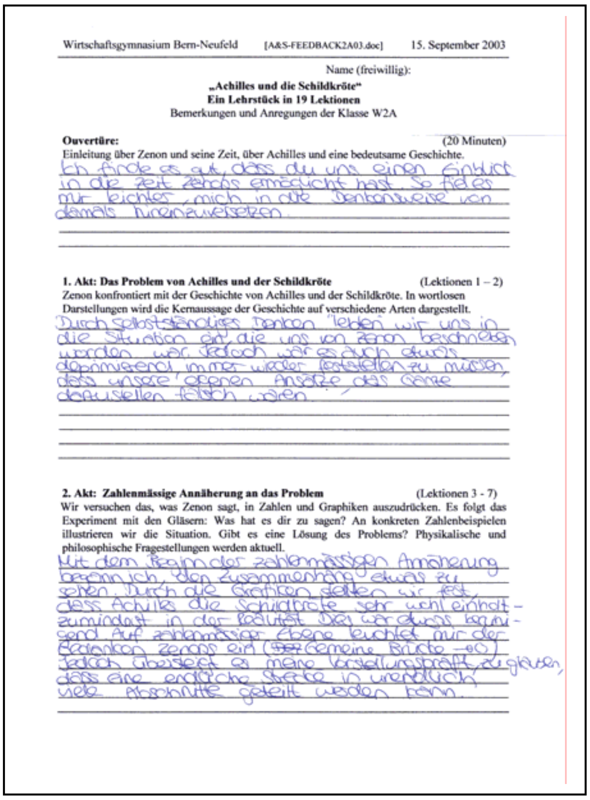
Mentors …) schlüssig und nachvollziehbar ein Paradoxon plausibel gemacht wurde: In einer endlichen Zeitspanne sollen eine unendliche Anzahl Vorgänge stattfinden. Dass sich die Geister an dieser unermesslichen Vorstellung schieden, mag ja ganz in eurem Sinne liegen – indes brachten wir auch konkrete Resultate zustande. Ausgehend von eurer Erzählung erweiterte sich der Begriff der „Unendlichkeit“ für jeden einzelnen von uns im Laufe der Diskussion. Oder besser: Er wurde fassbarer. Mit dem Begriff des „Grenzwertes“ verlor diese abstrakte „Unendlichkeit“ ihr doch eher diffuses Erscheinungsbild, auf einmal wurde sie zumindest ansatzweise greifbar und ermesslich. Ob ihr die Geschichte über den Wettlauf nun als philosophisches Gedankenspiel oder als mathematisches Modell gedachtet – der denkerische Ansatz ist enorm.
Freundliche Grüsse
Philippe Lionnet

Eine breite Palette von Briefen hat gezeigt, wie unterschiedlich die Verarbeitungs- und Erkenntniswege verlaufen. Während für die einen der Widerspruch verschwunden ist, sind andere nach wie vor ein wenig verwirrt.

Zum Abschluss der Stunde lese ich den Abschnitt von Toeplitz vor (vgl. Kasten zu Beginn dieses Kapitels, S. 177).

4.4 Feedback der Schüler zum Lehrstück

Am Anfang der dritten Stunde füllen die Schülerinnen und Schüler meinen Feedback-Fragebogen aus. Unten abgebildet ist derjenige von Nadine (6). Anschliessend bleibt noch Zeit, individuell an einzelnen Aufgaben zu arbeiten, denn am kommenden Mittwoch wird eine Probe über dieses Thema stattfinden.



Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [A&S-FEEDBACK2A03.doc] 15. September 2003

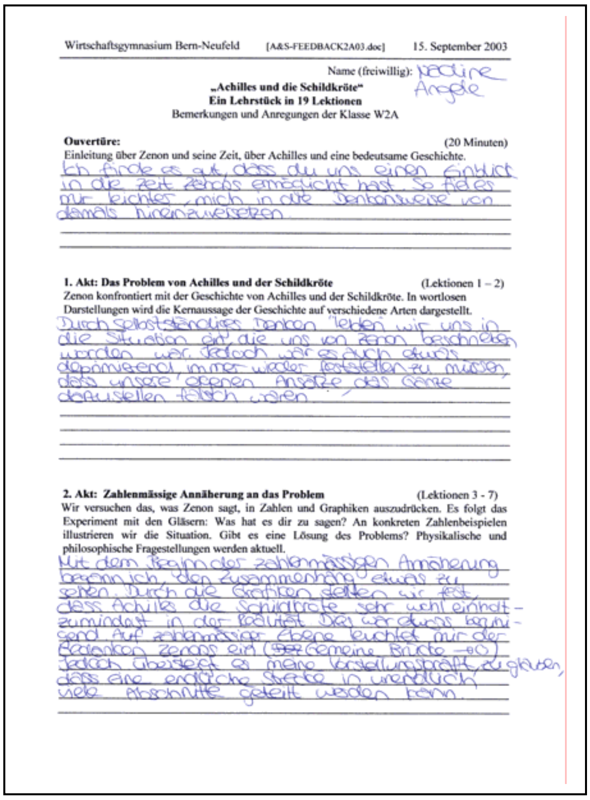
Name (freiwillig):

„Achilles und die Schildkröte“
Ein Lehrstück in 19 Lektionen
Bemerkungen und Anregungen der Klasse W2A

Ouvertüre: (20 Minuten)
Einleitung über Zenon und seine Zeit, über Achilles und eine bedeutsame Geschichte.
Ich finde es gut, dass du uns einen Einblick in die Zeit Zenons ermöglicht hast. So fiel es mir leichter, mich in die Denkensweise von damals hineinzuversetzen.

1. Akt: Das Problem von Achilles und der Schildkröte (Lektionen 1 – 2)
Zenon konfrontiert mit der Geschichte von Achilles und der Schildkröte. In wortlosen Darstellungen wird die Kernaussage der Geschichte auf verschiedene Arten dargestellt.
Durch selbstständiges Denken lebten wir uns in die Situation ein, die uns von Zenon beschrieben worden war. Jedoch war es auch etwas deprimierend, immer wieder feststellen zu müssen, dass unsere 'offenen' Ansätze, das Ganze darzustellen falsch waren.

2. Akt: Zahlenmässige Annäherung an das Problem (Lektionen 3 - 7)
Wir versuchen das, was Zenon sagt, in Zahlen und Graphiken auszudrücken. Es folgt das Experiment mit den Gläsern: Was hat es dir zu sagen? An konkreten Zahlenbeispielen illustrieren wir die Situation. Gibt es eine Lösung des Problems? Physikalische und philosophische Fragestellungen werden aktuell.
Mit dem Beginn der zahlenmässigen Annäherung begann ich, den Zusammenhang etwas zu sehen. Durch die Grafiken stellten wir fest, dass Achilles die Schildkröte sehr wohl einholt – zumindest in der Realität. Das war etwas beruhigend. Auf zahlenmässiger Ebene leuchtet mir der Gedanken Zenons ein (Gemeine Brüche → 0). Jedoch übersteigt es meine Vorstellungskraft, zu glauben, dass eine endliche Strecke in unendlich viele Abschnitte geteilt werden kann.



Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [A&S-FEEDBACK2A03.doc] 15. September 2003

Name (freiwillig): Nadine Angele

„Achilles und die Schildkröte“
Ein Lehrstück in 19 Lektionen
Bemerkungen und Anregungen der Klasse W2A

Ouvertüre: (20 Minuten)
Einleitung über Zenon und seine Zeit, über Achilles und eine bedeutsame Geschichte.
Ich finde es gut, dass du uns einen Einblick in die Zeit Zenons ermöglicht hast. So fiel es mir leichter, mich in die Denkensweise von damals hineinzuversetzen.

1. Akt: Das Problem von Achilles und der Schildkröte (Lektionen 1 – 2)
Zenon konfrontiert mit der Geschichte von Achilles und der Schildkröte. In wortlosen Darstellungen wird die Kernaussage der Geschichte auf verschiedene Arten dargestellt.
Durch selbstständiges Denken lebten wir uns in die Situation ein, die uns von Zenon beschrieben worden war. Jedoch war es auch etwas deprimierend, immer wieder feststellen zu müssen, dass unsere 'offenen' Ansätze, das Ganze darzustellen falsch waren.

2. Akt: Zahlenmässige Annäherung an das Problem (Lektionen 3 - 7)
Wir versuchen das, was Zenon sagt, in Zahlen und Graphiken auszudrücken. Es folgt das Experiment mit den Gläsern: Was hat es dir zu sagen? An konkreten Zahlenbeispielen illustrieren wir die Situation. Gibt es eine Lösung des Problems? Physikalische und philosophische Fragestellungen werden aktuell.
Mit dem Beginn der zahlenmässigen Annäherung begann ich, den Zusammenhang etwas zu sehen. Durch die Grafiken stellten wir fest, dass Achilles die Schildkröte sehr wohl einholt – zumindest in der Realität. Das war etwas beruhigend. Auf zahlenmässiger Ebene leuchtet mir der Gedanken Zenons ein (Gemeine Brüche → 0). Jedoch übersteigt es meine Vorstellungskraft, zu glauben, dass eine endliche Strecke in unendlich viele Abschnitte geteilt werden kann.

Feedbacktabelle zum Lehrstück: „Achilles und die Schildkröte“

Bemerkungen und Anregungen der Klasse W2A vom 15. September 2003

	Ouvertüre: Einleitung über Zenon und seine Zeit, über Achilles und eine bedeutsame Geschichte.	**I. Akt: Das Problem von Achilles und der Schildkröte** Zenon konfrontiert mit der Geschichte von Achilles und der Schildkröte. In wortlosen Darstellungen wird die Kernaussage der Geschichte auf verschiedene Arten dargestellt.	**II. Akt: Zahlenmässige Annäherung an das Problem** Wir versuchen das, was Zenon sagt, in Zahlen und Graphiken auszudrücken. Es folgt das Experiment mit den Gläsern. Was hat es dir zu sagen? An konkreten Zahlenbeispielen illustrieren wir die Situation. Gibt es eine Lösung des Problems? Physikalische und philosophische Fragestellungen werden aktuell.	**III. Akt: Vom Konkreten zum Allgemeinen** Durch Verallgemeinerung erhalten wir die Formeln für die abbrechenden und für die nicht abbrechenden geometrischen Reihen. Theorieblätter stellen das Entwickelte in einen theoretischen Rahmen.	**IV. Akt: Ausweitung und Vertiefung der Problematik** Die „Zenonsche Problematik und Betrachtungsweise“ lässt sich vielfältig übertragen. Wir schauen uns Bilder von M. C. Escher an und vergleichen Parallelsituationen miteinander. Verschiedene Ansätze liefern dieselben Resultate.	**Finale:** Wir betrachten nochmals die Geschichte, verfolgen den Lauf unserer Darstellungen, Gedanken und Argumente. Zur individuellen Standortbestimmung und da wir Zenon nicht persönlich antworten können, schreiben wir ihm Briefe.	**Ergänzende Bemerkungen und Anregungen** Was denkst du über diese Unterrichtseinheit? Was war für dich besonders eindrücklich, besonders lehrreich? Wo siehst du Verbesserungsmöglichkeiten?
Jason (1)	Ich finde es sehr gut, dass Sie sich die Zeit genommen haben, eine Einleitung gemacht haben. So habe ich mich besser ins Thema einfühlen können.	Das Darstellen hat mir teilweise Mühe bereitet, doch ich war froh, dass wir genügend Zeit zur Verfügung hatten. Ich bin in der Mathematik oft sehr begriffsstutzig und durch das Verstehen von anderen Lösungen habe ich verschiedene Perspektiven anschauen können und mir davon ein Bild gestalten.	Das Experiment mit den Gläsern war beruhigend, weil ich merkte, dass auch Sie nicht der Überzeugung waren, dass das Achillesbeispiel praktisch physikalisch „logisch“ machbar ist. Dass es durch Zahlen durchaus mathematisch möglich ist, eine Annäherung zu gestalten.	Die Theorieblätter waren hilfreich, da alles endlich einmal klar dargelegt wurde. Für mich war es dennoch immer noch nicht ganz einleuchtend. Ich brauchte einige Zeit diese Formeln und Zahlen zu begreifen. Von Zeit zu Zeit ist mir äussert schwer gefallen, Ihren mathematischen Schritten an der Wandtafel zu folgen. Für mich ging dies alles ein wenig zu schnell. Auch jetzt komme ich auf den Theorieblättern nicht überall mit allen Begriffen ins Reine.	Die verschiedenen Beispiele schafften wiederum Klarheit und zeigten, wie die wilde Zenontheorie sonst noch angewendet werden konnte. Die Mathematik mit solchen Beispielen zu vergleichen, war gut. Ich gewann ein bisschen mehr Vertrauen in Zahlen. Eschers Bilder sind verwirrend. Sie haben von mir aus gesehen wenig mit Kunst, aber vielmehr mit Mathematik zu tun. Ich fand dieses Wirrwarr von immer kleiner werdenden Figuren irritierend und wäre selbst nie auf die Lösung seines Problems gestossen.		Ich fand es äusserst gut, dass wir generell genügend Zeit hatten, uns mit dem Gesagten im Unterricht auseinanderzusetzen. Es war hilfreich, dass so viele praktische Beispiele besprochen wurden. Ich weiss, dass mir Themen einfacher logisch werden, wenn ich mitdenken und mitdiskutieren kann. Visuelle Beispiele regen zum Denken an. Da wir nicht allzu schnell vorankamen, hoffe ich, dass die Probe dem Unterricht ähnlich sein wird, und nicht nur zahlen- und formellastig fordern wird.
Roman (2)	Es war knapp, aber spannend.	Anfangs hat mich die Geschichte ziemlich genervt, weil ich die Suche nach einer Lösung des Problems als ausweglos betrachtete. Mittlerweile übt die Geschichte sogar eine gewisse Faszination auf mich aus.		Hilfreich. Von nun an konnten wir die Theorie auch an einfachen Problemen anwenden.	Gute Vorgehensweise, dass jeder ein Beispiel bearbeitet und dann den andern vorgestellt hat.	Nicht sehr lehrreich, aber dafür sehr interessant.	Die Herleitung der Formel für die nicht abbrechende Reihe ist im Skript für meinen Geschmack zu wenig ausführlich dargestellt.
Betime (3)	Es war spannend, was von Achilles war. Dies lenkte die Aufmerksamkeit auf Sie, weil alle wissen wollten, was Achilles uns zu sagen hatte.	Es war schon ein wenig merkwürdig, nachdem Sie uns die Geschichte erzählt hatten, waren wir noch ziemlich verwirrt und hätten danach noch wortlose Darstellungen inszenieren sollen. Es war eine harte Konfrontation, jedoch erwies sie sich als sinnvollste Weise, das Problem anzugehen. Denn unser eigenes Nachdenken wurde angeregt.	Ich konnte das Experiment mit den Gläsern nicht einordnen, es verwirrte mich anfangs wieder, doch es machte einen Sinn, weil es unter anderem zeigte, dass das Denken weitaus mehr im Stande ist zu akzeptieren als die Tätigkeit. Wir glauben, dass man es immer in neue Gläser schütten kann, jedoch physikalisch weniger möglich.	Es ist immer brauchbar, eine Zusammenfassung mit allen Formeln und Erläuterungen zu besitzen. So hat man auch ein Nachschlageblatt, wenn einem etwas noch unklar scheint.	Auch all die andern Beispiele waren anfangs sehr unklar und allein nicht lösbar, doch nach der Besprechung war es einfacher, auch an solche Beispiele ranzugehen, denn man kannte das, so geht die Taktik! Im Nachhinein waren all die Parallelgeschichten und Beispiele hilfreich.		+ Es gibt Dinge, die man nicht erklären kann, oder bei denen physiologische Aspekte nicht mit dem mathematischen oder mentalen Aspekt zusammenpassen. - Die Diskussionen im Kreis waren zu zeitaufwändig. Es ist zwar sehr schwierig, ein solches Thema zu bearbeiten, aber die Kreisdiskussionen entwickelten sich zu unruhigen, aneinander vorbei redenden Lektionen.
Dominik (4)		Dieses Vorgehen hat mir sehr geholfen, die Geschichte fassbarer zu machen und ich konnte mir vorstellen, was Zenon gemeint hat.	Durch die Grafiken war schnell zu erkennen, dass Zenon nur bedingt richtig liegt, denn die Zeit wird nicht klar berücksichtigt. Das Experiment mit den Gläsern hat dann auch gezeigt, wie schwierig es am Schluss ist, den Abstand zwischen Achilles und der Schildkröte zu bestimmen.	Durch das Erstellen dieser Formel wurde mir klar, dass Zenons Theorie stimmt, jedoch nur mathematisch.	Hier hat es mich verblüfft, dass beim Würfelturm alle Würfel nicht einen unendlich hohen Turm geben müssen. Das Bild von Escher zeigte mir, dass all das, was wir in der letzten Zeit erarbeitet haben, auch eine Anwendung findet.		Diese Unterrichtseinheit hat mir die Unendlichkeit ein wenig näher gebracht.

Philippe (5)	Für meinen Geschmack natürlich zu kurz, aber sicher eine gelungene Einstimmung.	Das Thema fesselte mit seinem offensichtlichen Paradoxon, da die Erklärung trotz Plausibilität unseren Vorstellungen widersprach. Zu Beginn zu wenig zielgerichtet, die Grundaussage blieb aber sicher haften. Eventuell würde eine Art „Kriterienliste“ das Verfahren abkürzen…	Die philosophischen Ansätze gaben der Materie sichtliches Leben, die Parallele zwischen dem Rennen und den Gläsern half ebenfalls, den Themenbereich zu erweitern. Vielleicht hätten die konkreten Ergebnisse jeder Lektion festgehalten werden müssen, um weniger Zeit mit „Auffrischen“ zu verplempern.	Die Verallgemeinerung lief zu schnell ab, unter Umständen hätte ein gemeinsames Durchgehen der Theorieblätter besser gewirkt.	Das gruppenweise Bearbeiten der Aufträge war ein guter Ansatz, wir konnten uns intensiver mit einem Problem befassen. Auch wenn die Verteilung natürlich Glückssache war … Escher war ein anschaulicher Abschluss.	Die „Briefe“ zeigten sicher den Verlust an Verwirrung auf, auch wenn ihr praktischer „Nutzen“ nicht unbedingt klar greifbar ist.	Ich mochte die Verbindung der Mathematik mit der Philosophie (Ansatz der „Unendlichkeit“) und das Arbeiten mit einem antiken Beispiel. Die Denkanstösse waren sicher gut, auch wenn die mathematische Komponente gelegentlich unterging.
Nadine (6)	Ich finde es gut, dass du uns einen Einblick in die Zeit Zenons ermöglicht hast, So fiel es mir leichter, mich in die Denkweise von damals hineinzuversetzen.	Durch selbständiges Denken „lebten“ wir uns in die Situation ein, die uns von Zenon beschreiben worden war.	Mit dem Beginn der zahlenmässigen Annäherung begann ich den Zusammenhang etwas zu sehen. Durch die Grafiken stellten wir fest, dass Achilles die Schildkröte sehr wohl einholt, zumindest in der Realität. Dies war etwas beruhigend. Auf zahlenmässiger Ebene leuchtet mir der Gedanken Zenons ein (Brüche $\rightarrow$ 0). Jedoch übersteigt es meine Vorstellungskraft zu glauben, dass eine endliche Strecke in unendlich viele Abschnitte geteilt werden kann.	Mit dem Verstehen dieser Theorieblätter habe ich ein wenig Mühe, da sie mir sehr komplex erscheinen. Die Anwendungen finde ich angenehmer	Plötzlich tauchten Zusammenhänge zur Realität auf, wie z. B. das Bauen des Turmes im Kinderzimmer. Sobald ein Beispiel vorliegt, das den Beschreibungen entsprechend nachgeahmt werden kann, sind die Gleichungen einleuchtend und klar. Die Bilder von M. C. Escher waren eine angenehme Untermalung – auch einmal noch etwas fürs Auge.	Ich finde die Idee mit dem Brief gut. So reflektieren wir nochmals unser Vorgehen und unsere Gedanken, durch die wir schliesslich der Lösung des Problems näher kommen konnten.	Zu Beginn war ich überfordert. Das Ganze war sehr abstrakt und wirkte beinahe einschüchternd auf mich. Ich denke, durch die langen Gespräche am Anfang läuft man Gefahr, abzuschweifen, da viele Gedanken oftmals wiederholt werden. Ich hatte das Gefühl, wir bewegen uns im Kreis. Das Einbeziehen verschiedener anschaulicher Beispiele erleichterte dann aber das Verstehen.
Simon (7)	Geschichten und Mythen finde ich immer spannend – diese Einführung gefiel mir deshalb.	Die Geschichte schuf Verwirrung, was zu diesem Zeitpunkt jedoch auch sinnvoll war. Das Arbeiten in Gruppen gefiel mir.	War teilweise etwas langfädig, jedoch spannend, das Problem immer wie genauer zu realisieren und es mit der Zeit in den Griff zu bekommen.	Zum Vergleich mit den Lektionen 3 bis 7 gab es in der 8. Lektion für meinen Geschmack zuviel neuen Stoff auf einmal. Ich brauchte länger, um diesen zu verarbeiten.	Sehr spannend, auf was sich diese Problematik alles übertragen lässt und wie gut man Resultate durch die Formeln herausfindet. Bild Escher zeigt nochmals die Problematik der zenonschen Theorie auf: „Unendlich viele Fische in einem beschränkten Raum.“	Die Briefe, die wir einander vorlasen, waren vereinzelt sehr interessant und allgemein amüsant.	+ Zenon war mehrere Male live bei uns. Gruppenarbeiten Ausweitung der Problematik - Teilweise etwas langfädig
Achim (8)	Es war interessant, dies einmal zu hören, obwohl einem viel nicht geblieben ist (Zeit, Lebenswerke, Abfolge, Namen …)	Durch das persönliche Nachdenken wurden jedem die Problematik und Komplexität des Rätsels bewusst. Es wurde jedoch noch nichts klar, alle formulierten Antithesen.	Nach und nach begannen in unseren Köpfen die Lämpchen aufzuleuchten. Der Begriff der Unendlichkeit wurde konkretisiert. Man kam dem Schlüssel des Rätsels langsam auf die Spur. Dinge der Unmöglichkeit wurden überdacht.	Erkenntnis, dass Unendliches im Endlichen Platz hat, kam auf. Die Theorieblätter, na ja …	Das Gelernte konnte nun an verschiedenen Ansätzen angewendet, modifiziert werden. Dadurch wurde das Ganze noch klarer. M. C. Eschers Bilder sind genial.	Die Briefe waren amüsant, viel Nützliches gebracht haben sie nicht.	Es war gut, wieder einmal durch eigenes Denken auf die Lösung eines Problems zu stossen. Die mathematische Erfassung war nachvollziehbar und interessant, da unendliches Streben auf einen Punkt gebracht werden konnte.
Tanja (9)	Die Einleitung hat mir sehr gefallen, da man damit einen Bezug auf das Thema bekommt. Zudem finde ich die Geschichte über Troja (die jetzt ja auch verfilmt wird) sehr interessant. Vielleicht kann man in 1-2 Jahren die Einleitung so beginnen: „Kennt ihr den Film …“	Es war am Anfang schwierig, etwas darzustellen ohne zu wissen, auf was man dann später hinaus will. Zudem waren wir alle noch der Meinung, dass Zenons Äusserung falsch sein musste, da sie ja mit der Realität nicht übereinstimmt.	Das war wiederum sehr gut, da wir endlich das Vorgegebene in der Realität sehen $\rightarrow$ Gläserexperiment. Nun konnte man nicht sagen, dass der Glasinhalt nicht unendlich teilbar ist.	Die Theorieblätter kamen im richtigen Moment, da man langsam in all diesen Behauptungen, Widersprüchen, Theorien nicht wusste, welche richtig waren und für uns wichtig sind. Somit haben die Blätter für Klarheit gesorgt.	Die Beispiele waren gut erdacht und es war gut, Aufgaben zu lösen ausser nur Theorie zu lesen. $\rightarrow$ Es war gut das Theoretische anzuwenden.	Das Finale war gut ausgearbeitet. Wir haben einen Kreis geschlossen, machten eine Kurzrepetition und die Parallelsituationen zeigten dieselbe Geschichte mal anders. Auch der Brief war gut, da man sich somit alles nochmals im Kopf überdacht hatte.	Diese Unterrichtseinheit wird mir sicher in Erinnerung bleiben, da wir hier mit „Besuchen“ sowie Experimenten, aber auch als Klasse dem Thema Schritt für Schritt näher kamen. Alles in allem war es gut und sollte so weiter übernommen werden. Es war sehr gut und abwechslungsreich und bleibt einem so besser im Gedächtnis.
AA (10)	Nicht mehr beurteilbar.	Interessante Konfrontation zwischen der Behauptung und der Realität.	Etwas schwerfällig, da sehr philosophisch und ohne zu erkennendes Ziel geführte Diskussion.	Auflösung des Rätsels: Erst hier wurde mir (persönlich) die Grundproblematik, das Grundthema klar. Theorieblätter etwas kompliziert.	Interessante Berechnungsbeispiele.		Am Anfang war's sehr schwerfällig. Themeneinstieg wäre wohl einfacher gewesen: Das Hauptthema (Folgen/ Grenzwerte) gerade nach dem Einstieg bekannt geben, nicht erst in der Vertiefung. Wir diskutierten ohne Fortschritte ziemlich lange am Kernproblem herum, was beinahe eine „Gedankenrotation“ zur Folge hatte: Man kam denkerisch nicht vom Fleck. Jedoch guter Übergang zu konkreten Anwendungsbeispielen.

BB (11)	**Hans verkleidet als Erzähler in der damaligen Zeit war lustig anzusehen. Die Geschichte glaubte ich aber nicht, hielt sie für einen Scherz.**	**Es wurde viel diskutiert und überlegt. Widersprüche, Zweifel waren bei vielen von uns immer noch vorhanden. Es hatten immer noch viele die Vorstellung, dass Achilles sowieso die Schildkröte einholt. (Mit der Zeit wurden die Zweifel etwas kleiner, aber es entstanden viele Fragen.)**	**Die Graphiken aufzustellen war schon ein wenig anspruchsvoll. Das Experiment mit den Gläsern fand ich gut, damit wurde die Geschichte von Zenon etwas glaubwürdiger. Es war eine gute Veranschaulichung der Probleme. Physikalisch gesehen ist es nicht mehr möglich, mathematisch betrachtet aber durchaus möglich.**	**Endlich etwas, was uns unsere (vielleicht) letzten Fragen beantworten konnte. Formeln und Anwendbarkeit sind alle beisammen.**	**Die Aufteilung der Aufgaben und am Schluss die Besprechungen, Erläuterungen und den Lösungsweg gemeinsam gestalten, fand ich eine mal anders geplante Arbeitsweise, aber interessant.**	**Das mit den Briefen finde ich einen guten Schluss.**	**Besonders gut gefiel mir, dass wir oft im Plenum gearbeitet haben und so miteinander zur Lösung des Problems kamen. Die experimentellen Veranschaulichungen halfen, das Problem verstehen und lösen zu können. Bei einigen Aufgaben hatte ich oft keine Ahnung, sass ratlos vor einer Aufgabe. Das nervte mich selbst. Und die Diskussionen im Kreis waren zu lang, man hätte es auch schneller auf den Punkt bringen können.**
CC (12)	**Die Einleitung war sehr informativ und damit konnte man sich das Ganze etwas besser vorstellen und man kannte vor allem auch die Leute (Zenon & Achilles).**	**Bei diesem Schritt, muss ich sagen, war ich schlichtweg überfordert. Wenn man vor so eine unlogischen Geschichte gestellt wird, man hat keine Ahnung auf was die Geschichte hinaus will, ist es doch ziemlich heftig da plötzlich Darstellungen aufzustellen.**	**Das Diskutieren in der Klasse war hingegen ziemlich hilfreich und bei der Geschichte mit den Gläsern kam auch langsam der Gedanke ans Unendliche und somit etwas Klarheit und Verständnis auf.**	**Klare Übersicht (sehr hilfreich) durch die Theorieblätter.**	**Teilweise wieder das Gefühl der Überforderung, aber nachdem wir die Beispiele besprochen hatten, herrschte „ziemlich" schnell Klarheit.**		**Die Idee, ein Rennen in unendlich viele Teile zu zerlegen ist zwar faszinierend, aber vor allem verwirrend. Verbesserungsmöglichkeiten sehe ich kaum. Man ist einfach am Anfang tatsächlich regelrecht überfordert und kommt sich ziemlich hilflos vor bei der ganzen Verwirrung. Das Ganze diskutieren um Achilles war aber fast zu lange.**
DD (13)	**Es war sehr abwechslungsreich, ein Thema nicht einfach aufzudecken, sondern zuerst eine Person (Zenon) vorauszuschicken. Gute Einleitung.**	**Die Art, die Geschichte mit Bildern darzustellen, ist sehr anspruchsvoll und in diesem Zeitpunkt vielleicht noch verfrüht, denn wir haben die Vorstellung in unserem Kopf, dass Achilles die Schildkröte um jeden Preis überholen muss.**	**Mit dem Glas wird die Geschichte gut dargestellt, denn man kann praktisch verfolgen, wie in einem Glas so viel Wasser ist, wie in den darauf folgenden. War ein Schritt zum Einsehen.**	**Gut, dass zuerst eine Einführung vom Lehrer kommt, danach die Blätter zum selber Nachlesen und zum Schluss die Arbeit mit dieser Theorie.**	**Die ersten Versuche der Theorie an der Praxis. Der Schritt, zuerst selber überlegen, danach Hilfe vom Lehrer im Unterricht und danach wieder selber die Mathematik lösen, gefiel mir.**	**Der Brief an Zenon holt alles, was man im Hinterkopf behalten hat, wieder hervor und kann so eine gute Probenvorbereitung sein.**	**Verbesserungen: Manchmal waren die Gespräche zu lang und man merkte es dann an der Aufmerksamkeit. Lieber kürzer! -- Lehrreich war, dass ich etwas erfahren habe, mit welchem wir schon lange umgehen, aber nie darüber nachdenken → Das Teilen ins Unendliche. Eindrücklich waren Zenons Besuche sowie die Demonstration mit dem Wasser.**
EE (14)	**Informationsreich → man kann sich die Zeit und vor allem die Denkweise der Menschen in dieser Zeit besser vorstellen.**	**Gelungener Versuch, Zenons Überlegung auf verschiedenste Arten darzustellen, jedoch dauerte die Diskussion etwas zu lange. Zum Teil diskutierten wir dasselbe immer wieder und immer wieder.**	**Das Experiment zeigt, dass Zenons These nur theoretisch möglich ist. Das Problem ist nur rein mathematisch lösbar.**	**Endlich lässt sich die Überlegung Zenons in Zahlen ausdrücken. → Achilles und die Schildkröte ist nicht nur begriffen worden, sondern auch mathematisch zu beweisen.**	**Sorgt für mehr Übersicht / Verallgemeinerung.**	**Der Brief an Zenon war ein gelungener Versuch, Zenons Überlegung zusammenfassend in Worte zu fassen.**	**Einführung war etwas zu lang.**
FF (15)	**Interessante Erzählung.**	**Gute Idee, der Widerspruch wird gut erkennbar (die Frage: Wie ist es möglich?) Zenons Geschichte erscheint unlogisch \ unmöglich.**	**Kaum Lösungen des Problems, die Verwirrung wird grösser (Was soll das Ganze? Achilles holt die Schildkröte trotz allem ein!!! So ist die Realität!) Dann kommt die wichtige Idee vom Teilen auf (Vorsprung immer weiter halbieren, etc.) → Schneller zum Punkt kommen.**	**Zum ersten Mal haben wir etwas Greifbares, ging aber sehr schnell voran.**	**Beispiele haben z. T. (Bsp. Escherbild) sehr wenig mit Zenon zu tun.**	**Brief an Zenon: Warum?**	**Interessant, faszinierende Idee hinter dem Ganzen, die auch gut hervorkam. Die Einleitungszeit könnte man ein bisschen verkürzen (Diagramme zeichnen, etc.) und dafür das, was auf den Theorieblättern steht, länger erklären. -- Ich finde aber, obwohl ich alles einsehe, kann ich die REALITÄT nie ganz vergessen!! (und die ist, dass wir tatsächlich aus dem Zimmer können und Achilles die Schildkröte einholt.)**
GG (16)			**Waren spannende Stunden, da man das Problem auf eine andere Art als sonst zu lösen versuchte. Das Ganze wurde anschaulicher und war somit einfacher zu verstehen.**	**Theorieblätter sind immer hilfreich, um die Übersicht zu bekommen.**	**Mit Hilfe der Bilder kann man eine Problematik besser behalten. Immer wenn ich ein solches Bild sehen werde, werde ich automatisch an das Achilles Problem erinnert werden.**	**Der Brief wäre nicht unbedingt nötig gewesen, ist aber für jede einzelne Person gut, da sich jeder nochmals Gedanken machen musste.**	**Sicher gut war die Geschichte von Achilles und der Schildkröte. Wenn man viel mit Bildern und Geschichten arbeitet, kann man eine Problematik besser behalten, muss aber sehr viele Lektionen dafür einsetzen. Verbesserungsmöglichkeiten: Weniger arbeiten im Kreis, mehr selbständiges Erarbeiten.**

Die Fragen des Feedbackbogens beziehen sich wiederum auf die einzelnen Akte, wie wir sie zu Beginn der zweiten Lektion nochmals gemeinsam durchgegangen sind. Der Verlauf hängt mit den entsprechenden Blättern immer noch vor uns an der Tafel. Die Feedbacks der Schülerinnen und Schüler sind wiederum in der Tabelle zusammengestellt.

Die informative Ouvertüre wird im Allgemeinen als willkommene Einstimmung geschätzt. Interessant ist der Hinweis von Tanja (9) auf den Film über Troja und die Anregung, künftig damit zu beginnen. Die Geschichte von Achilles und der Schildkröte löst, wie sie es beabsichtigt, vorerst Verwirrung und Widerspruch aus. Das Darstellen bereitet Mühe, wird da und dort als Überforderung erlebt. Es konfrontiert intensiv mit der natürlichen Vorstellung, dass Achilles überholen muss. Im Nachhinein wird das Vorgehen aber doch mehrheitlich als hilfreich und sinnvoll erkannt. Die gebotenen Präsentationen zeigen es ebenso. Die Parallelität zwischen Gläserexperiment und Achillesgeschichte wird wahrgenommen, als hilfreich erkannt (Tanja (9): „endlich das Vorgegebene in der Realität sehen.“). Das Experiment weist einerseits den Weg zu Grafiken und Berechnungen anderseits auf den unendlichen Prozess und die heikle Frage nach der beliebigen Teilbarkeit. Vielleicht hätten wir, wie Philippe (5) meint, am Ende dieses Aktes noch intensiver festhalten sollen, was wir gefunden haben, anderseits zeigt sich, dass die Schülerinnen und Schüler sehr unterschiedlich weit in ihrem mentalen Prozess angelangt waren. Erstaunlicherweise wird auf die Palette der graphischen Darstellungen wenig Bezug genommen, obwohl ich denke, dass im Erstellen und Vergleichen dieser Blätter Wesentliches vorgeht. Der Übergang von den konkreten Zahlenbeispielen zur Verallgemeinerung fällt erfahrungsgemäss unterschiedlich leicht. Wer die Theorieblätter sorgfältig studiert, bemerkt, dass wir alles bereits mehrfach im Unterricht besprochen haben. So werden diese strukturierenden Blätter mehrheitlich als sehr hilfreich taxiert. Die verschiedenen Anwendungsbeispiele werden geschätzt, das wechselweise Bearbeiten individuell und im Plenum ist fruchtbar. Besonders das Escherbild und der Würfelturm werden vielen lange in Erinnerung bleiben. Dass wir schliesslich nicht alle Beispiele gleich intensiv behandelt haben, stört niemanden. Das Finale ist geprägt durch die Briefe, die als Zusammenfassungs- und Reflexionsinstrument gewürdigt, aber zum Teil als überflüssig betrachtet werden. Die Briefe zeigen, dass sich nicht alle Schülerinnen und Schüler in Sinne einer Schlussbilanz zur Geschichte eingelassen haben. Sinn und Zweck dieses Briefes will ich das nächste Mal vorgängig besser kommunizieren.

Die Schlussbilanz fällt mehrheitlich positiv aus. Besonders das Arbeiten mir der Geschichte und an den Bildern wird geschätzt und verspricht Nachhaltigkeit. Das gemeinsame Ringen um ein Verstehen wird einmal mehr von einigen als zu langfädig empfunden. BB (11) schreibt: „Und die Diskussionen im Kreis waren zu lang, man hätte es auch schneller auf den Punkt bringen können.“ Ich glaube aber, dass es auch hier keinen „Königsweg“ gibt.

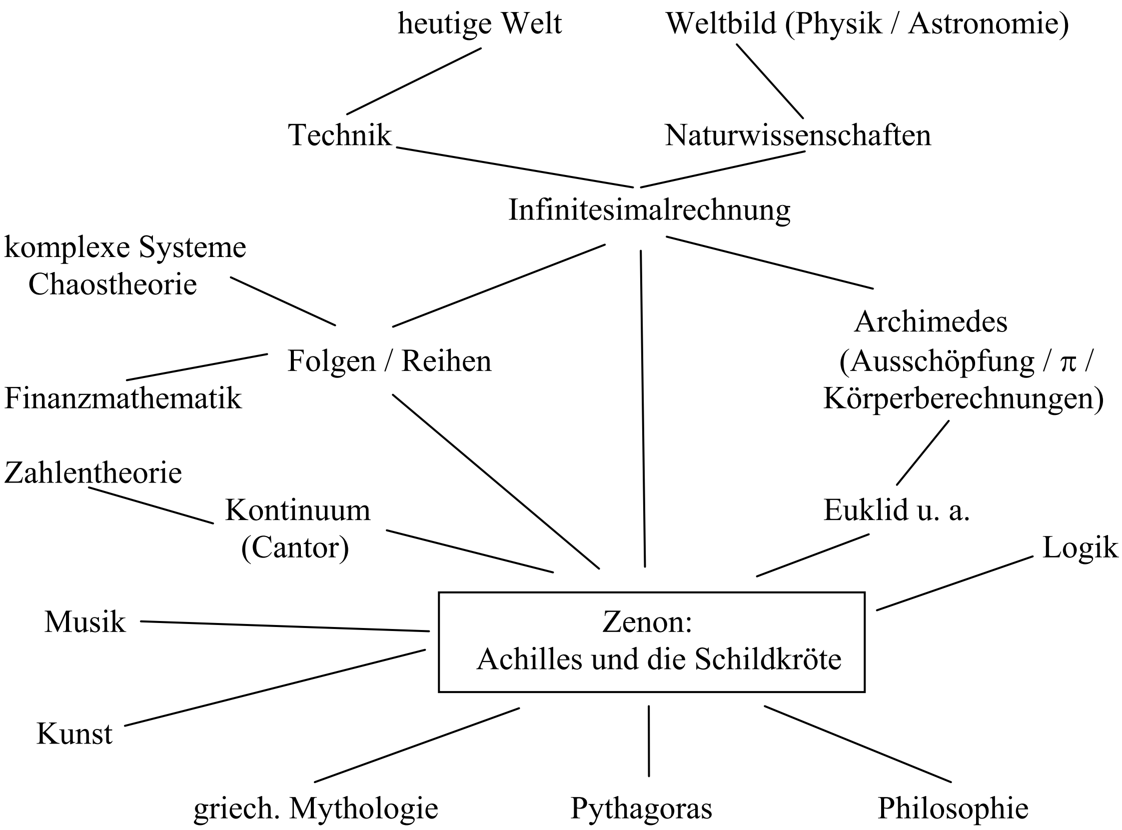
Die Rückmeldungen zeigen, dass das ganze Lehrstück sehr unterschiedlich durchlebt wurde. Philippe hat sich vorwiegend auf die historische und philosophische Komponente konzentriert. Betime war wohl zu sehr verwirrt und überfordert. Vieles ist für sie auch am Schluss noch schleierhaft und unklar, auch wenn sie die Fragen nicht formulieren kann. Immerhin kann sie den verschiedenen Beispielen Positives abgewinnen und sie wird sich auf die Theorieblätter abstützen.

Für die meisten Schülerinnen und Schüler war es doch ein Weg zu mehr Erkenntnis in Bezug auf unsere physikalische Welt und ihre Mathematisierbarkeit sowie auf die Unendlichkeit, auch wenn es nicht alle wie Achim zum „Meister der Unendlichkeit“ gebracht haben.

4.5 Didaktische Interpretation: Methodentrias

Exemplarisch:
Die Geschichte „Achilles und die Schildkröte" öffnet die Pforten für eine tiefe Auseinandersetzung mit dem „unendlich Kleinen" und damit verbunden mit nicht abbrechenden Prozessen. Diese Fragestellungen rund um das „Beliebig–nahe–Kommen", um Grenzen und Grenzwerte samt auftauchenden Schwierigkeiten und Paradoxien sind ganz zentral für die Mathematik. Gemäss dem bekannten Mathematiker Henri Poincaré bedeutet Mathematik betreiben ohnehin „Geschichten erzählen über das Unendliche". Und diese Geschichte verwirrt uns mit ihrer treffenden Logik und der unserer Erfahrung völlig widersprechenden Schlussfolgerung; sie fordert uns unmittelbar heraus, über das Unendliche nachzudenken, es physisch mitzuvollziehen und mitzuerleben. Die Auseinandersetzung besitzt weiterhin grosse Aktualität. Einerseits fasziniert die Welt des „unendlich Grossen" beim Blick ins Universum und die Welt des „unendlich Kleinen" beim Blick ins Mikroskop den Menschen und besonders den Jugendlichen, anderseits stellen gerade heute die Naturwissenschaften vermehrt die Frage, ob der konkrete physikalische Raum überhaupt beliebig oft teilbar ist. Nach den Theorien massgebender heutiger Physiker gibt es kleinste Masse von Raum und Zeit, die sich nicht weiter unterteilen lassen. Dies wiederum würde die Lehre der Pythagoräer bekräftigen, insofern sie sich auf die Naturphänomene bezieht! Es bleibt vorläufig offen, in wie weit unsere gedachte infinitesimale Teilung von Raum und Zeit in der physikalischen Welt Realität ist.

Die thematische Landkarte zeigt folgendes Bild:



Obwohl es in der physikalischen Welt keinen Hinweis auf unendliche Teilung von Raum und Zeit gibt, setzen die Mathematiker eine uneingeschränkte Teilbarkeit voraus – sie sprechen vom Kontinuum, dem lückenlos Zusammenhängenden, in dem es keine Leerstellen gibt – als

Grundlage ihres Denkgebäudes und entwickeln darauf unter anderem die Infinitesimalrechnung. In den vielfältigen Beispielen begegnet uns die Unendlichkeit als die ewige Wiederkehr des Gleichen. Sie machen das Phänomen erst überschaubar und fassbar. Eine entscheidende Entdeckung tritt dabei in unser Bewusstsein: Wir sehen ein, dass – uneingeschränkte Teilbarkeit vorausgesetzt – die Addition von unendlich vielen positiven Grössen nicht notwendigerweise unendlich gross werden muss. Dies zu erfahren, einzusehen und zu bejahen, ist wohl *die* Herausforderung des Lehrstücks. Ein Paradigmenwechsel, der nur auf Grund verschiedenster Beispiele und gegen grossen inneren Widerstand individuell vollzogen werden kann. Erstaunlich und beeindruckend ist, dass uns trotz der Annahme eines Kontinuums in Raum und Zeit die Mathematik exakte Antworten liefert auf Probleme der wirklichen Welt. Unsere technische Welt sähe ohne diese Denkgrundlagen völlig anders aus und wir fragen uns mit Aczel (2002, S. 219): „Wie könnte ein Verfahren, das auf dem Kontinuum beruht, so erfolgreich sein, wenn es das Kontinuum gar nicht gäbe?“ Zwar können wir mit Formeln, Funktionen und Graphen das scheinbar Widersprüchliche bewältigen, aber eines bleibt: „… nämlich das Paradoxe, was darin liegt, dass eine unendliche Aufeinanderfolge, deren Vollendung wir in der Vorstellung nicht nur faktisch, sondern auch grundsätzlich nicht vollziehen können, in der Wirklichkeit abgeschlossen vorliegen soll.“ (Wittenberg 1990, S. 224). In den Geschichten von Zenon konzentrieren sich die genannten Probleme und durch Anlagerung verschiedenster verwandter Situationen ist es möglich, diese Problematik vielfältig und optimal zu erschliessen. Dies macht Zenons provokative Anstösse so fruchtbar und wertvoll.

Genetisch:
Die Geschichten von Zenon, wie sie uns Aristoteles überliefert, bieten einen lebendigen und genetisch echten Zugang zur Auseinandersetzung mit dem unendlich Kleinen, mit der fortgesetzten Unterteilung von Raum und Zeit. Es ist Absicht von Zenon zu verwirren und zu provozieren, insbesondere die Pythagoräer, welche sich ganz auf rationale Verhältnisse abstützen. Diese Geschichten haben während fast 2500 Jahren die Menschen erfasst und sie erschüttern uns auch noch heute. Dank ihrer Lebensnähe und Einprägsamkeit werden wir unmittelbar angesprochen. Mit all unseren Sinnen sind wir gefordert: Wir können den Prozess spielen, zeichnen, singen, klopfen und klatschen, … und gerade dieses intensive Eintauchen in die Problematik, die Auseinandersetzung mit dem Problem in den verschiedensten Variationen bringt uns weiter. Dieses „Beliebig–nahe–Kommen“, das zu Konvergenz und Grenzwert führt, wird bei Achilles, bei den Gläsern, bei der Kaffeetasse, bei der Uhr, bei den Fraktalen … erlebt und mit ihnen verknüpft. So wird uns die volle Kaffeetasse immer wieder daran erinnern, dass die Summe von unendlich vielen positiven Grössen einen endlichen Wert haben kann und dass Raum und Zeit vielleicht gar nicht beliebig oft teilbar sind.

Diese Geschichten von Zenon haben seit bald 2500 Jahren immer wieder bedeutende Denker wie Descartes, Leibniz, Bergson, Russel herausgefordert und damit die Mathematik und die Philosophie entscheidend mitgeprägt. Und wo wäre unsere Technik, wie sähe unser Weltbild aus ohne diese Herausforderungen?

Dramaturgisch:
In der Ouvertüre tauchen wir mit dem Kennenlernen von Zenon und seinem Hauptakteur Achilles zügig ein in die griechische Antike. Mit ganzer Wucht entfaltet Zenon seine provokative Geschichte von Achilles, der im Wettlauf die Schildkröte nie einholen wird. Diese vorerst leicht verständliche Geschichte fasziniert und verwirrt zugleich. Der Blitz des Problems zündet. In Kleingruppen wird heftig diskutiert, einzelne Schülerinnen und Schüler

ereifern sich. Die wortlosen, dafür handfesten szenischen Darstellungen zwingen uns, Zenons Argumentation zu folgen und nicht allzu früh der bisherigen persönlichen Erfahrung zu erliegen. Jetzt sind wir mitten drin in der Erschütterung, im Widerstreit unserer Wahrnehmung und bisherigen Erfahrungen die besagen, dass Achilles sehr wohl und locker die Schildkröte überholen wird, mit dem Verstand und Zenon, welche darauf beharren, dass Achilles die Schildkröte nie einholen wird. Die Segel sind gesetzt. Das dramaturgische Ringen um die Annäherung dieser beiden Standpunkte kann beginnen.

Mit Zahlenbeispielen, Graphiken, Zeichnungen, Formeln geht die Auseinandersetzung weiter, werden erste Lösungsansätze erprobt. Und da taucht ein zweites Mal unser Provokateur Zenon aus dem Hintergrund auf und provoziert mit einer neuen Geschichte.

An Hand des Gläserbeispiels und der verschiedenen Lösungsansätze mit Zahlenbeispielen und Graphiken kommen wir im gemeinsamen Ringen dem Problem näher. Nur langsam nehmen wir Abschied von der irrigen Vorstellung, dass die Addition von unendlich vielen positiven Grössen automatisch unendlich gross werden muss.

Aus den verschiedenen Zahlenbeispielen kristallisiert sich eine zugehörige Formel, in der dieser ganze Annäherungsprozess eingebunden ist. Eine erstaunliche Fülle von weiteren Situationen dieser Art zeigt, dass die der Geschichte immanente Problematik zum Alltag gehört, allgegenwärtig ist in unseren Bewegungen, in Musik und Kunst. Zenon begleitet uns durchs ganze Lehrstück, von seinem ersten Auftritt bis zum Moment am Schluss, in dem die Schülerinnen und Schüler ihm einen Brief schreiben und darin nochmals etwas vom langen Prozess aufleben lassen, den wir im Lehrstück gegangen sind.

Dieses Lehrstück von 15 bis 20 Lektionen Umfang konzentriert sich auf den unendlichen Regress ins Kleine, auf Annäherung, Konvergenz und Grenzwert anhand der geometrischen Folge. Wie sich Achilles der Schildkröte nähert, so nähern wir uns asymptotisch Schritt um Schritt der „Lösung“ des Problems, der Erklärung der Paradoxie samt ihren letzten philosophischen und metaphysischen Fragen nach der beliebigen Teilbarkeit von Raum und Zeit, welche auch heute noch nicht abschliessend gelöst sind.

4.6 Das Lehrstück in der Fachschaft

Auf Wunsch von Heiner Rohner präsentierte ich das Lehrstück am 19. Februar 2003. Obwohl ich alle Fachkollegen, etwa ein Dutzend an der Zahl, eingeladen hatte, erschienen nur deren zwei: Heiner vom Wirtschaftsgymnasium und Daniel vom mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium. Diese verfolgten den einstündigen Durchgang durch das Lehrstück mit viel Interesse. Da bei beiden dieses Thema bis heute im Unterricht nicht fällig war, wurde das Stück nicht weiter verfolgt.

Nach einer Unterrichtslektion ist kürzlich ein Fachkollege in meinem Zimmer aufgetaucht. Nachdem ich ihm, ausgehend von der beschriebenen Tafel, den Ablauf des Lehrstücks geschildert hatte, war seine spontane Antwort: „So klar und einleuchtend habe ich das noch nie gehört.“ Inzwischen habe ich drei Lehrkräfte aus anderen Schulen, die sich sehr für dieses Lehrstück interessieren und vermutlich bald eine Inszenierung wagen. So zum Beispiel ein Kollege aus Trogen. Er ist von der Vielfalt der Anwendungen begeistert und möchte den Philosophen Zenon im Lehrstück mehr Gewicht geben. Ich hoffe sehr, dass bald einige Kollegen diese Unterrichtseinheit aufnehmen werden, denn ich bin überzeugt, dass hier ein lehrreiches und bedeutungsvolles Lehrstück vorliegt.

4.7 Die Ideengeschichte im Lehrstück

Mit der einfachen Geschichte von Achilles und der Schildkröte werden wir herausgefordert, über das Unendliche nachzudenken (Grundidee [9]). Die Geschichte ist entstanden in einer Zeit, in der der Mensch, herausgefordert durch die Diagonalen in Quadrat und im regelmässigen Fünfeck, begann, über das Unendliche nachzudenken. Die rationalen Zahlen genügten nicht mehr. Toeplitz (1949, S. 2) schreibt über Zenon: „Er protestiert gegen den Abgrund des unendlichen Prozesses.“ Ebenfalls im 5. Jhdt. vor Christus thematisiert Anaxagoras: „Es gibt kein kleinstes unter den Kleinen und kein grösstes unter den Grossen, sondern immer noch ein kleineres und ein grösseres.“ (ebd. S. 2) Der unendliche Prozess ist denkbar, wird mathematisch fassbar, kann aber in der Vorstellung nicht bis zum Ende vollzogen werden. Auch physikalisch ist der Prozess im Einzelnen nicht vollziehbar, obwohl er nach bestimmbarer Strecke und berechenbarer Zeit abgeschlossen vorliegen soll.

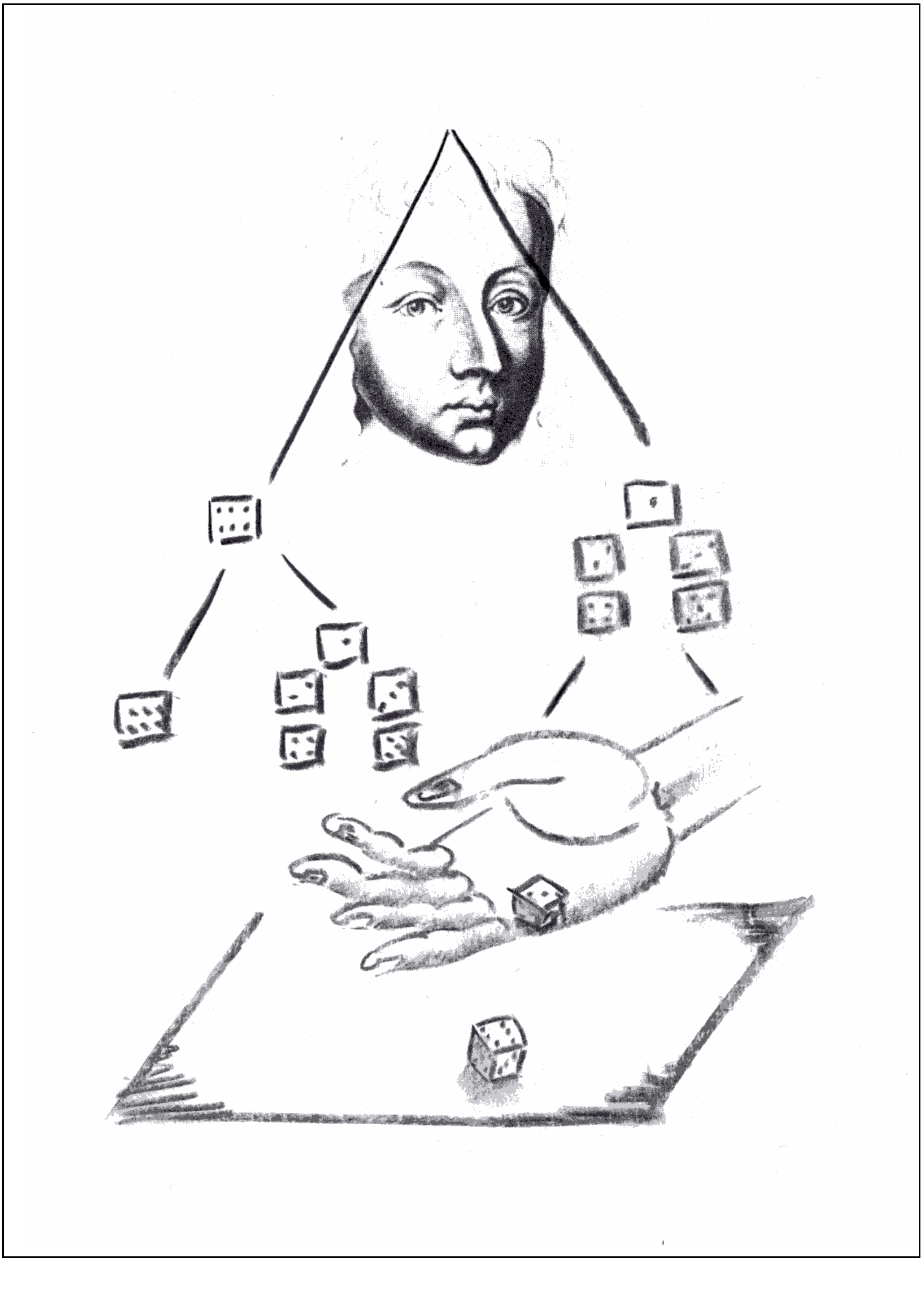
Verbunden mit diesem Wettlauf stellt sich die Frage nach der angemessenen Modellierung [3]. Zenon legt uns überzeugend dar, was eigentlich nicht sein kann, denn es widerspricht unserer Alltagserfahrung. Und doch, die Darlegung überzeugt. Ein zweites Modell mit linearen Funktionen liefert einen wohl bestimmten, sichtbaren Schnittpunkt, ein einleuchtendes Resultat. Aber sind diese beiden, offenbar so widersprüchlichen Modelle vereinbar? Schliesslich erkennen wir, dass beide Modelle, jedes auf seine Art, den Vorgang hervorragend beschreibt und dass die Folgerung dieselbe ist. In den Ausweitungsbeispielen erhalten die Schülerinnen und Schüler vielfältige Gelegenheit, Modelle zu entwickeln, welche den Ausgangssituationen angepasst sind.

Bei diesen Modellbildungen herrschen zwei funktionale Abhängigkeiten [7] vor: Die lineare und die exponentielle Beziehung. Die lineare Funktion beschreibt die gleichförmigen Bewegungen von Achilles und Schildkröte sowie von den Uhrzeigern. Betrachten wir die Aufholvorgänge, das Halbieren der Flüssigkeit, die Spiralen, die expandierenden Fraktale oder die Schenkungssteuer so werden die Zusammenhänge exponentiell. In all diesen Beispielen dominiert der unendliche Prozess, der sich algorithmisch beschreiben lässt [8]

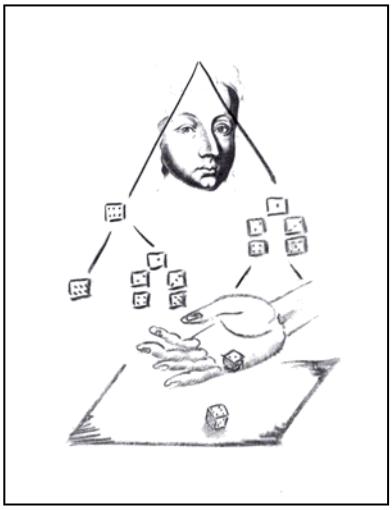
In diesen Beispielen spielt auch die räumliche Struktur [6] eine wichtige Rolle, diese unendliche Teilung der Strecke. Will ich von A nach B gelangen, so liegen mir immer unendlich viele Punkte dazwischen, auch wenn ich den Grossteil der Strecke zurückgelegt habe, schon hautnah bei B bin. Ich kann wieder und wieder die Hälfte der Strecke zurücklegen und werde B nie erreichen. Wir können – mindestens gedanklich – beliebig weitere Würfel auf den Turm legen, die Decke des Kinderzimmers wird nie erreicht. Unsere Teetasse wird nie leer. Es gibt eine gegenseitige fruchtbare Erschliessung zwischen diesen räumlichen Beispielen und den geheimnisvollen Zahlenreihen [4] wie $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$

Die Tabelle soll die Repräsentanz der Grundideen in diesem Lehrstück verdeutlichen:

Grundidee	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**	**[6]**	**[7]**	**[8]**	**[9]**	**[10]**
Repräsentanz	•		• • •	• •		• •	• • •	• •	• • •	



5. DIE GEBURTSSTUNDE DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG MIT PASCAL
Ein Lehrstück zur Wahrscheinlichkeitsrechnung für die 12. Klasse des Gymnasiums



5.1 Einleitung

Spielsteine faszinieren seit Urzeiten. Zeigen sie mein Schicksal? Bringen sie mir Glück? Kann ich das Schicksal beeinflussen und mein Glück begünstigen? Das Wetter wird kaum besser; unsere Mannschaft wird sicher gewinnen; wahrscheinlich wird nichts ändern, aber der Tod ist uns gewiss. In unserer Alltagssprache kennen wir ein ganzes Repertoire von Ausdrücken für unser Mass an Gewissheit oder Ungewissheit, Sicherheit oder eben Unsicherheit. Und wenn es um Würfelspiele geht, so glauben wir, mit diesen Begriffen umgehen zu können. Ein Sechstel beträgt die Wahrscheinlichkeit, mit einem Spielwürfel eine 6 zu werfen, zwei Sechstel beträgt diese Wahrscheinlichkeit, wenn wir zweimal werfen usw. Spätestens mit dem siebten Wurf beginnen wir zu stutzen, denn dann müsste ja unsere Chance 7/6 betragen. Wir merken: So kann es nicht gehen. „Da steckt eine Gesetzmässigkeit dahinter, die wir noch nicht kennen“, formuliert ein Schüler treffend. Und genau um diese Gesetzmässigkeit soll es hier gehen, um die Klärung unseres intuitiven Begriffs der Wahrscheinlichkeit.

Weil er nicht hinter diese Gesetzmässigkeiten schaut, geschieht dem Chevalier de Méré um 1650 bei seinen Glücksspielen Unerwartetes. Er glaubt, sein bisher erfolgreiches Spiel leicht variieren zu können und ist völlig erstaunt, dass er jetzt mehrheitlich verliert. Für ihn stimmt die Mathematik nicht mehr mit dem praktischen Leben überein, er versteht die Welt nicht mehr. Da er diese Erfahrung nicht mit seinem proportionalen Denken erklären kann, wendet er sich verzweifelt an Blaise Pascal. Dieser beschäftigt sich intensiv mit dem Problem und zeigt, dass im Bereiche der Wahrscheinlichkeiten das proportionale Denken keine Gültigkeit hat. Dies ist die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung, einer mathematischen Disziplin, die sich mit der Beschreibung des Ungewissen befasst und ohne die unsere heutigen Natur- und Sozialwissenschaften undenkbar sind. Der Übergang vom intuitiven Erfassen der Chancen bis zum Verstehen und Umgehen mit Wahrscheinlichkeiten ist ein Quantensprung. Nach diesem Durchbruch erscheint uns auf dem neuen Hochplateau alles einleuchtend, logisch, ja selbstverständlich.

5.2 Vorlage von Rolf Schudel/Barbara Krzensk

Rolf Schudel und Barbara Krzensk haben im Zusammenhang mit der Berner Lehrkunstwerkstatt II ein gut 30 Lektionen umfassendes Lehrstück zur Wahrscheinlichkeit entwickelt und in mehreren Aufführungen in Arbeitswochen wie im kursorischen Unterricht optimiert. Die vierte und letzte der in ihrem Bericht (Schudel/Krzensk 2001) erwähnte Inszenierung fand mit einer Klasse des 11. Schuljahres in einer Arbeitswoche statt. Rolf Schudel und Barbara Krzensk eröffneten ihr Lehrstück mit dem Roulettespiel und packenden Texten von Dostojewski zu Spieler und Spiel. Dieser spannende Einstieg führte mitten in Leidenschaft und Problematik des Glücksspiels und brachte gleichzeitig die Begegnung mit einem hervorragenden Roman der Weltliteratur. Im I. Akt folgten Spiele mit Astragali und gewöhnlichen Würfeln. So wurden „A-posteriori"- und „A-priori"-Wahrscheinlichkeit entwickelt, einander gegenübergestellt. Damit fand eine vertiefte Auseinandersetzung mit dem Begriff „Wahrscheinlichkeit" statt. Der II. Akt war dem Problem des Chevalier de Méré und den mehrstufigen Zufallsversuchen samt Baumdarstellung gewidmet. Hier wurde deutlich, warum das nahe liegende proportionale Denken bei mehrstufigen Zufallsversuchen versagt. Es erfolgte eine theoretische Fundierung des Erarbeiteten. Im III. Akt wuchsen die Bäume mit dem Galton-Brett und der Binomialverteilung in den Himmel. Als Zwischengang am Abend folgte die Überraschung mit dem Ziegenspiel. (Zwei Ziegen und ein Auto sind hinter drei Türen versteckt. Der Kanndidat wählt eine Türe, diese wird aber nicht geöffnet, sondern der Spielleiter öffnet eine andere Türe in der eine Ziege erscheint. Soll der Kandidat bei seiner Wahl bleiben oder soll er wechseln und auf die andere Türe setzen, um das Auto zu gewinnen?) Schliesslich wurde die Thematik im IV. und letzten Akt mit interessanten Problemen auf weitere Situationen ausgedehnt. Die Schülerinnen und Schüler wurden dabei herausgefordert, das Gelernte zu übertragen und dann das Erarbeitete zu präsentieren. Der Prozess setzte sich im Schulalltag fort. Nach den letzten Präsentationen folgten Erwartungswert, Übungen, Probe.

Meines Erachtens liegt hier eine spannende, historisch und kulturell reichhaltige Unterrichtseinheit vor, welche die Lernenden vielfältig und aktiv in die Auseinandersetzung um die Wahrscheinlichkeit einbezieht. Dank der Übungen mit Bezügen zu verschiedensten Anwendungen ergibt sich schliesslich eine fundierte Erarbeitung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im Fazit schreiben die beiden Autoren selbstkritisch über das Lehrstück: „Es ist zu lang. … Die Überlänge macht es auch sehr schwierig, den Spannungsbogen aufrecht zu erhalten, was sich vor allem im kursorischen Unterricht als ein Ding der Unmöglichkeit gezeigt hat. Ungewohnt für ein Lehrstück sind die integrierten Übungsphasen, die ich aber auf Grund der positiven Erfahrungen nicht missen möchte." Dieses Lehrstück orientiert sich, wie übrigens auch meine Lehrstücke „Quadrate vereinen – Quadrate entzweien" und „Vom Würfel zur Kugel" an einer ganzen Unterrichtseinheit des Lehrplans. Dadurch wird dieses Lehrstück extrem lang. Die Einheit wird bestimmt durch ein Oberthema, aber kaum durch eine Grundproblematik, welche immer weiter vertieft wird und in Variationen das ganze Stück durchzieht. Eine Abrundung, ein gelungener Abschluss mit Ausblick will nicht gelingen.

Im Rahmen einer Präsentation dieses Lehrstücks in Marburg tauchte die Frage auf, warum die zentralen Spiele von de Méré nicht gespielt werden. Ein Versuch zeigte, dass diese Spiele attraktiv sind und direkt zur Geburtsstunde der Mathematik führen. Diese Erfahrung war Ausgangspunkt zur Entwicklung meines heutigen Lehrstücks. – In einem Nachgespräch im Dezember 2003 hat mir Rolf Schudel sein Unbehagen mit der Länge dieses Lehrstücks bestätigt. Er war sehr angetan von meinem kürzeren, kompakteren und einheitlicheren Lehrstück, das auf den Spielen von de Méré aufgebaut ist und die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung ins Zentrum stellt. Wir sind beide der Ansicht, dass in der Mathematik die Zukunft eher den kürzeren Lehrstücken gilt, welche ein besonderes Menschheitsrätsel fokussieren. Zwar schmerzt es, dass das Roulette mit den Texten von Dostojewski wegfällt, doch kann es später im „Normalunterricht“ eingebracht werden. Idealerweise, da waren wir uns einig, wird dieses kurze Lehrstück später ergänzt durch ein noch zu entwickelndes Lehrstück zur statistischen Wahrscheinlichkeit mit den Astragali und mit Bernoulli.

5.3 Struktur des Lehrstücks

Ouvertüre:
Astragali, ägyptische Würfel aus der Pharaonenzeit und gewöhnliche Spielwürfel liegen auf dem Tisch in der Mitte. Unsere regelmässigen Würfel sind vermutlich durch Abschleifen aus den Astragali entstanden. Hier liegen von den ältesten Spielsteinen der Welt. Gespielt wird schon seit Urzeiten. Astragali und Würfel wurden auch für Orakel verwendet. „Alea iacta est.“ Caesar liess den Würfel fallen, bevor er Rom eroberte. Die Kleider von Christus wurden durch Würfelentscheid verteilt. Auch wir überlassen ab und zu eine Entscheidung dem Zufallswurf. Aus Fragestellungen beim Glücksspiel hat sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt. Wahrscheinlichkeit und Statistik sind heute in den verschiedensten Bereichen ein unverzichtbares Instrument.

I. Akt: De Mérés Frage
Wir versetzen uns in die Mitte des 17. Jahrhunderts, in die Zeit des Sonnenkönigs Louis XIV. Chevalier de Méré, ein französischer Lebemann, preist in den Salons sein Spiel an. Das Bild eines Salons und sonstige Bilder von jener Zeit sowie passende Musik von Jean-Baptiste Lully bilden den Rahmen. In Gruppen wird das erste Spiel gespielt und gleichzeitig dessen Verlauf protokolliert. Die Resultate werden gesammelt und erste Vermutungen geäussert. Es heisst, de Méré hätte gut gelebt mit diesem Spiel, aber auf die Dauer sei es ihm langweilig geworden. Er will zu Doppelwürfen übergehen: Aber wie? Es wird ausprobiert, nachgedacht, verschiedene Ideen werden diskutiert. De Méré hat folgendermassen argumentiert und das Spiel verändert: Die Zahl der Würfe ist im ersten Fall 4, die Zahl der Möglichkeiten 6. Im zweiten Fall haben wir entsprechend 6*4 = 24 Würfe und 6*6 = 36 Möglichkeiten. Und wieder ist das Verhältnis 4 : 6. Also sollten die Gewinnchancen dieselben sein wie im ersten Spiel. In Gruppen wird das zweite Spiel von de Méré gespielt und protokolliert. Die Anzahl der Spiele ist nur klein, aber die Spielidee wird dabei klar. Tatsache ist, dass auf die Dauer de Méré beim ersten Spiel gewinnt und wider Erwarten beim zweiten Spiel verliert. Verzweifelt wendet er sich an Blaise Pascal: „Ich verstehe die Welt nicht mehr!“ Die Schülerinnen und Schüler schreiben für de Méré einen substantiellen Klagebrief an Pascal, in dem er darlegt und begründet, was er überlegt hat, und darüber jammert, dass es anders gekommen ist. De Mérés Brief ist leider nicht erhalten; aber sein Brief hat die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgelöst.

II. Akt: Pascals Antwort - Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Warum wendet er sich gerade an Pascal? Ich informiere über das Universalgenie Blaise Pascal und sein Umfeld. Die Briefe an Pascal hängen an der Tafel und werden vorgestellt. Wie mag Pascal überlegt haben? In Gruppen werden vorerst Hypothesen aufgestellt und diskutiert. Im anschliessenden Plenum werden die Argumente gesammelt, diskutiert und abgewogen. Die intensive Auseinandersetzung über das erste Spiel, über das wiederholte Werfen mit einem Würfel, wird zum Schlüssel für das Verständnis auch des zweiten Spiels. Nach und nach ergibt sich des Rätsels Lösung. Bäume und Pfade helfen zum besseren Verständnis, begründen, warum wir bei mehrstufigen Versuchen die Wahrscheinlichkeiten multiplizieren

und nicht addieren. An Stelle von Blaise Pascal schreiben die Schülerinnen und Schüler einen ausführlichen Antwortbrief an de Méré.

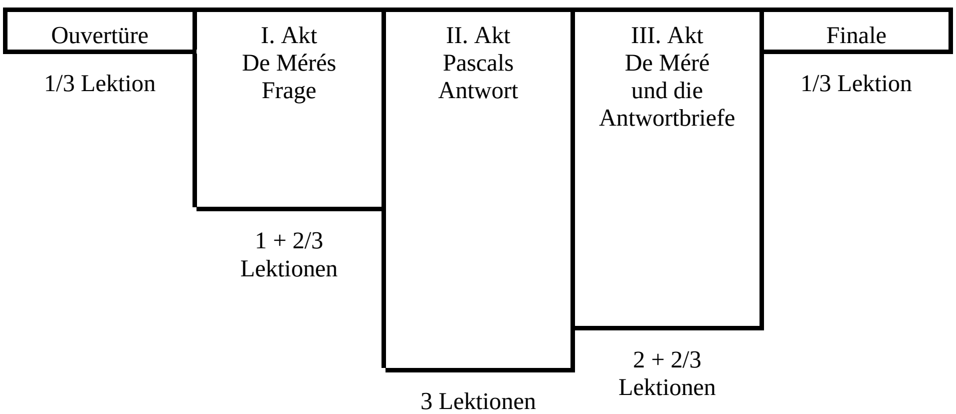
3. Akt: De Méré und die Antwortbriefe
Die Antwortbriefe treffen ein und werden studiert. Darunter ist auch einer von mir samt ein paar neuen Spielanregungen. Bei der Auseinandersetzung mit diesen Briefen und der Entwicklung neuer, besonders geeigneter Spiele erfährt der Umgang mit der Wahrscheinlichkeit weitere Klärung und Vertiefung.

Finale: Zusammenfassung und Ausblick
Ein Blick in unsere Alltagssprache und Ausschnitte aus den fiktiven Briefen von Pascal an Fermat, geschrieben von Alfréd Rényi, runden das Lehrstück ab.
Ausblick: Wäre aus Rom ein Brief gekommen mit einer Frage zum Knobelbecherspiel mit den Astragali, so hätte Pascal die Frage nach Basel weiterleiten können, wo sich dann Jakob Bernoulli gute fünfzig Jahre später damit befasst hätte. So wird das Lehrstück zur Quelle der Fortsetzung (Wahrscheinlichkeitsbegriff, Laplace-Versuch, Bernoulli,…)

5.4 Unterrichtsverlauf: 8 Lektionen in der Prima

Im Moment unterrichte ich keine eigene Prima (12. Schuljahr), aber einer meiner Fachkollegen, Heiner Rohner, der eben in der fachdidaktischen Ausbildung steckt, ist sehr interessiert, dass ich dieses Lehrstück in einer seiner beiden Primen durchführe. Aus stundenplantechnischen Gründen einigen wir uns auf die Klasse 1A. Dies hat für mich den Nachteil, dass ich die Schülerinnen und Schüler schlecht kenne, dafür den Vorteil, dass mein Kollege dabei ist und viel gleichzeitig protokolliert. Für den ersten Teil beantragen wir einen Blockhalbtag, das heisst, am Freitag, 31. Oktober 2002 beanspruchen wir vormittags vier Lektionen. Die folgende Woche wollen wir in den beiden Doppellektionen vom Montag und vom Freitag das Lehrstück fortsetzen und beenden.

Es wird sich die folgende zeitliche Gliederung ergeben:



Zu Beginn stehen 18 Stühle im Kreis bereit. Eine Schülerin wird wegen einer Exkursion abwesend sein. Rundherum gibt es fünf Pultblöcke als Spieltische. An der einen Wand hängen Informationen über antike Spielsteine, über de Méré und über Blaise Pascal. Im Zentrum am Boden liegen einige Astragali, griechisch-ägyptische Spielwürfel und gewöhnliche Spielwürfel unserer Zeit ausgebreitet. Die Schülerinnen und Schüler kommen nach und nach, setzen sich erwartungsvoll hin und harren der Dinge, die da kommen werden.

Lektionen 1/2

Ouvertüre

Ich begrüsse alle kurz. Es braucht wenig erklärende Worte. Ein Zitat von Pascal: „Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten“ leitet über zu einer kurzen Erläuterung unserer kleinen Unterrichtseinheit als Lehrstück. Dann weise ich auf die am Boden ausgelegten Spielsteine hin. Die Astragali, Knöchelchen der Hinterbeine von Paarhufern, mit ihrer besonderen Form

besitzen zwei Breit- und zwei Schmalseiten und wurden von den Menschen schon Tausende von Jahren vor Christus zum Spielen aber auch zur Vorhersage des Schicksals im Orakel genutzt. Homer erzählt in der Ilias, wie Achilles sich beim Spiel der Knöchel ereiferte. Aus späteren Zeiten kennen wir sogar Nachbildungen in Ton, Bronze, Silber und Gold. Noch heute werden diese Knöchelchen in verschiedensten Ländern zum Spielen verwendet! Die alten griechisch-ägyptischen Würfel aus der Pharaonenzeit ähneln schon viel eher unseren bekannten regelmässigen Spielwürfeln. Aus der Bibel wissen wir, dass die Kleider von Jesus mittels Würfelspiel unter die Soldaten verteilt wurden. 49 vor Christus soll Caesar den Ausspruch getan haben: „Alea iacta est – Der Würfel ist gefallen“, nachdem er sich entschlossen hatte, den Grenzfluss Rubikon zu überschreiten und mit seinem Heer in Rom einzumarschieren. Noch heute wird dieser Ausspruch gebraucht im Zusammenhang mit folgenschweren Entscheidungen, welche nicht mehr zurückgenommen werden können. Im Rom der Kaiserzeit waren die Leute ausserordentlich spielsüchtig. Es wurde um Hof, Frau und Kind gespielt, so dass das Glücksspiel mit Astragalen und Würfeln von Staates wegen (leges aleariae) verboten werden musste. (Ineichen 1996, S. 50f)

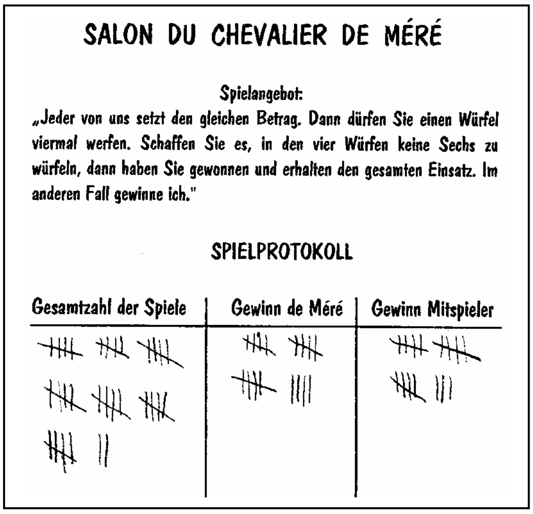
Ein Menschheitsthema sind Fragen rund um das Spiel und das Schicksal, die ja eng miteinander verknüpft sind: Ist das Spiel vorteilhaft für mich? Ist das Schicksal günstig? Welche Gesetzmässigkeit steckt hinter dem Würfeln? Lässt sich die Zukunft vorhersagen? Lassen sich die Ausfälle manipulieren, lässt sich die Zukunft steuern? Die Frage nach der Voraussagbarkeit bei Spielen war dann auch der Anlass zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Anwendung sich auf die verschiedensten Lebensbereiche ausgeweitet hat.

Mit dieser viertelstündigen Ouvertüre wird der kulturelle Horizont geöffnet und die Kernfrage gestellt.

I. Akt: De Mérés Frage

Musik von Jean-Baptiste Lully (1632-1687) ertönt aus dem Hintergrund und liefert den roten Faden. Ich schildere die Situation in der Mitte des 17. Jahrhunderts in Frankreich. Der Sonnenkönig Louis XIV hat eben in jungen Jahren die Krone übernommen. Das rationale Denken ist im Vormarsch mit Descartes, Leibniz und Spinoza. Es ist die Zeit von Molière, Corneille, Racine, La Fontaine. Ein Adliger namens Chevalier de Méré lebt in Paris, verkehrt in guter Gesellschaft und bietet in den Salons ein beliebtes Glückspiel an. Sein Bild erscheint jetzt an die Leinwand projiziert. Ich lege mir einen weissen Schal um und fahre fort als de Méré. „Ich biete Ihnen das folgende Spiel an: Wir legen beide einen gleich grossen Einsatz auf den Tisch und Sie dürfen viermal mit einem Würfel werfen.“ Während ich dies sage, lege ich eine Münze auf den Tisch, mein Kollege macht dasselbe und beginnt einen Würfel zu werfen. „Wenn Sie keine Sechs werfen, haben Sie gewonnen und bekommen die beiden Münzen auf dem Tisch, andernfalls erhalte ich die Münzen.“ Mein Kollege wirft keine Sechs und kann die beiden Münzen einziehen. Das Spiel scheint klar zu sein. Wir verteilen die Rollen: An jedem Spieltisch gibt es einen de Méré mit Halstuch, einen Protokollanten mit Protokollblatt, der die Zahl der gewonnenen Spiele notiert, und ein bis zwei Spieler. Die de Mérés nehmen hinter den Tischen Platz und die Spieler davor. Die Protokollanten samt Spielbeschreibung und Tabelle sitzen bereit. Die Spiele beginnen. Es herrscht eine lockere, aber konzentrierte Atmosphäre. Die Musik von Lully begleitet das Geschehen aus dem Hintergrund.

Mein Kollege und ich schnappen beim Beobachten ein paar Sätze auf. Christoph S meint: „De Méré gewinnt sicher, er bietet das Spiel ja an.“ Lisa kann kaum glauben, dass jemals zwei Sechser hintereinander kommen: „Zweimal eine Sechs, das ist ja gestört.“ Christoph S denkt ans Casino: „Wollen wir es nicht mit Geld machen, das wäre viel lustiger.“ Thomas ist auf Erfolgskurs: „Der Würfel ist sicher gezinkt. Ich habe noch nie verloren, was mache ich nur falsch?“ Manuel kontert: „Das stimmt nicht, einmal hast du verloren; ich aber verliere die ganze Zeit.“ Thomas: „Jetzt sollte ich aufhören.“ In einer andern Gruppe hören wir Linda: „Willst du nicht alle Würfel zugleich werfen?“ Eva erwidert: „Das ist nicht gut, mit allen Würfeln zugleich, das bringt Unglück.“ Alain sieht das rationaler: „Das kommt doch nicht drauf an. De Méré muss ja bankrott gegangen sein.“ Eva: „Eher nicht, sonst hätte er ja nicht gespielt.“ Alain meint in Bezug auf de Méré: „Schau ihn an, der schwimmt im Geld.“ Linda: „De Méré sollte nicht jedes Mal gewinnen, sonst spielen die Leute nicht mehr mit ihm.“ Oliver setzt



SALON DU CHEVALIER DE MÉRÉ

Spielangebot:

„Jeder von uns setzt den gleichen Betrag. Dann dürfen Sie einen Würfel viermal werfen. Schaffen Sie es, in den vier Würfen keine Sechs zu würfeln, dann haben Sie gewonnen und erhalten den gesamten Einsatz. Im anderen Fall gewinne ich.“

SPIELPROTOKOLL

Gesamtzahl der Spiele	Gewinn de Méré	Gewinn Mitspieler

so viel, dass de Méré bankrott gehen könnte; er würfelt aber beim letzten Wurf eine 6 und verliert.

Ich beobachte die Protokolle aus dem Hintergrund; es zeigt sich keine eindeutige Tendenz. Nach gut zehn Minuten bitte ich in den Kreis und lasse die Schreiber ihre Zahlen in die an der Tafel vorbereitete Tabelle eintragen:

Erstes Spiel:

Tisch	Anzahl Spiele	Gewinn de Méré	Gewinn Spieler
1	37	19	18
2	61	39	22
3	56	23	33
4	140	65	75
5	33	16	17
Comp.	10’000	5’107	4’893

„Können wir irgendwelche Schlüsse ziehen?“ Thomas: „De Méré kann einpacken, er macht Konkurs.“ Reto: „Die Wahrscheinlichkeit ist grösser, dass der Spieler gewinnt; in den meisten Fällen haben die Spieler gewonnen, also ist das Spiel für de Méré nicht rentabel.“ Niemand kommt auf die Idee, alles zusammenzuzählen. Mit 162 Gewinnen für de Méré und 165 Gewinnen für die Spieler haben wir eine sehr ausgeglichene Bilanz. Ich komme zu den Realitäten: „Tatsache ist, dass de Méré sehr viel gespielt hat und sich mit diesem Spiel einen luxuriösen Lebenstil finanzieren konnte. Eine Computersimulation mit 10'000 Spielen hat 5107 Gewinne für de Méré und 4893 Gewinne für die Spieler ergeben.“ Reto erklärt sich dies so: „Wir haben nur ca. 500-mal gespielt, evtl. hat er ja später umso mehr gewonnen.“ Thomas ergänzt: „Das ist halt der Zufall.“ Weitere Erklärungen sind im Moment nicht vorhanden.

Statt jetzt schon tiefer in die Diskussion dieses Ergebnisses einzusteigen, erläutere ich, dass de Méré und den Leuten dieses Spiel auf die Dauer zu langweilig wurde und er ein Spiel mit Doppelwürfen anbieten wollte. Wieder mit dem weissen Tuch um den Hals nehme ich in die rechte Hand einen Würfel und in die linke zwei. Laut denkend werfe ich mit der rechten Hand viermal hintereinander den Würfel: „Viermal werfen und mindestens eine Sechs, dann gewinne ich.“ Dann werfe ich einige Male die beiden Würfel aus der linken Hand: „Werfen mit zwei Würfeln und mindestens eine Doppelsechs erzielen. Wie oft sollen wir wohl werfen? Doppelt so oft, also achtmal, oder vier im Quadrat, also sechzehn Mal, oder sechs Mal mehr, also vierundzwanzig Mal, oder vielleicht dreissig oder gar sechsunddreissig Mal? Wie oft soll ich nur werfen lassen?“ Die Schülerinnen und Schüler bitte ich in kleine Gruppen an die Tische, um diese Frage zu diskutieren und allenfalls auszuprobieren.

In verschiedenen Gruppen wird eifrig diskutiert, so z.B. zwischen Christian K, Lisa und Kathrin. Lisa wirft beim ersten Wurf eine Doppelsechs. Katrin: „Wir probieren es einmal mit 8 Würfen.“ Christian K: „Die Doppelsechs ist aber sehr selten.“ Katrin: „Dann sind natürlich 8 Würfe viel zu wenig.“ Christian K: „Die Wahrscheinlichkeit einer Doppelsechs ist $1/6 \cdot 1/6$, also müssen wir 16-mal werfen.“ Katrin: „Dann sind aber auch 16 Würfe sehr wenig.“ Christian K: „Also versuchen wir es einmal mit 36 Würfen.“ Katrin hat geworfen und vermeldet: „Nach 13 Würfen kam zum ersten Mal eine Doppelsechs“ Christian K: „Ich würde sagen, es braucht 36 Würfe“ Katrin: „Jetzt hatte ich nach 14 Würfen eine Doppelsechs.“ …

Nach gut fünf Minuten gebe ich ein Glockenzeichen und wir treffen uns wieder in der Runde. Ich erkundige mich: „Wie soll die Spielvorgabe lauten?“
Christian K meint: „36-mal, nach 36 Würfen sollte gemäss Kombinatorik eine Doppelsechs kommen.“
Anna: „Ich kann mir nicht vorstellen, dass in 36 Würfen immer eine Doppelsechs kommt.“
Reto: „Es wäre nicht gut, 36-mal zu spielen, sonst würde de Méré zu oft gewinnen.“

Anna: „Es kann gut sein, dass man in 36 Würfen nie eine Doppelsechs wirft.“
Reto: „Ich würde 20 Würfe wählen; dann haben die Leute eine Chance.“
Simone: „6-mal mit einem Würfel wäre das Gleiche wie 36-mal mit zwei Würfeln.“
Stefan: „2/3 von 36 sind 24, ich würde mit 24 Würfen spielen.“
Die Schülerinnen und Schüler sind sich nicht einig, eine Entscheidung wird intuitiv gefällt. Ich bringe Tatsachen: „De Méré hat wie Stefan überlegt: Mit zwei Würfeln gibt es sechsmal mehr Möglichkeiten, also muss ich mit $4 \cdot 6 = 24$ Würfen spielen und gewinne mit derselben Chance.“ Kurz vor neun Uhr werden neue de Mérés und Protokollführer bestimmt und die Spielregeln an der Tafel veröffentlicht. Die Gruppen beginnen in geänderter Zusammensetzung mit dem zweiten Spiel.

Aus der Gruppe mit Simone, Graziella und Reto vernehmen wir Graziella: „Gewonnen!“ Simone: „Wir würfeln beide, dann geht es etwas schneller! – Gibt es überhaupt eine 6 auf dem Würfel?“ Graziella ruft: „de Méré“ (Es steht 5 : 1 gegen de Méré) Graziella: „Das ist wie Beschäftigungstherapie“
In einer andern Gruppe gerät Alain als de Méré in den Spielrausch: „Da könnte man vom Tellerwäscher zum Millionär werden.“ Eva zu Olivier: „Schau doch, du verlierst die ganze Zeit.“ Der Spieler ist um 4 Gewinne im Rückstand. Alain: „Diese Spielsucht ist grausam.“ Die Spielenden beginnen höhere Einsätze zu wagen und wenige Minuten später hat Alain als de Méré sein ganzes Vermögen verspielt.

SALON DU CHEVALIER DE MÉRÉ

Das neue Spielangebot:
„Jeder von uns setzt den gleichen Betrag. Dann dürfen Sie 24-mal mit zwei Würfeln werfen. Schaffen Sie es, in den 24 Würfen keine Doppel-Sechs zu werfen, dann haben Sie gewonnen und erhalten den gesamten Einsatz. Sollte jedoch mindestens eine Doppel-Sechs dabei sein, dann habe ich gewonnen.“

SPIELPROTOKOLL

Gesamtzahl der Spiele	Gewinn de Méré	Gewinn Mitspieler

Nach einer knappen Viertelstunde treffen wir uns wieder in der Runde. Die Resultate stehen vor uns an der Tafel**.** Lisa: „De Méré gewinnt öfter und wird langfristig mehr verdienen.“ Samuel: „Auch dies könnte nur Zufall sein.“ Ich möchte wissen, ob diese Spiele attraktiv sind. Anna meint: „Durch die längere Spieldauer setzen die Spieler mutiger.“ Die Addition der Kolonnen ergäbe einen Spielgewinn von 72 für de Méré gegenüber 62 für die Spieler. Als Zusatzinformation erwähne ich erneut eine Computersimulation: Diese lieferte 4927 Gewinne für de Méré gegenüber 5073 Gewinnen für die Spieler. Reto: „Das Ziel hat de Méré nur knapp verfehlt.“ Anna: „Dies kann so isoliert nicht beurteilt werden; mag sein, dass in den 4927 Spielen der Einsatz viel höher war.“

Zweites Spiel

Tisch	Anzahl Spiele	Gewinn de Méré	Gewinn Spieler
1	9	4	5
2	19	11	8
3	24	15	9
4	45	22	23
5	37	20	17
Comp.	10’000	4’927	5’073

Ich ergänze: „Faktum ist, dass de Méré auf die Dauer mehr und mehr Geld verlor und sich verschuldete. Er war fest überzeugt gewesen, genauso wie im ersten Spiel gewinnen zu müssen. Er verstand die Welt nicht mehr! In seiner Verzweiflung wandte er sich mit einem Brief an Pascal. Dieser war ein Freund von Chevalier de Méré und gilt noch heute als bedeutender Mathematiker.“

Die Schülerinnen und Schüler erhalten den Auftrag, in Zweier- oder Dreiergruppen auf A3-Papier einen Brief an Pascal zu formulieren, in dem de Méré seine verzweifelte Situation möglichst klar schildert und Pascal konkret um Hilfe bittet. Nach gut zehn Minuten werden die ersten Briefe an die Wandtafel fixiert. Neunzig Minuten sind vorbei, eine halbstündige Pause ist verdient.

Mit der Ouvertüre und dem ersten Akt bin ich sehr zufrieden. Die Schülerinnen und Schüler haben gut mitgemacht, haben das Problem erkannt und als Ausgangspunkt für den zweiten Akt formuliert. Es ist immer wieder eindrücklich zu erleben, wie schwierig es ist, mit diesem intuitiven Begriff von Wahrscheinlichkeit umzugehen. Bei einer nächsten Inszenierung will ich nach den Spielen den Computer laufen lassen, bei dem sichtbar wird, wie sich die Verhältnisse entwickeln mit wachsender Zahl der Spiele. Unsere Versuchsserien sind so klein und die Wahrscheinlichkeiten so ausgeglichen, dass oft Ergebnisse herauskommen, welche den wahren Verlauf nicht aufzeigen. Trotzdem sind die Spielerfahrungen wichtig, um konkret über diese Spiele diskutieren zu können.

Lektionen 3/4

2. Akt:
Pascals Antwort – Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Nach der Pause, um 10.00h, beginnen wir den zweiten Akt. Die vier Briefe sind an der Wandtafel mit Magneten befestigt. Da in diesem Akt Blaise Pascal Adressat ist und im Zentrum steht, will ich vorerst über ihn informieren. Die Schülerinnen und Schüler sind ihm im Französischunterricht bislang nicht begegnet. Der Französischlehrer hat mir vorgängig erklärt, dass er im Moment kaum Zeit fände, Pascal in seinen Unterricht einzuflechten. An der Leinwand leuchtet bereits ein Bild von Pascal. Hinten an der Wand habe ich mehrere Bilder aufgehängt, welche auf wichtige Stationen in seinem Leben hinweisen. Ich projiziere eine Chronologie seines Lebens und erzähle über Pascal. Im Wesentlichen erwähne ich das, was ich dann am Ende des Morgens den Schülerinnen und Schülern als Kurzportrait schriftlich abgeben werde. (→ vgl. Kurzportrait auf der folgenden Seite.)

Kurzportrait von Blaise Pascal (1623 – 1662)

BLAISE PASCAL wird 1623 im heutigen Clermont-Ferrand (Auvergne) geboren, am Fusse des erloschenen Vulkans Puy de Dôme, Seine Mutter stirbt, als Blaise erst dreijährig ist. Der Vater, ein umfassend gebildeter Mensch und Präsident des Finanzgerichtshofs, erzieht und unterrichtet seinen Sohn und die beiden Töchter selbst. Bereits in jungen Jahren zeigt Blaise Pascal ausserordentliche Begabung. Mit 16 Jahren schreibt er eine Abhandlung über Kegelschnitte und mit 19 ist er intensiv an der Entwicklung einer Rechenmaschine. Erste Anzeichen einer ernsthaften Erkrankung machen sich allerdings bemerkbar. Zu dieser Zeit besteigt Ludwig XIV, der Sonnenkönig, den Thron. Mit bahnbrechenden Experimenten am Puy de Dôme beweist Pascal 1646, dass der Luftdruck mit der Höhe abnimmt, dass also das Gegengewicht der Luft den Stand der Quecksilbersäule bestimmt. Damit ist die Lehre von Aristoteles widerlegt, nach der ein luftleerer Raum auf Grund des *horror vacui* (des Abscheues vor der Leere) unmöglich ist. In wissenschaftlichen Fragen steht Pascal entschlossen an der Seite der experimentellen Methode und des vorurteilsfreien logischen Denkens. Daneben ist er jedoch davon überzeugt, dass in den Fragen der Religion das Denken nicht genüge, um zur Wahrheit zu gelangen; dazu brauche man auch die Hilfe des Glaubens.

In den Jahren 1652 bis 1654 entstehen Abhandlungen über das Gleichgewicht bei Flüssigkeiten, über das Gewicht der Luft, über das arithmetische Dreieck (heute sog. Pascal'sches Dreieck) und Vorarbeiten zur Infinitesimalrechnung. Angeregt durch die Fragestellungen von de Méré legen Pascal und sein Freund Fermat in ihrem Briefwechsel den Grundstein für die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung. Pascal wird aber zunehmend von seiner Krankheit gequält, Gegen Ende des Jahres 1654 hat Pascal eine mystische Erleuchtung, welche ihn mit voller Energie in religiöse Auseinandersetzungen eingreifen lässt. Es entstehen seine geistvollen „Lettres Provinciales" und später seine „Pensées", eine geplante Verteidigung des Christentums, die er aber wegen seiner Krankheit und seinem Tod 1662 nicht mehr vollenden konnte. Es ist eine Sammlung von anregenden Gedanken zu Lebensweisheit, Religion und Philosophie.

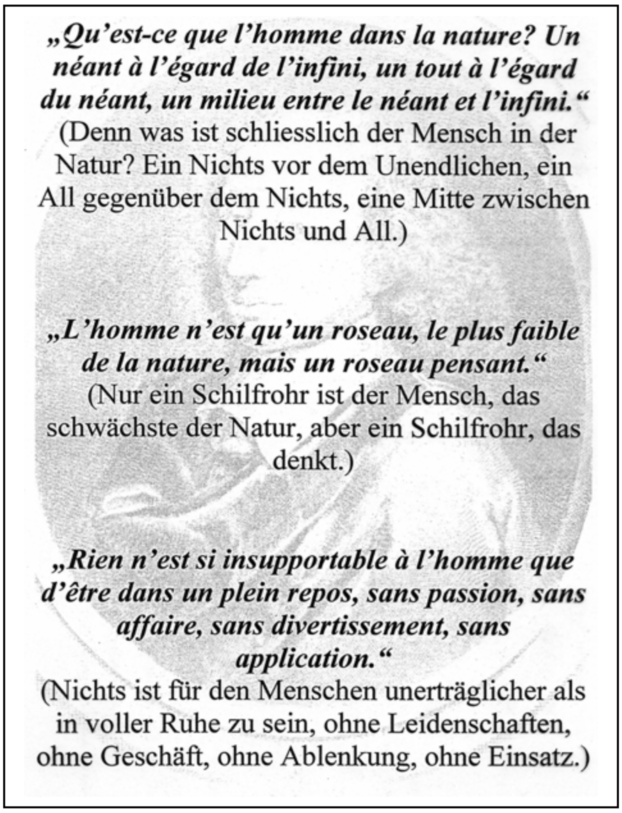
Blaise Pascal hat in den Bereichen Mathematik und Physik Bedeutendes geleistet und ist einer der grössten religiösen Denker Frankreichs.

Quellen

Hans Loeffel: Blaise Pascal. Vita Mathematica. Birkhäuser Verlag 1987
Alfréd Rényi: Briefe über die Wahrscheinlichkeit. DVW

Das Leben von Blaise Pascal: eine Chronologie

1623 19. Juni Geboren in Clermont (Auvergne)
1626 Tod seiner Mutter
1631 Vater zieht mit den drei Kindern nach Paris
1642 Erste Anzeichen ernsthafter Erkrankung
1643 Louis XIV, der „Sonnenkönig" tritt sein Amt an.
1645 Präsentation einer funktionstüchtigen Rechenmaschine
1646 Erste Kontakte mit den Jansenisten
Experimente über den luftleeren Raum
1647 Pascal trifft Descartes
1648 Experimente über den Luftdruck auf dem Puy-de-Dome.
1651 Abhandlung über den luftleeren Raum.
1652 - „Weltliche Periode", Kontakt mit Chevalier de Méré
1654 Abhandlungen: Vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten/
Über das Gewicht der Luft
Über das arithmetische Dreieck (→ Pascal'sches Dreieck)
Vorarbeiten zur Infinitesimalrechnung
Anfang der Wahrscheinlichkeitsrechnung (mit Fermat)
1654 23. November: mystisches Erweckungserlebnis
1655 Rückzug nach Port-Royal
1656 Entstehung der Pensées (Apologie des Christentums)
1657ff Diverse Artikel zur Geometrie / Weiterführung der Pensées.
1662 Pascal stirbt im Alter von 39 Jahren.
1669 Erste Veröffentlichung der Pensées



„Qu'est-ce que l'homme dans la nature? Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre le néant et l'infini."
(Denn was ist schliesslich der Mensch in der Natur? Ein Nichts vor dem Unendlichen, ein All gegenüber dem Nichts, eine Mitte zwischen Nichts und All.)

„L'homme n'est qu'un roseau, le plus faible de la nature, mais un roseau pensant."
(Nur ein Schilfrohr ist der Mensch, das schwächste der Natur, aber ein Schilfrohr, das denkt.)

„Rien n'est si insupportable à l'homme que d'être dans un plein repos, sans passion, sans affaire, sans divertissement, sans application."
(Nichts ist für den Menschen unerträglicher als in voller Ruhe zu sein, ohne Leidenschaften, ohne Geschäft, ohne Ablenkung, ohne Einsatz.)

In Ergänzung dieses Lebenslaufs projiziere und kommentiere ich einige treffende Zitate aus seinen Schriften (→ vgl. Blaise Pascal, 2002, in seinen „Pensées"). Es sind Gedanken, die in engem Zusammenhang mit seinem tiefsinnigen Denken, seinen religiösen Gefühlen und seiner schwächlichen Gesundheit stehen. Weitere Sätze von Blaise Pascal sind an der Wand aufgehängt.

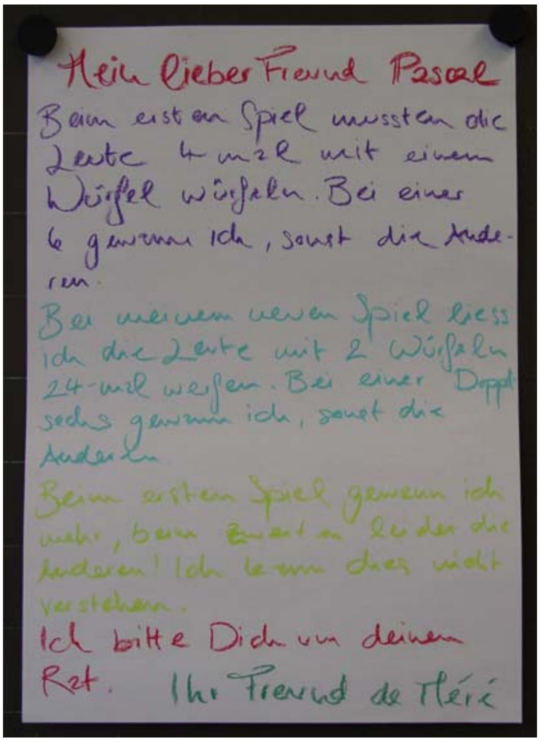
Und jetzt, im Sommer des Jahres 1654 erhält dieser Blaise Pascal von seinem Freund und Lebemann Chevalier de Méré diesen Brief. Wir lassen uns die Briefe vorlesen.

HEY BLAISE!
Ich versteh die Welt nicht mehr: Durch den neuen Spiel-Modus gewinne ich nicht mehr! Bei 24 Doppelwürfen schaffen es die Spieler mehrheitlich keine Doppelsechs zu werfen. Ich verliere! Was muss ich ändern?
GR DE MÉRÉ

Cher Monsieur Pascal
Ich bin verzweifelt. Ich führe einen Spielsalon. Mit meinem ersten Würfelspiel hatte ich viel Erfolg (4x Würfeln ohne 6 gewinnt der Spieler.) Mit meinem neuen Würfelspiel (24 x würfeln mit 2 Würfeln, ohne Doppelsechs gewinnt der Spieler) mache ich Verlust. Wie kann ich mir das erklären?!
Sämi

Cher M. Pascal
Je ne comprends plus le monde! Mein allseits bekanntes Würfelspiel treibt mich in den Bankrott! Das erste Spiel (4 x würfeln, davon 1 x eine Sechs = Ich gewinne) brachte grossen Reichtum. Das zweite Spiel jedoch (24 x mit zwei Würfeln werfen, davon 1 x eine Doppelsechs = ich gewinne) stürzte mich in den Ruin! – Wieso nur?! Ich hoffe auf ihre baldige Antwort.
Hochachtungsvoll
Chevalier de Méré

Cher Pascal
J'ai un problème. Bei meinem bisherigen Spiel konnte ich immer einen Gewinn erzielen. Doch mit meinem neu überdachten Spiel verliere ich häufiger, als ich gewinne. Wieso ist es nicht dasselbe, ob ich mit 1 Würfel 4-mal würfle oder mit 2 Würfeln 24-mal würfle?



Mein lieber Freund Pascal
Beim ersten Spiel mussten die Leute 4 mal mit einem Würfel würfeln. Bei einer 6 gewinne ich, sonst die Anderen.
Bei meinem neuen Spiel liess ich die Leute mit 2 Würfeln 24-mal werfen. Bei einer Doppelsechs gewinne ich, sonst die Anderen.
Beim ersten Spiel gewann ich mehr, beim Zweiten leider die anderen! Ich kann dies nicht verstehen.
Ich bitte Dich um deinen Rat. Ihr Freund de Méré

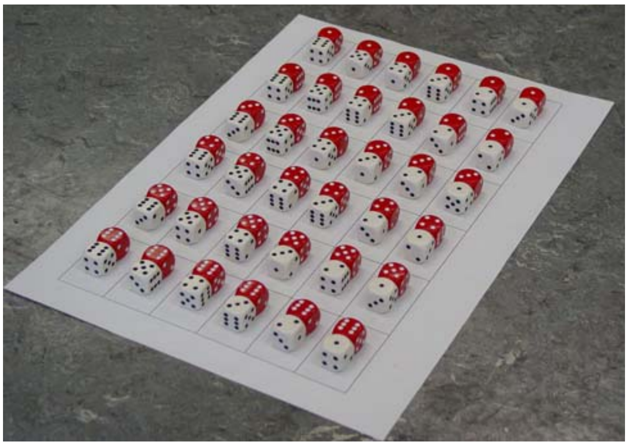
Sehr geehrter Freund,
ich wende mich an Sie in tiefster Verzweiflung. Wie Sie sicher wissen, betätige ich mich im Glücksspiel. Bei meinem 1. Glücksspiel konnte der Spieler 4x würfeln. Würfelte er eine Sechs ging der Einsatz an mich. Dieses war zwar sehr erfolgreich, wurde aber mit der Zeit sehr einseitig. Deshalb beschloss ich ein neues Glücksspiel zu entwickeln. Damit der Einsatz an mich ging, musste ein Spieler eine Doppelsechs werfen. Beim 1. Spiel entschied ich mich für 4 Würfe, da es ja 6 Möglichkeiten gibt. Beim 2. Spiel machte ich die gleiche Überlegung und wählte 24 Würfe, da es 36 Möglichkeiten gibt. Wider Erwarten machte ich jetzt Verlust. Ich habe noch oft darüber nachgedacht, finde jedoch keine Erklärung. Hiermit bitte ich Sie mein Freund um Rat, da Sie als einer der grössten Denker der Zeit gelten.
Hochachtungsvoll Ihr Freund Chevalier de Méré

Pascal wird sehr angeregt durch diese Briefe. Was mag er wohl überlegt haben? Ein neuer Auftrag ergeht an die Schülerschaft: In Vierergruppen (gemischt aus verschiedenen Briefautoren) soll – wie es Pascal gemacht hat – studiert werden, was wohl an den Überlegungen von de Méré nicht stimmt. Es gilt, Argumente zu sammeln. Die Briefe hängen weiterhin zur Orientierung an der Tafel und bei den Tischen stehen Würfel zur Verfügung. Die Gruppen gehen intensiv dahinter. Es werden Meinungen ausgetauscht, neue Wurfversuche gemacht, Ideen geboren und wieder verworfen. Alain: „Die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Wurfes für keine Doppelsechs ist 35/36.“ Simone: „Es muss da einen neuen Aspekt geben, den wir noch nicht begriffen haben.“

Ein Gespräch aus der Gruppe mit Lisa, Eva, Graziella und Reto: „Ein Würfel, 6 Möglichkeiten.“ Eva: „Zwei Würfel, das muss kombiniert werden.“ Wiederum Reto: „Also 36 Möglichkeiten. Aber warum stimmt die Überlegung mit den 2/3 nicht? Man müsste wohl mit den 35 „Nicht-Doppel-6“ gearbeitet werden.“ Graziella fragt nach: „Warum gerade 35?“ … Eine Gruppe hat sich bereits Gleichungen notiert und diese mit Logarithmen gelöst. Dort scheint Einigkeit zu bestehen.

Nach gut 20 Minuten ruft die Glocke wieder zum Plenum. Ich eröffne die Runde mit der Frage: „Was hat sich Pascal überlegt?“ und spreche damit Manuel aus der schwächsten Gruppe an. Dieser antwortet: „Mit zwei Würfeln gleichzeitig eine 6 zu werfen, ist die Wahrscheinlichkeit viel geringer als mit einem Würfel eine 6 zu werfen.“ Ich frage nach: „Was verstehen Sie unter ‚Wahrscheinlichkeit?’“ Manuel: „Das ist ein Gefühl, gesunder Menschenverstand.“ Christian K aus der zweiten Gruppe meldet sich: „Zuerst betrachtet man das Spiel mit einem Würfel aus der Sicht des Spielers. Er hat die Chance 5/6, dass er gewinnt. Ich frage nach: „Was ist das, diese ‚Chance’?“ Christian K präzisiert: „Das ist die Wahrscheinlichkeit. Es gibt 5 gute Möglichkeiten und 6 insgesamt. Und für die weiteren Gänge muss man multiplizieren.“ Anna fragt nach: „Warum multiplizieren?“ Christian K selbstbewusst: „Es funktioniert mit Addieren nicht. Wir haben es probiert. Wenn wir 35/36 und 35/36 addieren, so gibt das schon mehr als eins. Mit zwei Würfeln ergibt sich die Gleichung $(35/36)^n < 0.5$.“ Voilà, das ist ein Schlag. Wer hat das wohl schon verstanden? Wir notieren diese Ungleichung an der Tafel. Da sich niemand regt, muss ich nachfragen: „Woher kommt diese Ungleichung?“ Anna erläutert: „Es gibt 36 Kombinationen mit 2 Würfeln, davon ist eines eine Doppelsechs.“ Ich lege ein Blatt mit 6 x 6 = 36 Feldern auf den Boden und leere eine Schachtel mit weissen und roten Würfeln. „Können wir diese 36 Kombinationen sehen?“ Stefan: „Es gibt jede Möglichkeit zweimal, also auch zwei Doppelsechsen.“ Michael: „Der rote Würfel ist zuerst, dann der weisse.“ Anna: „Es kommt darauf an, ob die Farbe unterschieden wird.“ Manuel: „Wenn sie nicht unterschieden werden, gibt es 18 Möglichkeiten.“

Anna und Stefan legen die Möglichkeiten aus. Da die beiden stöhnen, frage ich, ob jemand helfen möchte. Aber Christian S. antwortet schlagfertig: „Viele Köche verderben den Brei.“ Also bleibt es dabei. Schweigend betrachten wir die Auslage eine Weile.



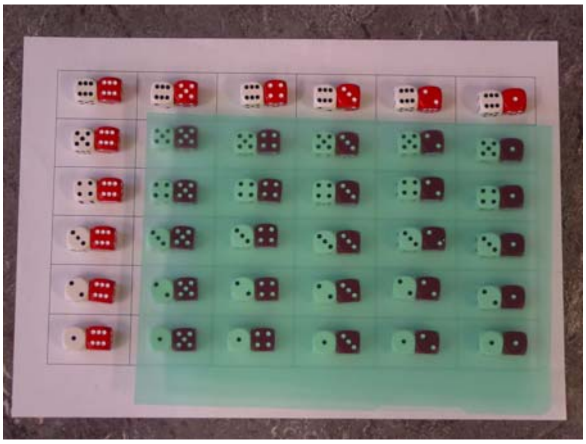
Reto meint: „Das sieht schön aus.“
Stefan: „Die Chance ist 1 zu 36 für die Doppelsechs.“
Anna: „Eigentlich gibt es nur 21 verschiedene Kombinationen.“ Zu meiner grossen Überraschung rechnet sie laut vor: „36 minus 6 durch 2 plus 6 ergibt 21“
Simone protestiert: „Aber die gemischten Paare treten doppelt so oft auf.“
Anna korrigiert sich: „Simone hat Recht, weil es für die gemischten Paare mehr Möglichkeiten gibt. Die Wahrscheinlichkeit für die gemischten Paare ist grösser.“
Michael: „Das ist komisch, soll 4;3 öfter auftreten als 5;5?“
Anna: „Jeder Ausgang kommt gleich häufig vor, muss also einzeln gezählt werden. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für eine Doppelsechs 1/36.“ Dies ist eine klare Aussage. Die 36 gleich häufigen Paare liegen ja geordnet vor uns auf dem Boden. Es folgt eine längere Stille.

Da keine weiteren Fragen oder Reaktionen folgen, frage ich bei einer weiteren Gruppe nach den gewonnenen Erkenntnissen. Von Reto gibt es nichts Neues: „Wir haben die gleichen Überlegungen wir Christian K. Die Chance ist 5/6, dass es keine 6 gibt, und dann muss man die Chancen multiplizieren.“ Auch Anna vermeldet nichts Zusätzliches aus ihrer Gruppe. Ich frage nach: „Heisst dies jetzt, wir verstehen die Spiele?“ Anna: „Warum müssen die Wahrscheinlichkeiten nicht addiert werden?“ Olivier argumentiert: „Die Addition von 5/6 und 5/6 ergibt mehr als 1.“ Auch Simone fragt nach: „Die Multiplikation ist mir nicht klar.“ Es folgt keine weitere Antwort. Herausfordernd bemerke ich: „Ich höre, dass wir die 5/6 multiplizieren, weil’s mit dem Addieren nicht funktioniert.“ „Richtig!“ bestätigt mich Christian K. Reto: „Das ist ein Ausschlussverfahren. In der Kombinatorik, da kam auch jedes zu jedem, da wurde auch multipliziert.“ Lisa doppelt nach: „Das ist genau gleich wie in der Kombinatorik. Die Chancen werden multipliziert.“ Aus diesem Bereich hoffe ich auf eine zusätzliche Klärung und frage nach: „Haben Sie in der Kombinatorik von Chancen gesprochen?“ Lisa entgegnet: „Nein, von Möglichkeiten.“ Ich erbitte ein Beispiel aus der Kombinatorik. Reto: „In der Kombinatorik haben wir uns gefragt: Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit 2 Würfeln keine 6 zu würfeln: $5 \cdot 5$?“ „Und da wurde also multipliziert?“, frage ich nach. Reto: „Ich kann zu jeder Möglichkeit des ersten Würfels jede Möglichkeit des zweiten erhalten.“ Alain verdeutlicht: Wenn der erste Würfel eine 1 zeigt, gibt es beim zweiten sechs Möglichkeiten. Gleich für jede Zahl des ersten Würfels, also 6 * 6.“ Meine Handbewegung verweist auf unsere ausgelegten roten und weissen Würfel. Reto: „Je öfter man wirft, desto geringer wird die Wahrscheinlichkeit, nie eine 6 zu werfen. Dies erreicht man mit der Multiplikation von 5/6.“

Ich blicke in die Runde: „Verstehen Sie das?“ Christian S: „Einverstanden.“ Lisa: „Einverstanden. Durch die Multiplikation wird der Bruch kleiner.“ Samuel: „Solche Sachen muss man in der Mathematik einfach ‚anschauen’.“ Ob er das jetzt wirklich beim vorliegenden Modell sieht? Die Argumentationen überzeugen mich noch nicht. Deshalb versuche ich das Gespräch beim ersten Spiel zu halten. „Welche Ausgänge interessieren uns, wenn wir zweimal einen Würfel werfen?“

Hier ist es wichtig, konsequent beim ersten Spiel zu bleiben!!! Unsere Würfelauslegung stammt aus dem zweiten Spiel mit den Doppelwürfen, verdeutlicht aber auch sehr gut für das erste Spiel, was möglich ist, wenn wir zweimal mit einem Würfel werfen!

Alain: „Ist eine 6 dabei oder nicht?“ Christian K: „Wir erhalten diese Chance durch Multiplikation. Wir sehen das auch in der Tabelle mit den Doppelwürfen.“ Ich reiche ihm ein durchsichtiges Mäppchen und frage: „Wo sind sie?“ Christian K zögert, aber die andern rufen: „Drauflegen!“ Er legt das Mäppchen auf die Würfelpaare ohne 6. So sehen wir die 5 mal 5, also 25 derartigen Würfelpaare ohne 6. Jedes Mal wenn die erste Zahl keine 6 ist, gibt es insgesamt 5 Paare, die auch als zweite Zahl keine 6 besitzen. Wir betrachten diese Auslage eine Weile.



Jetzt glaube ich, mit der Klasse den Schritt zum dritten Wurf wagen zu können. „Wie könnten wir das für das dreimalige Werfen eines Würfels darstellen?“ Reto: „Hoch 3“ „Können wir uns das vorstellen?“ Christian S: „216 Möglichkeiten. Das gibt ein räumliches Gebilde.“ „Können Sie dieses Gebäude mit seinen Zimmern beschreiben?“ Christian S: „Es hat in jede Richtung 6 Zimmer, also insgesamt 216 Zimmer.“ Ich spinne die Geschichte weiter: „Wo fühlt sich der Spieler glücklich?“ Anna: „Wie beim Mäppchen, aber in der obersten Etage nicht.“ Meine Frage wurde verstanden. Michael sieht das Gebäude noch nicht: „Wie kommt man genau auf das Gebäude?“ Reto: „Es gibt 6·6·6 Möglichkeiten, dem Spieler gefällt es in 5·5·5, also 125 Zimmern.“ Diese Antwort scheint anzukommen.

Es bleiben nur noch 12 Minuten, um in neuen Gruppen einen Antwortbrief an de Méré zu verfassen, damit dieser die Welt wieder verstehen und sich im Spielsalon auffangen kann. Mit dem Verfassen dieses Briefes lässt sich das Diskutierte auf unsere beiden Spiele konzentrieren. Hoffentlich kann die eine oder andere auftauchende Frage in der Gruppe geklärt werden. Sollte der Brief nicht fertig werden, so bitte ich, ihn am Montag mitzubringen.

Vier Briefe werden am Ende der Doppelstunde abgegeben, ein fünfter soll am Montag folgen. Die Briefe sind eher kurz und bündig, enthalten aber die richtige Grundidee. Würde die Fortsetzung nicht am Montag stattfinden, hätte ich die Briefe jedem Einzelnen als Hausaufgabe gegeben. Dabei wären sicher substantiellere Briefe entstanden, so wie ich es letztes Jahr erlebt habe.

Cher de Méré
Dir ist sicherlich nicht klar, warum wir die Wahrscheinlichkeit multiplizieren.
Münzenbeispiel: Bei einem Wurf besteht die Wahrscheinlichkeit, dass nicht der Kopf geworfen wird bei 1/2. Bei 2 geworfenen Münzen besteht die Wahrscheinlichkeit 1/4 (= 1/2·1/2)

Sehr geehrter Freund,
Ich habe mich Ihrem Problem angenommen. Lassen Sie die Spieler mindestens 25-mal würfeln, dann machen Sie keinen Verlust mehr. Hier meine Begründung: Bei jedem Wurf hat der

Spieler die Chance von 35/36, dass er keine Doppelsechs wirft. Bei 24 Würfen $(35/36)^{24}$ gibt es eine Chance von 0.508 (also über 50%), dass der Spieler gewinnt. Mit 25 oder mehr Würfen läge die Chance unter 50%.

Lieber Chevalier
Ich habe die Lösung deines Problems gefunden. Du musst mindestens 25x würfeln lassen. Dies aufgrund folgender Begründung:

$$(35/36)^n \approx 0.5$$
$$n \cdot \log(35/36) = \log 0.5$$
$$n > 24.6$$

Cher de Méré
Beim ersten Spiel ist die Chance, dass der Spieler gewinnt 5/6. Im ganzen Spiel hat er
$5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6$ = 48% Gewinnchancen. Du hingegen hast 52% Gewinnchancen.
Im zweiten Spiel hat der Spieler $(35/36)^{24}$ = 50.8% Gewinnchancen. Während du nur 49.2% Gewinnchancen hast.
Ich rate Dir deine Spieler in Zukunft 25-mal würfeln zu lassen und schon steigt deine Gewinnchance auf 50.6%.
Viel Spass beim Geldverdienen Dein Pascal

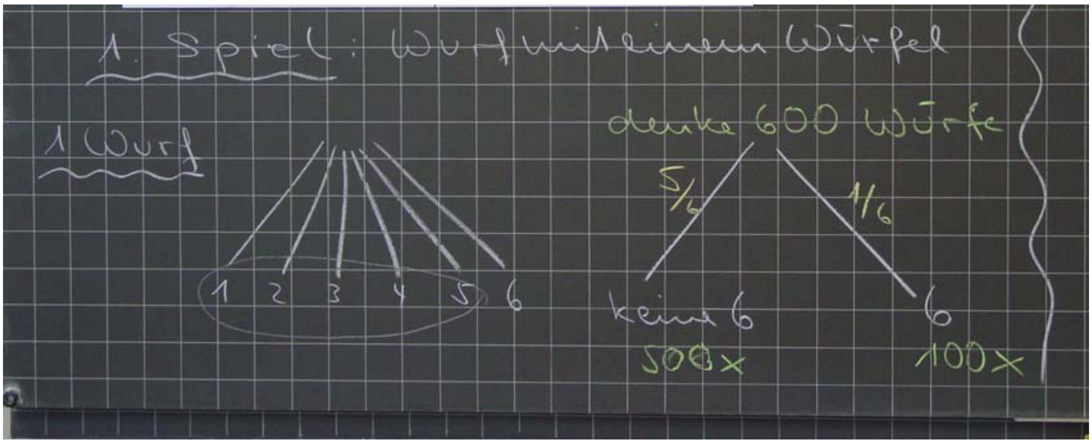
Damit endet unser Blockhalbtag. In den Briefen kommt zum Ausdruck, dass die meisten Schüler diese beiden Spiele verstanden haben und fürs Erste akzeptieren, dass beim mehrmaligen Würfeln die Wahrscheinlichkeiten multipliziert und nicht addiert werden. Allerdings sprechen wir immer noch mit einem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff. Zudem haben wir diese Multiplikation bisher nicht graphisch veranschaulicht. Dieses kräftige Mittel der Darstellung wurde in der Kombinatorik erstaunlicherweise nicht verwendet und tauchte hier bisher auch nicht spontan auf. Über die graphische Darstellung will ich am Montag das Phänomen des Multiplizierens noch weiter fundieren.

Lektionen 5/6

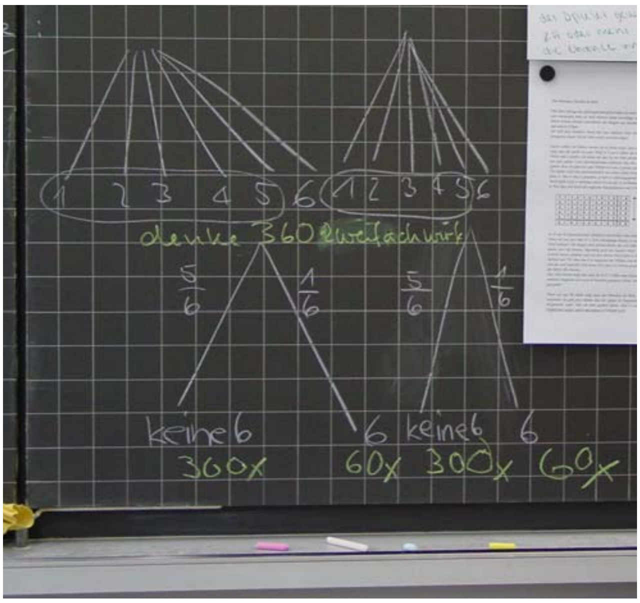
Am Montag beginnen wir wiederum im Kreis. Die Briefe von de Méré sind rund um de Méré an der Wand aufgehängt. An der Tafel fixiert sind die vier Antworten, die mir freitags am Ende des Vormittags abgegeben wurden. Die Struktur des Lehrstücks ist an der Tafel notiert. Zu Beginn erfahre ich, dass ein fünfter Brief samt der Schülerin Simone fehlt.

Ich erläutere nochmals kurz den Verlauf des Freitags: In der Ouvertüre haben wir antike Knöchelchen und Spielwürfel kennen gelernt, die für das Spiel, aber auch für die Vorhersage des Schicksals benötigt wurden. Im I. Akt stand Chevalier de Méré mit seinen Spielen im Zentrum. Wir haben sie nachgespielt und von seiner verzweifelten Lage gehört, nämlich dass er beim zweiten Spiel wider Erwarten sein Vermögen verspielte. Aus dieser Situation verfasste er einen Brief an Blaise Pascal und bat um Hilfe. Im II. Akt lernten wir Blaise Pascal kennen und wir befassten uns mit der Anfrage von de Méré. Wir merkten, dass sich die Wahrscheinlichkeiten nicht proportional verhalten, dass man sie nicht einfach addieren kann, sondern dass man sie wohl multiplizieren muss wie in der Kombinatorik. Wir haben darüber bereits anhand der Auslegordnung der 36 verschiedenen Doppelwürfe diskutiert. Alle Würfel sind wieder ausgelegt wie am Freitagmittag. Fragen scheinen keine aufgetaucht zu sein.

„Am Freitag haben wir mehrfach darum gerungen, warum die Wahrscheinlichkeiten bei diesen Spielen multipliziert und nicht addiert werden. Heute möchte ich diesen Sachverhalt noch graphisch verdeutlichen.“ Da bisher niemand auf eine Baumdarstellung hinwies, ergreife ich die Initiative:

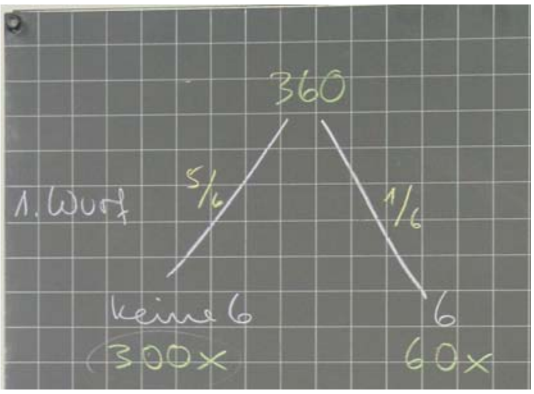


Ich zeichne die Möglichkeiten für das Resultat bei einem Wurf. Rechts fasse ich die interessierenden zwei Ausgänge ins Auge: keine 6 und 6. Zur Verdeutlichung der Anteile denken wir uns z.B. 600 einzelne Würfe. In 100 Würfen ist eine 6, in den übrigen 500 Würfen ist keine 6 zu erwarten. Dies ergibt die entsprechenden gelben Verhältniszahlen. Soweit so gut. Ein Blick in die Runde bestätigt, dass dies verstanden wird. „Wie sieht jetzt eine Darstellung

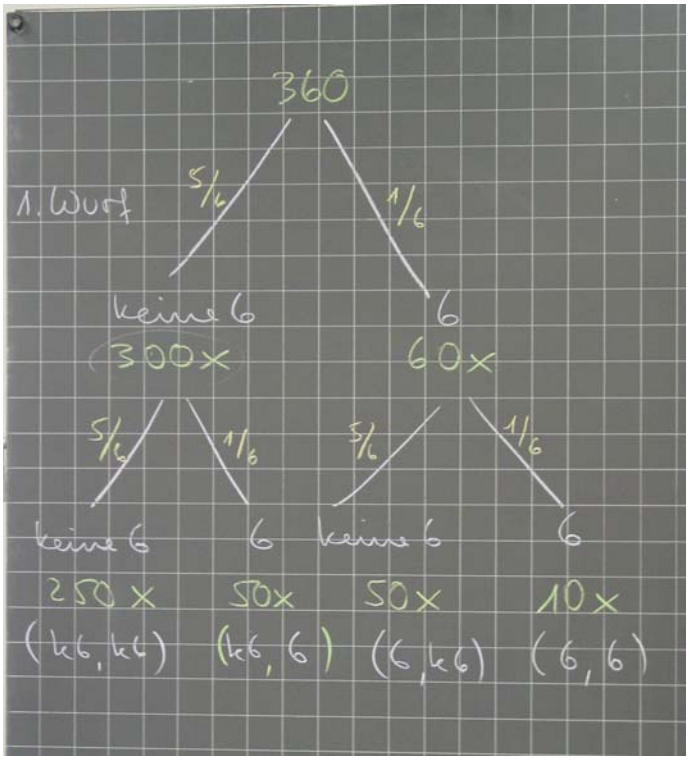


für zweimaliges Würfeln aus?“ Ich setze mich an den Rand und gebe die Bühne frei. Michael kommt an die Tafel und zeichnet zweimal die linke Situation nebeneinander. Lisa: „Hier sieht es so aus, als käme es darauf an, welches welcher Würfel ist." Reto antwortet: „Man könnte die Zahlen 1 bis 5 zusammenfassen.“ So wird dann neu gezeichnet, aber immer noch nebeneinander. In der Hoffnung auf eine andere Darstellung frage ich: „Können wir bei dieser Darstellung sehen, in wie vielen Fällen keine 6 vorkommt?“ Reto: „Bis jetzt sehen wir nur, wann eine 6 bei einem Würfel kommt.“ Beide Würfe werden getrennt voneinander betrachtet.

Ich: „Denken wir uns doch 360 Zweifachspiele.“ Anna: „Insgesamt zeigen 2 mal 1/6 eine 6." Ich traue meinen Ohren kaum: Da werden also weiterhin munter Wahrscheinlichkeiten addiert. Stefan: „Man würfelt mit dem 1. Würfel 360-mal, dann hat man 300-mal keine 6 und 60-mal eine 6.“ Auch Reto bringt es nicht zusammen: „Beim 1. Würfel kommt 60-mal eine 6, bei zweiten auch, also insgesamt 120-mal eine 6. Aber es könnte auch eine Doppelsechs geben.“ Eine zweistufige Darstellung scheint niemandem in den Sinn zu kommen. Zum Glück ist die Tafel voll. Ich wende auf eine neue Seite und wage mit der Klasse einen Neuanfang: „Wir haben eine zweistufigen Vorgang: Wir betrachten den ersten Wurf und dann den zweiten Wurf.“ Ich beginne mit der bereits gefundene Darstellung für einen Wurf.

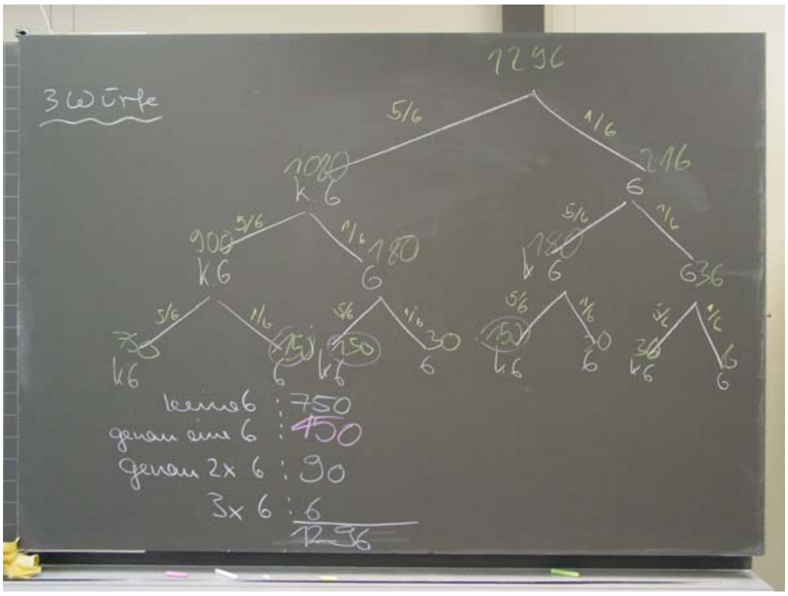


Jetzt kommt der zweite Wurf. „Und bei beiden Würfen soll keine 6 sein.“ Stefan: „Es gibt keine 6, wenn diese 5/6 bei jedem Würfel eintreten.“ Da keine weiteren Wortmeldungen erfolgen, fahre ich fort: „Sicher geht das rechts nicht, sondern nur noch in den 300 Spielen links. Nur diese Spiele kommen noch in Frage.“ Christian K: „Da sind es auch wieder 5/6 und 1/6.“ Ich nehme dies auf und zeichne zwei Linien weiter. Stefan wendet ein: „Aber der zweite Würfel wird ja 360-mal und nicht nur 300-mal geworfen! Graziella entgegnet: „Die übrigen Fälle sind auf der rechten Seite.“ So zeichne ich auch auf der rechten Seite weiter. Langsam vervollständigt sich die Darstellung. Jetzt sind wir mitten drin. „Was bedeutet die Linie ganz rechts?“ Lisa: „Doppelsechs, in 10 Fällen.“ „Und in wie vielen Spielen haben wir keine 6?“ Anna: „In 250 der Fälle; jedes Mal links.“ Eva sieht klar und möchte bereits weiter: „Jetzt muss man den Baum so hinunter machen für das ganze Spiel.“ Anna: „Ja, für jeden Wurf.“ Da diese Darstellung zentral ist, möchte ich mit der Klasse dran bleiben. „Betrachten wir den Baum noch etwas genauer: „Welchen Einfluss haben die Wahrscheinlichkeiten?“ Stefan: „360 · 5/6 · 5/6“ Ich: „Also, hier wird es sichtbar: Die Wahrscheinlichkeiten werden multipliziert und nicht addiert! In den 360 Spielen taucht bei 5/6 dieser Spiele, also bei 300 Spielen, im ersten Wurf keine 6 auf. Bei diesen 300 Spielen taucht wiederum in 5/6 der Spiele auch im zweiten Wurf keine 6 auf, also eben in 5/6 von 5/6 von 360 Spielen oder eben in $5/6 \cdot 5/6 \cdot 360 = 250$ Spielen.“ Ich blicke in die Runde. „Hier ist jetzt der wesentliche Grund für diese Multiplikation sichtbar!“ Nach einer Denkpause erkundige ich mich nach den übrigen Spielausgängen. Gemeinsam diskutieren wir die übrigen Fälle und notieren ihre Bedeutung. (k6,k6) , (k6,6) , (6,k6) , (6,6). Die vier Fälle betrachten wir auch nochmals in unserer Auslage der roten und weissen Würfel auf dem Boden. In einer Ecke die Doppelsechs, in den anschliessenden Zeilen je das Fünffache und im restlichen Quadrat unter dem grünen Mäppchen die fünf mal fünf Doppelwürfe ohne 6. Diese Parallelität zwischen der graphischen Darstellung und den ausgelegten Würfeln finde ich besonders eindrücklich und überzeugend.



Damit ist die erste halbe Stunde um. Bereits ist gesagt worden, dass es jetzt so weiter geht. Aber die Schüler sind heute eher träge und wünschen, dass wir die Fortsetzung gemeinsam an der Tafel bearbeiten. Nur durch Aufruf und mit Widerstand kommen Samuel, dann Olivier und Thomas, bis sich unter Mithilfe der ganzen Klasse der Baum an der Tafel entfaltet.

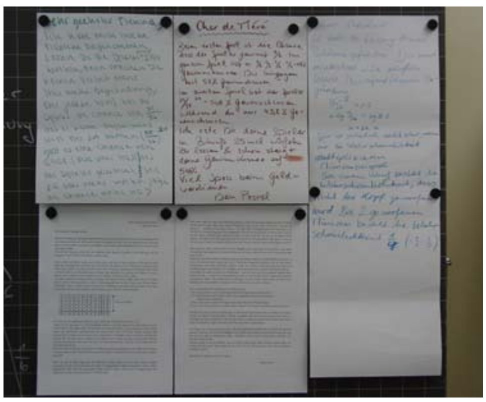
Als günstige Anzahl Spiele werden vorerst 250, dann 720 und schliesslich von Christian S mit dem Taschenrechner in der Hand 1296 vorgeschlagen. Auf Annas Nachfrage begründet er: „Wir beginnen unten mit 6 und rechnen dann immer rückwärts durch 1/6.“ (216 Spiele hätten genügt!) Nach dem Eintragen der entsprechenden Zahlen werden die 6 der 1296 Fälle ersichtlich, in denen wir drei Sechsen werfen. Anna: „Da haben wir eine Wahrscheinlichkeit von 1/6·1/6·1/6.“



Ist dieser Baum wirklich verstanden? Ich frage: „In wie vielen Fällen haben wir genau eine 6?“ Michael und Reto sehen 450 Fälle. Anna färbt sie an der Tafel ein und notiert. Schliesslich sind es vier Varianten in einer Kolonne und die Summe ergibt zu unserer Bestätigung die Gesamtzahl 1296 der Spiele. Auf meine Frage nach der Anzahl Spiele ohne 6 antwortet Samuel: „Diejenigen ganz links: $(5/6)^3$ und wenn wir viermal werfen, so ist es $(5/6)^4$.“ Die Erkenntnis, dass wir hier längs der Pfade multiplizieren, scheint sich durchgesetzt zu haben.

Die Ausgangszahl 1296 macht es hier schwieriger, das Bild des Gebäudes mit den 216 Zimmern nochmals heranzuziehen. Zum Abschluss dieser Stunde weise ich darauf hin, dass derartige Bäume ein mächtiges Werkzeug sind zur Veranschaulichung von mehrstufigen Zufallsprozessen. Wenn es uns gelingt, einen Sachverhalt auf diese Art darzustellen, so haben wir ihn gut verstanden und das Problem ist beinahe gelöst. Anhand dieses Baumes hätte ich eigentlich bereits die Wahrscheinlichkeit im laplaceschen Sinne definieren und die Regel der Multiplikation einbringen können. Ich werde es am Freitagmorgen nachholen, wenn hoffentlich die Klasse vollzählig anwesend sein wird.

III. Akt: De Méré und die Antwortbriefe



Nach der Pause kommen wir zum III. Akt. Auf Grund aller bisherigen Gespräche um die Spiele und mit den aufgehängten Antwortbriefen, darunter ein von mir eingebrachter (siehe folgende Seite!), sollte de Méré in der Lage sein, seine Spielsituation zu verstehen und weitere Spiele zu entwickeln. Die an der Tafel montierten Schülerbriefe (siehe oben!) lasse ich vorlesen, damit deren Inhalt zur Kenntnis genommen wird.

Paris, Faubourg Saint-Michel
27. September 1654

Cher Monsieur Chevalier de Méré

Mit Ihrer Anfrage das Glücksspiel betreffend haben Sie mich besonders geehrt. Da mich diese Angelegenheit sehr interessiert, habe ich mich intensiv damit beschäftigt und mich auch mit meinem Freund, Monsieur Pierre Fermat, darüber unterhalten, der übrigens auf dieselben Schlüsse gekommen ist wie ich, auch wenn auf anderen Wegen. Ich will mich bemühen, Ihnen hier eine möglichst klare Antwort zu geben, in der Hoffnung, dass Sie wenigstens diesen Teil der Welt wieder verstehen mögen.

Zuerst sollten wir klären, warum Sie in ihrem ersten Spiel auf die Dauer gewinnen. Wir sind uns wohl einig, dass die Spieler im ersten Wurf in 5 von 6 Fällen, das heißt in 5/6 der Würfe keine 6 und in 1/6 der Würfe eine 6 werfen. Ich nehme an, dass Sie mit Ihrer jahrelangen Erfahrung im Würfelspiel daraus nicht wie viele andere Leute fälschlicherweise schliessen, dass die Spieler im Spiel mit vier Würfen in 4 von 6 Spielen, bzw. im Spiel mit sechs Würfen in 6 von 6 Spielen, also immer, eine 6 werfen.
Der Spieler wirft also durchschnittlich mit seinem ersten Wurf in 5 von 6 Fällen oder in 30 von 36 Fällen keine 6. Hat er eine 6 geworfen, so hört er erfahrungsgemäß auf und lässt Ihnen seinen Einsatz liegen. Andernfalls wirft er nochmals und in 25 von den 30 verbliebenen Partien fällt auch im zweiten Wurf keine 6. Dies lässt sich durch alle möglichen Konstellationen mit 2 Würfeln veranschaulichen:

1 , 1	1 , 2	1 , 3	1 , 4	1 , 5	1 , 6
2 , 1	2 , 2	2 , 3	2 , 4	2 , 5	2 , 6
3 , 1	3 , 2	3 , 3	3 , 4	3 , 5	3 , 6
4 , 1	4 , 2	4 , 3	4 , 4	4 , 5	4 , 6
5 , 1	5 , 2	5 , 3	5 , 4	5 , 5	5 , 6
6 , 1	6 , 2	6 , 3	6 , 4	6 , 5	6 , 6

30 von 36 Fällen

In 25 von 36 Konstellationen, nämlich in den Feldern oben links, kommt also keine 6 vor. Wenn wir uns jetzt aber 6^4 *= 1296 Durchgänge denken, so wird der Spieler ein Sechstel davon im ersten Wurf verlieren. Die übrigen fünf Sechstel davon, das sind 1080 Partien, werden fortgesetzt. Fünf Sechstel davon, also 900 Partien, überstehen auch den zweiten Wurf. Und 750 Partien, nämlich wiederum fünf Sechstel davon, erfahren auch mit dem dritten Wurf keine 6. Schließlich enden 625 Partien, nämlich fünf Sechstel von 750, ohne eine 6 in insgesamt vier Würfen und der Spieler gewinnt. In allen andern Partien, und das sind immerhin 1296 minus 625, also 671 Partien gewinnen Sie. Und dies ist doch etwas mehr als die Hälfte aller Partien.*
Auf 1296 Partien heißt dies, dass Sie in 671 Fällen einen Einsatz gewinnen, in 625 Fällen Ihren Einsatz verlieren; insgesamt also etwa 46 Einsätze gewinnen sollten. Und davon haben Sie ja über lange Zeit ganz gut gelebt.

Wenn wir uns bis dahin einig sind, cher Monsieur de Méré, können wir uns Ihrem zweiten Problem zuwenden. Es geht jetzt darum, dass der Spieler 24 Doppelwürfe ausführt und gewinnt, wenn er keine Doppelsechs wirft. Wie wir oben gesehen haben, wird er etwa in einem von 36 Doppelwürfen eine Doppelsechs werfen und in den anderen 35 Würfen nicht.

Wird dieses Spiel von, sagen wir N Personen, gespielt, so sind nach dem ersten Doppelwurf noch 35/36 der N Personen im Spiel. Nach dem zweiten Doppelwurf sind es noch 35/36 von N, also $(35/36)^2$ N Personen - verzeihen Sie mir diese Formel - im Spiel. Nach 24 Doppelwürfen sind demzufolge noch $(35/36)^{24}$ N Personen ohne geworfene Doppelsechs. Und das sind die Gewinner in diesem Spiel. Und wie Sie mit einigem Aufwand selbst nachrechnen können, ist dies 0.5086·N, also mehr als die Hälfte aller N Spieler! Das heißt, auf 10'000 Spiele gewinnen Sie etwa deren 4914 und verlieren 5086 Spiele. Sie müssen sehr oft gespielt haben, bis Sie gemerkt haben, dass Ihre Chancen schlechter stehen als diejenigen der Spieler!

Zwar kann ich Ihren Lebenswandel und Ihre Tätigkeit in den Spielsalons nicht gutheißen, aber meine Dankbarkeit Ihnen gegenüber für diesen Denkanstoss ist so gross, dass ich Ihnen trotzdem ein paar Ratschläge geben möchte:
Sollten Sie nach dieser bitteren Erfahrung nicht von der Spielerei ablassen und sich Höherem zuwenden, so lassen Sie doch die Spieler einmal mehr, also 25 Mal einen Doppelwurf ausführen. Wie Sie nach meinen Ausführungen leicht selbst nachrechnen können, werden Sie so wieder auf der Gewinnerseite stehen und, bei gleichzeitiger Einschränkung Ihrer Ausgaben, mit der Zeit Ihre hohen Schulden zurückzahlen können.
Entwickeln Sie zudem ein paar neue Würfelspiele - was ich Ihnen nach dem intensiven Studium dieses Briefes zutraue - so dass Sie Ihr Spielangebot von Zeit zu Zeit wechseln und der Langeweile der Spieler zuvorkommen können. Ihre schmerzhaften Erfahrungen mit dem zweiten Spiel werden Sie wohl lehren, künftige Spiele sehr gründlich zu analysieren, bevor Sie damit in den Salons auftreten.

Hier drei Spielvarianten, wie ich sie mir vorstellen könnte:
1. *Der Spieler gewinnt, wenn in fünf Doppelwürfen die Augensumme 8 nicht auftritt.*
2. *Der Spieler gewinnt (oder verliert), wenn in einer festgelegten Anzahl Dreierwürfe die Augensumme 7 vorkommt.*
3. *Ebenso lässt sich ein Spiel für die Augensumme beim Wurf mit 4 Würfeln denken.*

Es lassen sich noch viele weitere attraktive Spiele erdenken! Der Phantasie sind da keine Grenzen gesetzt!

Ich hoffe sehr, dass Sie meinen Ausführungen in allen Details folgen können, dass Sie mindestens in diesem Bereich den Nutzen mathematischen Denkens anerkennen und dass Sie jetzt etwas besser unsere so vielfältige und überraschungsreiche Welt verstehen können. Sollten trotz allem Unsicherheiten oder weitere Fragen auftauchen, so zögern Sie nicht, mich frühzeitig wieder zu konsultieren.

Im Übrigen hat es mich sehr gefreut, dieses überaus fundamentale Problem lösen zu dürfen. Ich wurde angeregt, intensiver über die Gesetzmäßigkeiten des Zufalls nachzudenken und bin überzeugt, dass sich hier ein neues Feld der Mathematik eröffnet. Demnächst will ich meine diesbezüglichen Gedanken und Resultate niederschrieben.
Nebenbei gesagt wissen Sie vielleicht, dass ich schon ein paar andere kleine Schriften verfasst habe, von welchen ich Ihnen gerne einige beilege für den Fall, dass Sie nicht das ganze Leben nur am Spieltisch verbringen möchten.

Mit den besten Wünschen für Ihre Zukunft

Blaise Pascal

„Sie erhalten jetzt als de Méré die Antwortbriefe, studieren diese und notieren sich vorerst die wichtigen Erkenntnisse über diese Spiele. Versuchen Sie, möglichst alles zu klären. Allenfalls besteht die Möglichkeit, sich mit einer konkreten Frage schriftlich nochmals an Pascal zu wenden.“ Dazu verteile ich eine kurze Beschreibung der Spiele und meinen längeren Brief von Pascal an de Méré, in dem es gegen Schluss neue Spielvorschläge hat. So hat jeder Schüler in dieser zweiten Lektion die Gelegenheit, sich die wichtigsten Zusammenhänge zu notieren, sich in einer kleinen Dreiergruppe Klarheit zu verschaffen und anhand von weiteren Problemen das Gelernte anzuwenden.

Viel wird nicht aufgeschrieben, aber alle notieren sich von der Tafel die Bäume. Im zweiten Teil der Lektion widmen sich die meisten den Spielen. Christian S meint, es gebe ja sehr viele Möglichkeiten, mit 3 Würfeln eine Augensumme 7 zu erhalten. Ich ermutige ihn: „Das ist durchaus zu bewältigen.“ Lisa fragt mich, was die Augensumme sei. Schliesslich notiert sie untereinander alle 15 Möglichkeiten, wie die Augensumme 7 zustande kommen kann. Alain ist sich im Unklaren, ob 4-2-1 und 4-1-2 gesondert zu zählen sind. Ich verweise ihn auf den Baum und auf die ausgelegten Würfel am Boden. Michael meint dazu: „Ja, es kommt auf die Reihenfolge an.“ In dieser Gruppe wird mit Permutationen aus der Kombinatorik gearbeitet und sehr schnell die Anzahl der Möglichkeiten bestimmt:

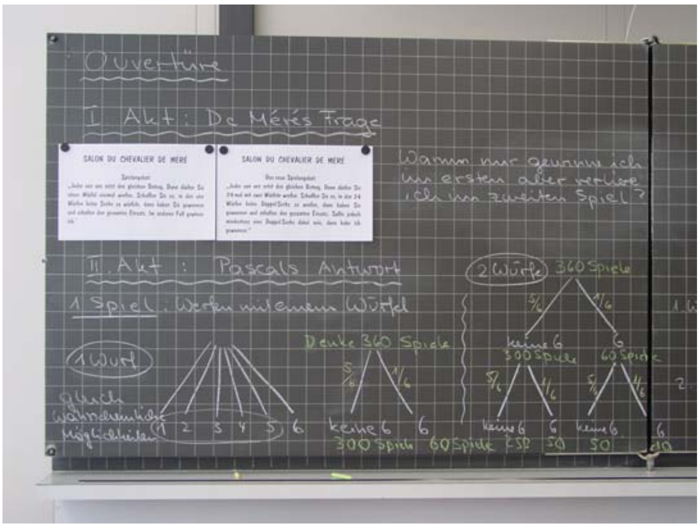
5 1 1	3-mal	nämlich	5 1 1	1 5 1	1 1 5			
4 1 2	6-mal	nämlich	4 1 2	4 2 1	2 4 1	2 1 4	1 4 2	1 2 4
3 3 1	3-mal	nämlich	3 3 1	3 1 3	1 3 3			
3 2 2	3-mal	nämlich	3 2 2	2 3 2	2 2 3			

Anfragen an Pascal tauchen in dieser zweiten Stunde keine auf.
Als Hausaufgabe formuliere ich den folgenden Auftrag:
1. Klären Sie Spielvorschlag 2.
2. Formulieren und analysieren Sie ein weiteres, eigenes Spiel (auf separatem A4-Blatt!).

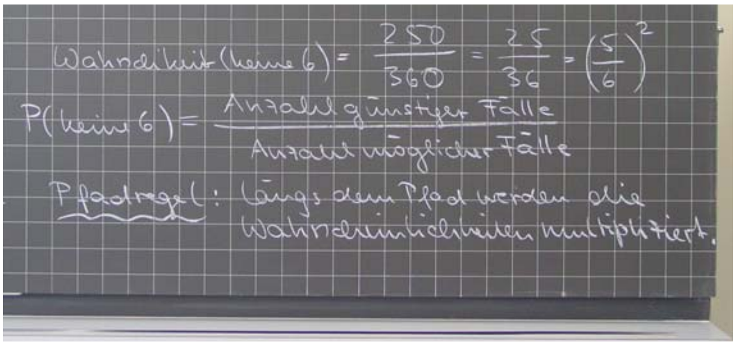
Lektion 7

Am Freitag sitzen wir wiederum im Kreis. An der Wand hängen jetzt auch die Antwortbriefe von Pascal an de Méré. Die Sammlung im Zentrum hat eine Erweiterung erfahren um einen grossen Astragalus, mehrere heutige Spielwürfel und ein räumliches Würfelmodell, das unser im Zusammenhang mit dem dreifachen Würfeln erwähntes Gebäude darstellen soll. Annina ist erstmals dabei und Simone hat sich wieder eingefunden. Dafür fehlen Thomas, Kathrin und Eva, welche einen freien Halbtag einziehen. Ob dies wohl mit dem Lehrstück zu tun hat? Christian K fällt zu Beginn auf, dass am Boden ein neuer Knochen liegt. Er vermutet, es könnte ein Rinderknochen sein. Es ist ein Astragalus eines nepalesischen Wasserbüffels, könnte aber genau so gut von einem Rind stammen. Weiter fallen einige besondere Würfel auf: Es hat Siebnerwürfel, einen Kugelwürfel und neuseeländische „Astragali“.

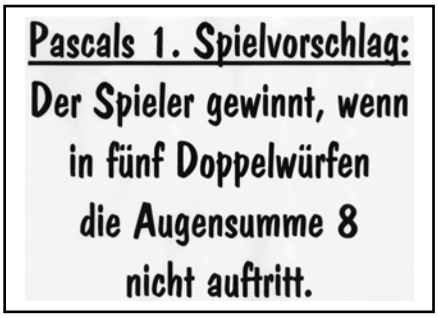
Ich: „Heute werden wir uns nach einer kurzen Repetition samt einigen neuen Begriffen im III. Akt mit den neuen Spielen für de Méré befassen und, wenn es die Zeit erlaubt, zu einem Abschluss des Lehrstücks gelangen.“ An der Tafel habe ich zur Repetition die bereits behandelten Bäume zum 1. Spiel von de Méré mit einem und zwei Würfeln vorbereitet. Dies soll als Einstieg, als Information für die zwei am vergangenen Freitag abwesenden Schülerinnen



und als Überblick für das kommende Feedback dienen. Beim Durchgang durch die Beispiele erläutere ich die wichtigsten Begriffe: gleich wahrscheinliche Ausfälle, Ereignis, Wahrscheinlichkeitsbaum. Für die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln keine 6 zu werfen, vermeldet Michael sofort: „25/36, nämlich 5/6 mal 5/6.“ Graziella liefert die Begründung: „Von 360 Spielen sind 250 günstig, also 250/360.“ Dies ist der Moment, um die Wahrscheinlichkeit bei gleich wahrscheinlichen Ausfällen zu definieren als Verhältnis der Anzahl der günstigen Fälle zur Anzahl der möglichen Fälle. Meist schreiben wir für die Wahrscheinlichkeit P wegen probability (e), probabilité (f), probabilità (i), probabilidad (sp), … und dies alles aus dem Latein: probabilitas.



Damit sind wir auch bereit, die beiden Spiele des de Méré mit einem Baum zu illustrieren. Wir einigen uns darauf, dass nur ein einziger Pfad nötig ist, und dieser liefert sofort die Wahrscheinlichkeit von $p = (5/6)^4 = 0.4823$ als Gewinnchance des Spielers und $q = 0.5177 > 0.5$ als Gewinnchance von de Méré. Ebenso erklärt sich das zweite Spiel von de Méré. Wiederum reicht ein Pfad mit 24 Doppelwürfen. Der Spieler gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit von $(35/36)^{24} = 0.5086 > 0.5$. Dies ist nur wenig mehr als 0.5. Somit muss de Méré sehr oft gespielt haben, um überhaupt klar feststellen zu können, dass er auf die Dauer verliert.



In den knapp 20 Minuten haben wir die zentralen Aspekte nochmals vertieft und die wichtigsten Begriffe geprägt. Da keine Fragen bestehen, gehe ich davon aus, dass wir für die beiden Spielvorschläge von Pascal gerüstet sind. Auf einer neuen Tafel hänge ich den ersten Spielvorschlag Pascals auf. Linda beginnt mit der Erklärung: „Es gibt 5 Möglichkeiten für die Augensumme 8, also ist die Wahrscheinlichkeit in einem Doppelwurf 31/36, dass keine Augensumme 8 fällt.“ Auf meine Nachfrage zeigt sie in unseren ausgelegten Würfeln, wie die fünf Möglichkeiten in einer schrägen Linie liegen. Dann fährt sie fort und erläutert, dass sich somit in den 5 Würfen die Wahrscheinlichkeit, keine Augensumme 8 zu erhalten, durch Multiplikation ergibt:

$\rightarrow$ p(keine Augensumme 8) = $(31/36)^5 = 0.4735$.

Samuel ergänzt, dass dann de Méré mit einer Wahrscheinlichkeit

$q = 1 - 0.4735 = 0.5265 > 0.5$ gewinnt.

Pascals 2. Spielvorschlag:
Der Spieler gewinnt (oder verliert) wenn in einer festgelegten Anzahl Dreierwürfe die Augensumme 7 vorkommt.

Zum zweiten Spiel meldet sich Christian S: „Zuerst müssen wir alle Möglichkeiten aufschreiben, in denen keine 7 vorkommt. Es sind 15 Würfe.“ Er beginnt zu diktieren:
1 1 5, 1 2 4, 1 3 3, … Ich zögere, da er wirklich alle 15 Fälle einzeln diktieren will. Alain interveniert: „Wenn alle Ziffern verschieden sind, gibt es 6 Vertauschungen, so genannte Permutationen, bei zwei verschiedenen Ziffern sind es 3 mögliche Vertauschungen, und dies kommt dreimal vor: 1 1 5, 1 3 3, 2 2 3.“ Nachdem dies geklärt ist, fährt Christian S fort: „Insgesamt gibt es 216 Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, im ersten Wurf keine 7 zu werfen, ist 15/216; da habe ich eine Ungleichung aufgestellt: $\frac{15}{216} \cdot x < 0.5$.“

Anna protestiert als Erste: „Das muss aber ‚hoch x’ heissen.“ Reto pflichtet bei und Linda begründet: „Die Wahrscheinlichkeiten müssen multipliziert werden.“ Unzufrieden blicke ich immer noch in die Runde. Christian K merkt den zweiten Fehler: „Dies ist doch die Wahrscheinlichkeit, bei *jedem* Spiel Augensumme 7 zu erhalten.“ Schliesslich lautet die Gleichung: $(\frac{201}{216})^x = 0.5$. Jetzt sehe ich Zustimmung.

Logarithmieren liefert $\lg(\frac{201}{216})^x = x \cdot \lg(\frac{201}{216}) = \lg(0.5) \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{\lg(0.5)}{\lg(\frac{201}{216})} = 9.63$

Anna interpretiert: „Die Grenze zwischen Gewinn und Verlust liegt bei 9.6 Würfen.“ „Was bedeutet dies, wenn der Spieler ohne Augensumme 7 gewinnt?“ Die Taschenrechner liefern die genaue Zahl: $(201/216)^{10} = 0.4869$. Wenn de Méré also 10-mal werfen lässt, so gewinnt der Spieler mit $p = 0.4869$ und de Méré mit 0.5131.

Damit ist auch der zweite Spielvorschlag von Blaise Pascal besprochen. Zu meiner Versicherung erkundige ich mich nach allfälligen Nachfragen an Blaise Pascal. Diese bleiben aus. Viel Zeit haben wir benötigt, aber wenn ich daran denke, dass viele der Schüler und Schülerinnen unsicher waren, sich nach der Klärung konzentriert Notizen gemacht haben und schliesslich die Nachfragen ausbleiben, so bin ich überzeugt, dass sich der Aufwand gelohnt hat. Die erste Lektion geht zu Ende und ich erkundige mich noch nach den neu entwickelten Spielen. Leider hat nur Christian K ein Spiel entwickelt.

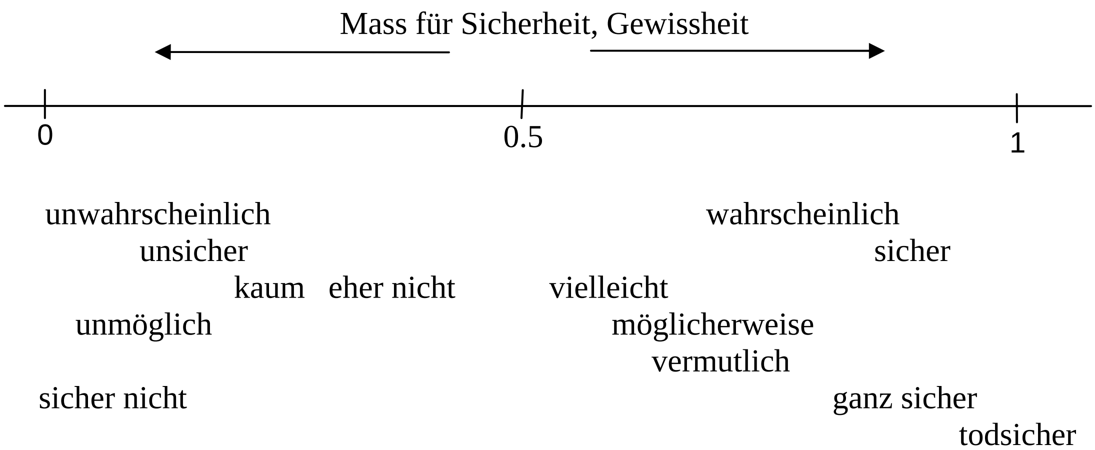
Lektion 8

Geplant hatte ich, die neuen Spiele in Kleingruppen austauschen zu lassen und anschliessend die besten Spiele im Plenum zu begutachten. Da nur ein neues Spiel vorhanden ist, verkürze ich diese Phase. Zu Beginn der zweiten Lektion rege ich an zu überlegen, welche Kriterien erfüllt sein müssen, damit wir ein ideales Spiel für de Méré erhalten. Reto: „Das Spiel sollte abwechslungsreich und nicht zu lang sein. Das gibt mehr Spiele pro Zeit.“ „Der Spieler sollte das Spiel nicht leicht durchschauen können; er soll glauben, dass er gewinnen kann.“ Christian K meint, sein Spiel erfülle diese Kriterien nicht. An der Tafel präsentiert er sein Spiel: „Der Spieler gewinnt, wenn in 12 Doppelwürfen 6 ; 1 oder 1 ; 6 vorkommt. Die Chance, dass 1 ; 6 oder 6 ; 1 vorkommt, entspricht 2/36, das heisst mit einer Wahrscheinlichkeit von 34/36 kommt in einem Doppelwurf keines dieser Paare vor. De Méré gewinnt, wenn keines der Paare vorkommt, es muss also gelten: $(34/36)^n > 0.5$. Durch Logarithmieren und

Auflösen erhält man $n < 12.1$. Wenn de Méré also 12-mal werfen lässt, so ist er auf der Gewinnerseite, denn $(34/36)^{12} = 0.5036$."
Das Spiel ist gut vorgestellt worden und die Schülerinnen und Schüler konnten folgen. Aber warum erfüllt dieses Spiel die genannten Kriterien nicht, möchte ich wissen. Christian meint, es sei nichts Neues, man hätte Dreierwürfe nehmen sollen. Reto sieht einen wesentlichen Unterschied: „Es ist doch etwas Neues: Jetzt *muss* der Spieler einen bestimmten Ausgang erhalten. Früher durfte er etwas *nicht* erhalten." Mit den Vorschlägen von Pascal liegen jetzt insgesamt drei neue Spielvorschläge bereit. Diese gegeneinander abzuwägen finde ich unnötig. (Der Vorteil im präsentierten Spiel ist so gering, dass de Méré damit seine Finanzen kaum in Ordnung bringen wird.) Für de Méré sollte dies genügen, falls er sich wieder in die Salons wagen will.

Finale mit Rückblick und Ausblick

Damit kommen wir zum Abschluss des Lehrstücks: „Wir haben mit den Knöchelchen und den antiken Würfeln begonnen. Aber nicht nur beim Spiel, sondern auch im Alltag haben wir ein Gefühl, eine Vorstellung, was zu erwarten ist oder nicht. Und so kennen wir in unserer Sprache die verschiedensten Wörter, um auszudrücken, wie sicher, wie gewiss etwas ist." Wir sammeln entsprechende Wörter und versuchen sie auf einer Skala einzutragen:
Christian S: „Etwas ist wahrscheinlich – unwahrscheinlich."
Graziella: „Die Chance ist vorhanden – nicht vorhanden."
Lisa: „Etwas ist möglich, unmöglich"
Stefan: „Etwas ist sicher, ja sogar todsicher." …



„Wir kennen also eine ganze Palette von Begriffen, die ein Mass von Sicherheit, von Gewissheit ausdrücken. In der Mitte besteht am meisten Unsicherheit, nach links und rechts nimmt die Gewissheit zu. Mit diesem intuitiven Mass an Gewissheit, das vom Zufall geprägt ist, haben wir uns anhand der Spiele intensiver auseinandergesetzt. Und so entstand eine neue mathematische Disziplin über die Ungewissheit, über das Zufällige: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir haben dabei erlebt, dass der intuitive Umgang mit diesen Wahrscheinlichkeiten nicht der richtige ist, dass wir bei dreimaligem Werfen eines Würfels nicht dreimal so grosse Chance haben, eine 6 zu werfen wie mit einem Würfel. Unser proportionaler Ansatz versagt in diesem Zusammenhang!

Die Briefe von Pascal, die er an seinen Freund Fermat in Toulouse geschrieben hat, sind leider nicht erhalten, aber ein ungarischer Mathematiker, Alfréd Rényi, hat unter dem Titel „Briefe über die Wahrscheinlichkeit" fiktive Briefe mit eingeflochtenen Zitaten aus den

„Pensées“ verfasst, wie sie Pascal an Fermat hätte schreiben können. Aus einem dieser Briefe will ich ein paar Abschnitte vorlesen.“ (A. Rényi 1969, S. 18ff)

„Ich nehme an, Sie kennen meinen Brief an die Pariser Akademie, den ich vor einigen Wochen schrieb; es würde mich nicht wundern, wenn Sie den folgenden Satz, mit dem ich den Inhalt einer geplanten, aber noch nicht geschriebenen Arbeit umreissen wollte, etwas hochtrabend gefunden hätten: ‚Somit kann diese Lehre, die die Exaktheit der mathematischen Beweisführung mit der Unsicherheit des Zufalls verknüpft und diese anscheinend vollständig einander widersprechenden Elemente miteinander versöhnt, mit Recht Anspruch auf die folgende, die Namen ihrer beiden gegensätzlichen Bestandteile ausborgende, wohl verblüffende Benennung erheben: die Mathematik des Zufalls.’

Der Mensch ist meiner Meinung nach zum Denken geboren. Seine Denkfähigkeit unterscheidet ihn von den Tieren, darin besteht seine Menschenwürde. Wir sind von einer zweifachen Unendlichkeit umgeben: einerseits von der unendlichen Weite des Weltalls, in der nicht nur wir, sondern die Erde oder sogar das ganze Sonnensystem gleichsam nur ein kleiner Tropfen im Meere sind, andererseits von der unendlichen Tiefe der Welt, wo jedes winzige Wassertröpfchen selbst ein kleines Universum in sich bildet. Wir befinden uns in der Mitte zwischen dem unendlich Grossen und dem unendlich Kleinen, wir sind Staubkörnchen im Vergleich mit den Sternen, aber Riesen im Vergleich mit den winzigen Lebewesen, die in jedem Wassertropfen wimmeln. Es ist einerlei, ob wir unseren Blick zu den Sternen erheben oder in unsere eigene Seele werfen, ob wir die Zukunft oder die Vergangenheit zu erforschen wünschen, wir finden nirgends einen sicheren Stützpunkt. Wenn wir irgend etwas, das wir zu kennen glauben, genauer betrachten – es auf die Nadel unserer Aufmerksamkeit spiessen und unter das Mikroskop unserer Logik legen – , stellt sich sogleich heraus, dass wir in gar nichts sicher sein können. Ich halte es für einen recht schwachen Trost, dass mein vergebliches Ringen mit all diesen Fragen beweist, dass ich selbst ‚bin’. Mich interessiert nämlich nicht die Frage, ob ich überhaupt bin oder nicht, sondern die Frage, wer ich eigentlich bin. Auf diese Frage finde ich aber keine Antwort, und ich kann die quälende Ungewissheit mitunter kaum ertragen. Wir wissen nicht, woher wir kommen, warum wir geboren sind und wohin wir gehen.

Die bedrückende Ungewissheit, von der ich vorhin gesprochen habe, hat ihre Wurzeln zum Teil in dem Aberglauben der meisten Menschen, die, falls sie über etwas nicht volle Gewissheit haben (und wirklich volle Gewissheit haben wir fast niemals), dann glauben, sie wüssten eben überhaupt nichts darüber. Der Ausgangspunkt meiner Gedanken ist die Behauptung, dass dies ein Irrtum ist. Teilweises Wissen ist auch Wissen, und unvollständige Gewissheit hat ebenfalls einen gewissen Wert, besonders dann, wenn man sich des Grades der Gewissheit seines Wissens bewusst ist. „Wieso“ – könnte jemand hier einwenden – „kann man den Grad des Wissens messen, durch eine Zahl ausdrücken?“ – „Jawohl“ – würde ich antworten -, „man kann es, die Leute, die ein Glücksspiel spielen, tun doch genau das.“ Wenn ein Spieler einen Würfel wirft, kann er nicht im Voraus wissen, welche Augenzahl er werfen wird, doch etwas weiss er, dass nämlich alle sechs Zahlen die gleiche Aussicht haben. Wenn wir die volle Gewissheit zur Einheit wählen, dann kommt dem Ereignis, dass eine bestimmte der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 geworfen wird, offenbar der Gewissheitsgrad 1/6 zu.“

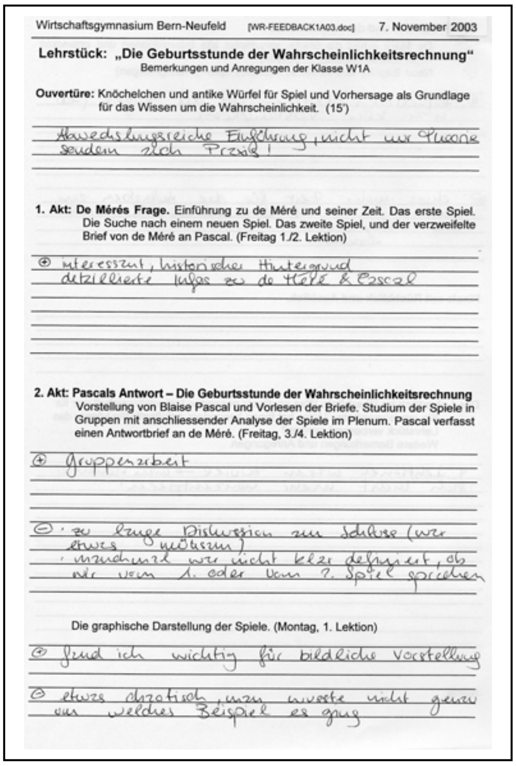
Übrigens hat der Mensch nicht nur eine Theorie über den Zufall, über das Ungewisse entwickelt, sondern auch über das Chaotische, über Gesetzmässigkeiten chaotischer Systeme.

Nach kurzer Denkpause fahre ich fort: „Was wir bisher diskutiert haben, bezieht sich auf Versuche, in denen wir gewisse Wahrscheinlichkeiten kennen wie beim regelmässigen Würfel. Wäre eine Anfrage bezüglich der unregelmässigen Astragali gekommen, so hätten wir diese etwa hundert Jahre später an Jakob Bernoulli nach Basel weiter reichen können, der sich mit diesen Fragen auseinandergesetzt hat.“ Ich verweise auf ein Bild, in dem diese berühmte Mathematikerfamilie dargestellt ist. Die fundamentalen Arbeiten von Blaise Pascal und Jakob Bernoulli haben ein mathematisches Gebiet begründet, das heute für die meisten Wissenschaften unverzichtbar ist.

Das Lehrstück wird jetzt zur Quelle für die Fortsetzung: Wahrscheinlichkeitsbegriff, Laplace-Versuche aus den verschiedensten Gebieten, Binomialverteilung mit Bernoulli, Testen von Hypothesen, …)

5.5 Feedback der Schüler zum Lehrstück

Damit sind wir ans Ende dieses Lehrstücks gekommen. Ich verteile ein Feedbackblatt und bitte die Schülerinnen und Schüler dieses eigenständig und sorgfältig auszufüllen, da mir die Rückmeldungen für die Optimierung dieses Lehrstücks sehr wichtig sind. Es bleiben gerade noch 15 Minuten Zeit, nach meiner Erfahrung ideal für das Ausfüllen des Fragebogens. Ich beobachte allerdings, dass die Blätter eher oberflächlich und vorwiegend stichwortartig ausgefüllt werden. Die meisten Blätter werden vor Ende der Lektion abgegeben.



Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [WR-FEEDBACK1A03.doc] 7. November 2003

Lehrstück: „Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung“
Bemerkungen und Anregungen der Klasse W1A

Ouvertüre: Knöchelchen und antike Würfel für Spiel und Vorhersage als Grundlage für das Wissen um die Wahrscheinlichkeit. (15')

Abwechslungsreiche Einführung, nicht nur Theorie sondern auch Praxis!

1. Akt: De Mérés Frage. Einführung zu de Méré und seiner Zeit. Das erste Spiel. Die Suche nach einem neuen Spiel. Das zweite Spiel, und der verzweifelte Brief von de Méré an Pascal. (Freitag 1./2. Lektion)

interessant, historischer Hintergrund
detaillierte Infos zu de Méré & Pascal

2. Akt: Pascals Antwort – Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Vorstellung von Blaise Pascal und Vorlesen der Briefe. Studium der Spiele in Gruppen mit anschliessender Analyse der Spiele im Plenum. Pascal verfasst einen Antwortbrief an de Méré. (Freitag, 3./4. Lektion)

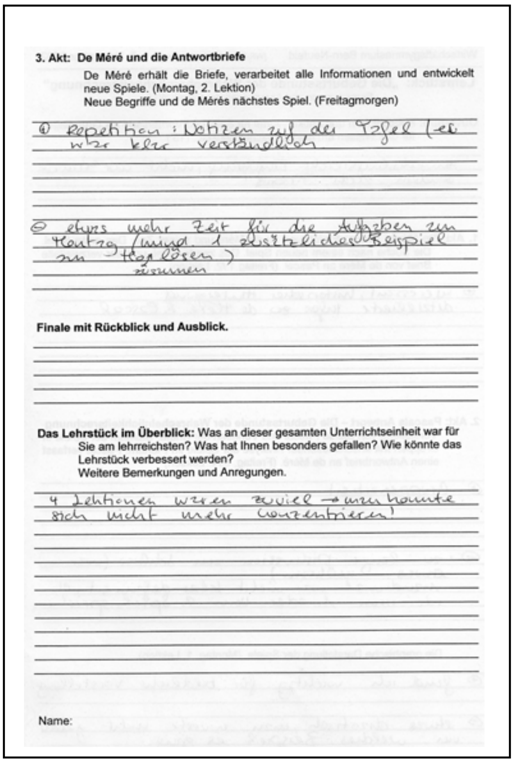
Gruppenarbeit

· zu lange Diskussion zum Schluss (war etwas mühsam)
· manchmal war nicht klar definiert, ob wir vom 1. oder vom 2. Spiel sprechen

Die graphische Darstellung der Spiele. (Montag, 1. Lektion)

fand ich wichtig für bildliche Vorstellung

etwas chaotisch, man wusste nicht genau um welches Beispiel es ging



3. Akt: De Méré und die Antwortbriefe
De Méré erhält die Briefe, verarbeitet alle Informationen und entwickelt neue Spiele. (Montag, 2. Lektion)
Neue Begriffe und de Mérés nächstes Spiel. (Freitagmorgen)

Repetition: Notizen auf der Tafel (es war klar verständlich)

etwas mehr Zeit für die Aufgaben zum Vortrag (mind. 1 zusätzliches Beispiel zu Hause lösen) zusammen

Finale mit Rückblick und Ausblick.

Das Lehrstück im Überblick: Was an dieser gesamten Unterrichtseinheit war für Sie am lehrreichsten? Was hat Ihnen besonders gefallen? Wie könnte das Lehrstück verbessert werden?
Weitere Bemerkungen und Anregungen.

4 Lektionen waren zuviel → man konnte sich nicht mehr konzentrieren!

Name:

„Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung"

Ein Lehrstück in 8 Lektionen

Bemerkungen und Anregungen der Klasse W1A vom 7. November 2003

	Ouvertüre: Knöchelchen und antike Würfel für Spiel und Vorhersage als Grundlage für das Wissen um die Wahrscheinlichkeit. **(15')**	**I. Akt: De Mérés Frage** Einführung zu de Méré und seiner Zeit. Das erste Spiel. Die Suche nach einem neuen Spiel. Das zweite Spiel, und der verzweifelte Brief von de Méré an Pascal. **(Lektionen 1/2)**	**II. Akt: Pascals Antwort – Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Vorstellung von Blaise Pascal und Vorlesen der Briefe. Studium der Spiele in Gruppen mit anschliessender Analyse der Spiele im Plenum. Pascal verfasst einen Antwortbrief an de Méré. **(Lektionen 3/4)**	Die graphische Darstellung der Spiele. **(Lektion 5)**	**III. Akt: De Méré und die Antwortbriefe.** De Méré erhält die Briefe, verarbeitet alle Informationen und entwickelt neue Spiele. Neue Begriffe und de Mérés nächstes Spiel. **(Lektionen 6/7)**	**Finale mit Rückblick und Ausblick.** **(Lektion 8)**	**Das Lehrstück im Überblick:** Was an dieser gesamten Unterrichtseinheit war für Sie am lehrreichsten? Was hat Ihnen besonders gefallen? Wie könnte das Lehrstück verbessert werden? Weitere Bemerkungen und Anregungen **(Lektionen 1-8)**
AAA	**Gut als Einleitung. Nicht zu sehr ausschweifen (Herstellung der Knöchelchen…)**	**Ausformulierung von 2 Briefen ist eher mühsam (zeitraubend). Würfelversuche wären eigentlich gut zur Veranschaulichung, jedoch etwas mühsam, wenn Resultate nicht mit Theorie übereinstimmen.**	**Dieselben Probleme wie oben erwähnt.**		**Ausprobieren des neu Erlernten bei neuen Spielen ist gut, um den Inhalt besser zu verstehen.**	**Zusammenfassung gut, Bezug auf Alltag eher in der Einleitung?**	**Ich persönlich bin allgemein nicht unbedingt ein Freund von Lehrstücken. Meistens ziehen sie sich sehr in die Länge und ich habe das Gefühl des „an Ort Tretens". Dies vor allem, wenn man versucht, eine Lösung zu finden, sie nicht (auch nach langem Überlegen) findet und dennoch weiter suchen muss.**
BBB	**Guter, interessanter, aber vor allem unerwarteter Einstieg.**	**Schön, dass wir lange selbst würfeln konnten!**	**Biographie von Pascal etwas zu umfassend, nicht sehr wichtig.**	**Gute Darstellung mit „Bäumen".**			**Der 3. Akt; die Auswertung der Antwortbriefe von Pascal.**
CCC	**Sehr gut, weil Praxis bezogen. Z.B. die „Knochenwürfel" aus früherer Zeit, oder Nachahmung aus Neuseeland.**	**Wieder Praxis bezogen (Geschichte de Mérés), deshalb gut. Hier wäre es aus meiner Sicht nicht unbedingt nötig gewesen, selber den Brief zu schreiben. (Dafür mehr Zeit für Antwortbrief)**	**Zu wenig Zeit für Antwortbrief. Sehr lange – zu lange wurde gefragt, warum multipliziert wird. Niemand konnte richtig logisch antworten → gibt eher ein Durcheinander → Deshalb schneller zur graphischen Darstellung übergehen.**	**Sehr gute Darstellung, macht das Ganze logisch.**	**Neue Spiele entwickeln ist spannend.**	**Wieder Praxisbezug → gut**	**Lehrstück war gut. Für meine Verhältnisse wurde zu Beginn der Lektionen zu viel wiederholt.**
DDD	**Guter Einstieg → nicht unmittelbarer Einstieg in die Mathematik, dies aber nur kurz, sonst wird der Einstieg langweilig.**	**Geschichtlicher Hintergrund nicht zu lang. Würfeln: 1. Spiel = guter Einstieg ins Ausprobieren. Das Gefühl für die Wahrscheinlichkeit wird angeregt. Hier würde ich zur Hilfe immer die eigene Sprache betrachten (Berndeutsch): D Chance isch viu chliner wenn …**	**Laufend sollten Denkanstösse gegeben werden, denn für gewöhnlich Sterbende ist das Erkennen des Problems und die Formulierung ohne Hilfe schwierig (Vorstellungskraft).**	**Sehr gut für Vorstellung**	**Die Rechnung mit der bildlichen Vorstellung und den Bäumen müssen nacheinander einzeln und danach gut kombiniert dargestellt werden.**	**Gut für das grundlegende Verständnis der Wahrscheinlichkeit.**	**Die bildliche Vorstellung (Vorstellungsvermögen) ist sehr wichtig → Kombination mit Rechnung gut überleiten.**
EEE	**War gut.**	**Es wurde etwas zu viel Zeit für das Schreiben und Besprechen der Briefe aufgewendet!**	**Bemerkung siehe 3. Akt.**	**Gut und übersichtlich. Es ist wichtig, dass wir die Darstellung selber erarbeiten mussten.**	**Antwortbriefe zu schreiben hilft einem, das Ganze noch mal zu überblicken, man kann erkennen, wie weit man das Thema schon begriffen hat.**	**Etwas zu beiläufig wurden die neuen Begriffe eingeführt. Neue Beispiele lassen einem noch einmal eine Übersicht gewinnen und allfällige Fragen klären sich so von selbst.**	**Die zusätzlichen Beispiele ganz am Schluss wären am hilfreichsten. (→ 3. Akt). Zum Teil war der Unterricht etwas langfädig.**
FFF	**Interessant, einmal etwas mehr zu erfahren.**	**Schlecht fand ich, dass man nie wusste, über welches Spiel man gerade sprach → verwirrend.**	**Das Vorlesen der Briefe fand ich nicht sehr sinnvoll, da man sie nachher nicht besprach … Man wusste wiederum nicht, über welches Spiel man gerade sprach.**	**Gut → besser vorstellbar. → Dies hätte man auch schon etwas früher einbringen können, für das bessere Verständnis.**	**Montag: Etwas schwierig, dies alles in einer Gruppe zu machen. Freitag: Repetition war hilfreich. 1. Lektion gut, verständlich.**	**Gut**	**4 Lektionen nacheinander waren etwas lang.**

GGG	Netter Einstieg. Gute Informationen.	Einführung gut. Brief schreiben sehr gut, da man Gedanken formulieren muss.		Sehr gut für Verständnis. Pfadregel hätte man vielleicht schon vorher erwähnen sollen (2. Spiel von de Méré)	Zu viel Wiederholung, Aufmerksamkeit liess nach. Entwicklung neues Spiel: Idee sehr gut, leider nur ein neues Spiel entwickelt.	Bezug zu Alltag gut. Man hätte einige praktische Beispiele geben können.	+ Man musste überlegen und nicht nur rechnen. Es wurden Sprache (Briefe) und Denken gefördert. Historische Exkurse. - Manchmal ein bisschen langatmig (zu viel Wiederholungen). Vorschlag: Man könnte ein Skript verteilen mit Beispielen, Erklärungen, Theorie, historischen Aspekten und Aufgaben.
HHH	Guter Einstieg! Kann Interesse wecken!	Das Spiel war eine gute Abwechslung und bereitete grossen Spass. Ausserdem liess sich dabei das Problemfeld erkennen an einem erfassbaren Beispiel.	Die Lösung des Problems wird gemeinsam erarbeitet und dabei musste sich jeder Schüler einen eigenen Gedankengang entwickeln (→ Anregung zum Mitdenken)	Half mir am besten, den gesamten Stoff zu verarbeiten, da es wie eine Art Zusammenfassung der zusammen erarbeiteten Theorie war.	Gut → Anwendung des Gelernten.	Man erhielt einen Gesamtüberblick über das Thema.	+ Das aufgeforderte Mitdenken. + Das Arbeiten an erfassbaren Beispielen. + Die graphische Darstellung (Baum!)
I I I	Als Einleitung gut!	Zu viele Anekdoten führen zu Langeweile. Im Grossen und Ganzen gut. Das Ganze läuft in lockerer Atmosphäre ab → gut	Gut. Jeder musste sich selber etwas überlegen. In der 4. Lektion wurde es ein wenig „langfädig", wahrscheinlich, weil wir schon mehr als 3 Lektionen über das Gleiche sprachen → Vielleicht besser mehrere, dafür kurze Pausen!	Gut, fördert das Verständnis der Spiele.	Gut. Neues Spiel entwickeln zu kurz. Schwierigeres Spiel entwickeln wäre besser gewesen!	Half mit, den Überblick zu bekommen → gut.	Es war gut, die Spiele selber nachzustellen (zu spielen), dies förderte das Verständnis. Beispiel mit „Hochhaus" war gut zur Veranschaulichung. Es wäre besser, das Ganze in 4 2-Lektionen-Blöcken abzuhalten.
KKK	Guter Einstieg. Interesse geweckt.	Sehr Praxis bezogen. Eigene Überlegungen mussten gemacht werden.	Studium der Spiele war sehr schwierig. Die Zeit war sehr großzügig bemessen. Wer nicht vorwärts kam, langweilte sich schnell.	Graphische Darstellung war sehr aufschlussreich.	Gut. Jeder konnte anhand der Aufgaben sehen, wie er den Stoff begriffen hat.	Abschluss war o. k.	Sehr praxisbezogen, spielerisch. Z. T. wurden die Gespräche im Plenum mühsam (immer wieder das Gleiche). Denke aber, das war dennoch lehrreich, denn die Gedankengänge werden so eingeschliffen. Verbesserungsvorschläge fallen mir spontan keine ein.
LLL	Hat das Interesse und die Aufmerksamkeit geweckt.	Es war gut, dass man die Spiele selber ausprobieren konnte. Leider wurde zu viel Zeit aufgewendet, um mögliche Erklärungen zu finden.	Das ist eine gute Idee, weil sich die Schüler dadurch mehr Gedanken über das Spiel machen. Jedoch sind nicht alle gleich schnell, was für einige etwas langweilig sein könnte.	Sehr aufschlussreich. Jedoch wurde auch hier zu viel Zeit verwendet.	Gut, weil die Schüler gleich schauen können, ob sie das Vorgehen begriffen haben oder nicht.	War ganz okay.	Da ich das Ganze schon einmal gemacht habe, war es etwas langweilig. Aber im Grossen und Ganzen war es sehr gut aufgebaut und auch verständlich.
MMM	Gut als Einstieg und Einstimmung.	Brief fand ich gut, man muss das Problem formulieren, d. h. man versteht die Fragestellung. Das Spielen sorgt für eine lockere Atmosphäre.	Zuerst selbst am Problem rumhirnen ist gut, nicht alles vorgelöst bekommen. Verfassen der Briefe nach wie vor schlau, Gründe siehe 1. Akt.	Finde ich gut, dass mit verschiedenen „Aufnahme-Kanälen", hier „optische Erläuterung" gearbeitet wird → etwas, das mir bleibt ...	Das Entwickeln der neuen Spiele zeigt allfällige Probleme auf → gut.	Gibt guten Überblick über Gemachtes.	+ Spielerisches „Erlernen" + Anschauliche Bilder, dank der Würfelspiele usw.
NNN	Abwechslungsreiche Einführung, nicht nur Theorie, sondern auch Praxis.	+ Interessant, historischer Hintergrund. Detaillierte Infos zu de Méré und Pascal.	+ Gruppenarbeit - zu lange Diskussion am Schluss (war etwas mühsam) - manchmal war nicht klar definiert, ob wir vom 1. oder vom 2. Spiel sprechen.	+ fand ich wichtig für bildliche Vorstellung. - etwas chaotisch, man wusste nicht genau, um welches Beispiel es ging.	+ Repetition: Notizen auf der Tafel (es war klar verständlich) - Etwas mehr Zeit für die Aufgaben am Montag (mind. ein zusätzliches Beispiel zusammen lösen)		4 Lektionen waren zu viel → man konnte sich nicht mehr konzentrieren.
OOO	Interessanter Einstieg mit den antiken Würfeln.	+ Eigene Spielversuche in der Gruppe, Vergleich Praxis-Theorie. - Brief zu schreiben – überflüssig.	+ Interessant war die Vorstellung von Blaise, Gruppenspiele, Vergleich Praxis-Theorie, Analyse im Plenum – anhand der eigenen Erarbeitung in der Gruppe → bewusste Auffassung. - Brief zu schreiben – überflüssig.	Überflüssig.			Das Lehrstück hat mir gefallen. Lehrreich fand ich die Erarbeitung im Plenum – teils war es vielleicht etwas zu lange in die Länge gezogen (d. h. man kam zu lange nicht auf den Punkt.) Ich denke, dass der Lernstoff besser bleibt, wenn man ihn langsam und auch gemeinsam erarbeitet. Als Kritik sehe ich nur die Briefe, welche von mir aus gesehen nicht nötig waren, besser hätte ich eine Zusammenfassung im Plenum gefunden.
PPP	Interessant, erweitert Allgemeinwissen.	Gut gemacht. Immer alle Briefe vorlesen aber langweilig, da ja immer etwa das gleiche steht und alle das Problem schon begriffen haben. Musik zum Spiel war gut.	Jetzt kommt der „anspruchsvollere" Teil. Ev. verwirrlich, wenn nicht klar gesagt wird, was die Darstellung am Boden beweisen soll.	Die graphische Darstellung an Tafel ist <u>zu</u> gründlich erklärt worden. Da hätte es schneller vorangehen können.	Neue Spiele, die originell sind, zu finden, ist schwer.		Jetzt erst bin ich soweit, mich der Kombinatorik zu widmen. Fragen wie in der Rudolf-Steiner-Schule.

Die Tabelle ist so aufgebaut, dass zu jedem Akt die Möglichkeit, bzw. die Aufforderung besteht, Bemerkungen und Anregungen einzubringen. Diese Akteinteilung und die Veranschaulichung des Prozesses an der Tafel sollen der Erinnerung helfen. So ergibt sich zu jedem der Akte ein beträchtliches, aber nicht eingeengtes Meinungsspektrum. Am Schluss besteht die Möglichkeit für generelles Feedback oder sonstige Meinungen, die bisher nicht untergebracht werden konnten. Dort finden wir aber auch Wiederholungen, wohl als Verstärkungen gedacht und Ansichten, die nicht direkt zum Lehrstück gehören. Da sehr viele Schülerinnen und Schüler das Blatt ohne Namen abgaben, habe ich alle Beiträge anonymisiert.

Ouvertüre: Der Einstieg wird als abwechslungsreich und interessant durchwegs geschätzt. Evtl. könnte man die sprachlichen Aspekte der Wahrscheinlichkeit im Alltag bereits hier einfliessen lassen, wie AAA anregt.

I. Akt: Als positiv bewertet wird das Spielen. DDD: „Das Gefühl für die Wahrscheinlichkeit wird angeregt.“ Das ungewohnte Briefe Schreiben wird ganz unterschiedlich beurteilt. Wer sich auf die Briefe einlässt, erlebt das Schreiben als hilfreich wie GGG, „da man Gedanken formulieren muss.“ Für das Verfassen der Briefe wurden zweimal etwa zehn Minuten eingesetzt, die Veröffentlichung durch Vorlesen dauerte weniger lang. Einige der Briefe beinhalten besondere Aspekte des Problems und diese sollten nach dem Lesen des entsprechenden Briefes kurz hervorgehoben werden. Dann wird auch der Sinn des Vorlesens klarer. Der Repetent (LLL) in der Klasse findet bereits zum I. Akt, in dem wir noch kaum um Erklärungen gerungen haben: „Leider wurde zu viel Zeit aufgewendet, um mögliche Erklärungen zu finden.“ Er möchte wohl fertige Lösungen und Erklärungen, was ihm aber nicht helfen wird, eigene Probleme zu lösen.

II. Akt: Die Biographie von Pascal, gekürzt gegenüber dem letzten Jahr, wird nur noch von BBB kritisiert. Natürlich ist es „etwas mühsam, wenn Resultate nicht mit Theorie übereinstimmen.“, wie AAA betont, allerdings gehört dies zum Wesen des Zufalls und kann bei diesen Spielen mit dem geringen Chancenunterschied schwer ausgeschlossen werden. Am besten kann die Simulation auf einem Computer hier Abhilfe schaffen.

Heikel und ungewohnt ist sicher die längere Plenumsrunde, in der wir um das Verstehen der Spiele ringen. Die Unsicherheit, das Hin und Her der Gedanken und Meinungen sowie das entstehende „Durcheinander“ sind nicht für alle erträglich. Entsprechend wurde es dann als mühsam oder „langfädig“ empfunden. Der Ruf nach „Denkanstössen“ (DDD) wird laut. Das Auslegen der roten und weissen Würfel, so denke ich, ist allerdings ein starker Denkanstoss. Dass nicht immer klar war, „über welches Spiel man gerade sprach“ (FFF), ist verständlich. Zwar versuchte ich immer wieder auf das erste Spiel zu fokussieren, aber die Gedanken der Schülerinnen und Schüler kreisten mal da, mal dort. Dazu kommt, dass unsere zentrale Auslage der Würfelpaare beim zweiten Spiel entstand, aber auch für das erste Spiel sehr hilfreich ist.

Die graphische Darstellung mit Bäumen und Pfaden betrachte ich als Kernpunkt für das Verstehen dieser Spiele und insbesondere für die Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten. Da diese Darstellungsart nicht bekannt war und auch der Repetent sie nicht einbrachte, wurde eine intensive Erarbeitung notwendig. Eine grosse Mehrheit der Schülerinnen und Schüler haben dabei sehr profitiert. Natürlich hätte ich die Baumdarstellung früher einbringen können, aber vorerst ging es ja darum, dass die Klasse aus eigenen Mitteln analysiert, ihren eigenen Verständnisweg sucht.

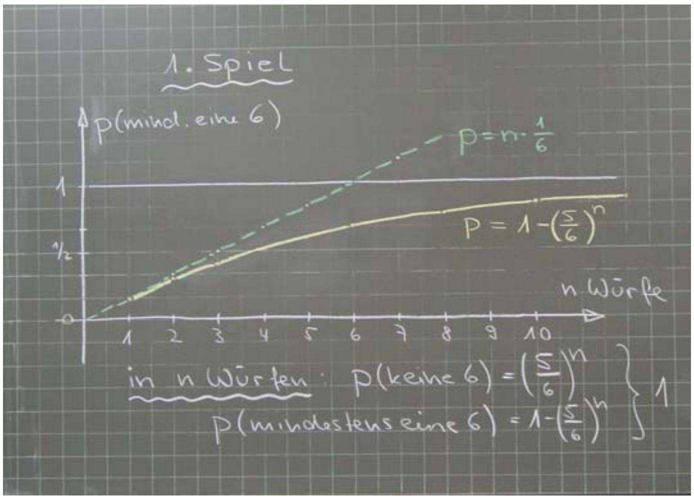
III. Akt: De Méré und die Antwortbriefe. Das Studieren und neu Entwickeln von weiteren Spielen wird positiv bewertet. Aber warum wurden nicht mehr eigene Spiele entwickelt? War es zu schwer? Darauf möchte ich im Feedbackgespräch eine Antwort erhalten. Am Freitagmorgen hielten wir in der ersten Lektion die Spiele von de Méré und von Pascal samt einem Minimum von Theorie fest: Was für den einen eine nützliche Repetition und Konzentration war, empfand die andere als überflüssig.

Das Lehrstück im Überblick: Das Lehrstück wird zurückhaltend positiv beurteilt. Man wird aufgefordert, mitzudenken, Sprache und Denken werden gefördert. Das Arbeiten an fassbaren Beispielen erlaubt spielerisches Erlernen (MMM). Graphische Darstellung (Baum, Hochhaus) und anschauliche Bilder werden lobend erwähnt. LLL, der das Lehrstück schon letztes Jahr erlebte, findet:„im Grossen und Ganzen war es sehr gut aufgebaut und auch verständlich.“ Der lange Suchprozess war für viele ungewohnt lang, wurde als zu lang und z. T. als mühsam empfunden. KKK weiter: „Denke aber, das war dennoch lehrreich, denn die Gedankengänge werden so eingeschliffen.“
Von FFF, III und NNN werden die 4 Lektionen als zu lang erlebt, insbesondere da in der vierten Lektion ein konzentrierter Suchprozess angesagt war. Der konstruktive Vorschlag von vier Doppelstunden ist ohne weiteres durchführbar. GGG äussert den Wunsch nach Skript mit Beispielen, Theorie, Erklärungen, historischen Aspekten, Aufgaben. Davon wird in der Fortsetzung des Themas sicher noch einiges folgen.

Betrachten wir noch zwei Schülerinnen oder Schüler
CCC findet Gefallen am auf die Praxis bezogenen Einstieg mit dem Bezug zur Geschichte. Auch die geschichtliche Einordnung von de Méré findet er gut. Der Brief an Pascal sei überflüssig. Besser hätte man sich länger auf den Antwortbrief konzentriert. Beim Ringen um die Multiplikation hätte CCC in der vierten und letzten Stunde mehr Hilfe gewünscht durch die graphische Darstellung. Diese wird als logisch und das Ganze klärend empfunden. Neue Spiele entwickeln sei spannend. (Hat wohl CCC ein eigenes Spiel entwickelt?) Und nochmals wird der Praxisbezug lobend erwähnt. Insgesamt findet CCC das Lehrstück gut. Es entsteht der Eindruck, dass er gut mitmachte. Die Repetitionen zu Beginn der Lektionen hätten kürzer sein dürfen, was den Eindruck unterstützt, dass CCC insgesamt ohne grosse Probleme folgen konnte.

AAA ist Lehrstücken gegenüber eher kritisch eingestellt. Die Einleitung sei gut, aber zu sehr ausschweifend bei den Knöchelchen. Dafür hätte an dieser Stelle bereits die Alltagssprache einbezogen werden können. Das Ausformulieren wird nicht als hilfreich, sondern nur als zeitraubend erlebt. Der praktische Teil mit dem Würfeln wird zur Veranschaulichung (nicht unbedingt als Erfahrung) begrüsst, wenn da nicht die der Theorie widersprechenden Resultate wären. Die Erprobung des Gelernten an neuen Spielen und die Zusammenfassung gegen den Schluss finden Anklang. Die Hauptkritik betrifft offenbar schon früher erlebte längere Phasen des Ringens um eine Erkenntnis, in denen das Gefühl des „an Ort Tretens“ aufkommen kann. Diese werden offenbar als mühsam und wenig lehrreich betrachtet.

Am folgenden Montag erhalte ich von meinem Kollegen kurz Zeit, um der Klasse ein paar Rückmeldungen aus dem Feedback zu geben. Vorerst bedanke ich mich für die nützlichen Mitteilungen. „Grundsätzlich ist es so, dass wir natürlich nicht mit *einer* Unterrichtsmethode, mit *einem* Vorgehen, immer alle Schülerinnen und Schüler begeistern können. Damit muss jede Lehrkraft leben können. Wichtig für mich ist deshalb auch, dass wir variieren, verschiedene Methoden zum Zuge kommen lassen, und eine davon ist die Lehrkunst.“ Ich zeige vorne meine auf Format A3 vergrösserte Feedbacktabelle. Sie ist gut erkennbar, aber auf Distanz nicht lesbar. Dann erläutere ich ihre Vorzüge: „In der Vertikalen finden wir alle Meinungen zu den einzelnen Unterrichtsabschnitten, horizontal die Ansichten einer Person durch das ganze Lehrstück hindurch. Die Ouvertüre (ich zeige auf die erste Kolonne) hat durchwegs Gefallen gefunden. Auf eine der Anregungen überlege ich mir allerdings, ob ich die Begriffe aus der Alltagssprache, die wir am Schluss zusammengestellt haben, bereits hier hervorheben werde, obwohl uns am Anfang die Skala von 0 bis 1 fehlt. Das Spielen im ersten Akt werde ich beibehalten. Natürlich ist es „mühsam, wenn Resultate nicht mit (der) Theorie übereinstimmen“, aber vermeiden lässt sich dies nicht. Das Briefe Schreiben wird sehr unterschiedlich beurteilt, von überflüssig bis gut. Nach wie vor bin ich überzeugt, dass das Formulieren hilfreich ist, um das Problem wirklich zu verstehen oder zu erklären. Die Briefe müssen im Prozess des Geschehens bleiben und sichtbar aufgehängt werden. Allerdings, statt sie vorzulesen, könnten sie auch schriftlich an die Gruppen abgegeben werden. Der intensive Suchprozess in der vierten Lektion mit den Verunsicherungen, ja zuweilen Ratlosigkeiten, bereitete einigen von euch Mühe. Es erfordert viel Konzentration, welche gegen Ende des Morgens nicht mehr bei allen vorhanden ist. Wie vorgeschlagen wurde, werde ich das nächste Mal ausprobieren, was sich ändert, wenn wir in stärker getrennten Zwei-Lektionen-Blöcken arbeiten. Im III. Akt wurde das Entwickeln von neuen Spielen sehr positiv beurteilt. Da habe ich mich gefragt, warum nicht mehr eigene Spiele entwickelt wurden. Für mich ist dies ein Widerspruch. Können Sie mir dies erklären?“ Ich schaue in die Runde, warte eine Weile. Keine Antwort. „Was soll ich daraus für Schlüsse ziehen? War es zu schwierig, wie jemand schreibt?“ Wiederum keine Antwort. Da ich die Schüler nicht so gut kenne, lasse ich es dabei. Meine Ausführungen scheinen momentan ohnehin nicht sonderlich zu interessieren. „Und wie haben Sie diesen Text von Rényi aufgenommen; war das eine gute Ergänzung?“ Manuel meldet sich spontan und meint: „Dies war interessant und führte uns zurück zu Pascal und an den Anfang.“ Einige pflichten ihm bei.



„Beim Durchdenken ist mir zuhause eine Darstellung eingefallen, die ich in Zukunft unbedingt einflechten möchte.“ An der Tafel habe ich bereits das Koordinatensystem vorbereitet. „Wir haben festgestellt, dass beim wiederholten Werfen eines Würfels das proportionale Denken versagt. Beim mehrmaligen Werfen müssen wir bereits die Fragestellung präzisieren: Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, z. B. in vier Würfen mindestens eine 6 zu werfen und die ist eben nicht $4 \cdot 1/6$.“ In der Graphik zeichne ich grün punktiert die lineare Funktion ein, die uns sehr rasch über die 1 hinausführt. „Wie sieht der Graph aus für die Wahrscheinlichkeit, in n Würfen mindestens eine 6 zu werfen? Christian K zeichnet den Verlauf mit der rechten Hand in die Luft. Ich übernehme dies in die Tafeldarstellung. Von Reto kommt nach einigem Nachdenken und referieren mit seinen Nachbarn Manuel und Christian S die Lösung: $1 – (5/6)^n$. Anna versteht das nicht und fragt bei Reto nach. Über die Wahrscheinlichkeit von $(5/6)^n$, keine 6 zu werfen, und die Tatsache, dass beide Wahrscheinlichkeiten zusammen 1 ergeben müssen, da immer eines der beiden Ereignisse (keine 6 zu werfen oder mindestens eine 6 zu werfen) eintritt, klärt sich die Funktion. Dies ist die Exponentialfunktion $(5/6)^n$ gespiegelt an der x-Achse und um eins nach oben verschoben. Die Darstellung findet Zustimmung und wird notiert. Ergänzende Fragen oder Bemerkungen sind auf Schülerseite keine vorhanden.

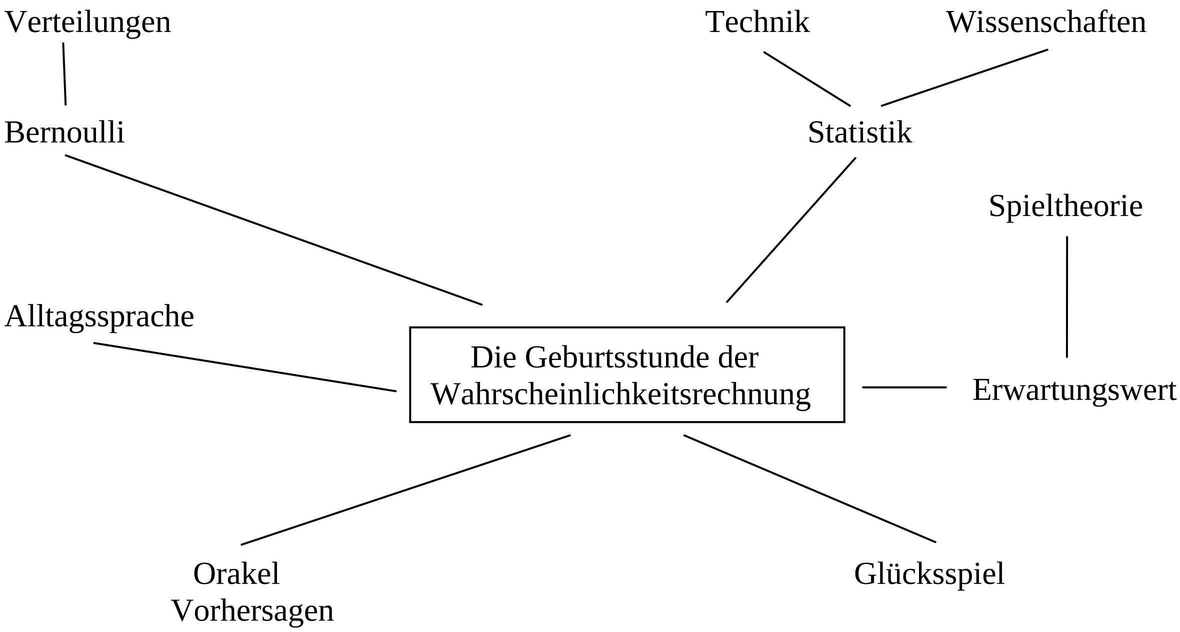
Ich hoffe sehr, dass wahrgenommen wird, wie ich einige der Rückmeldungen überdacht habe und diese allenfalls in der Optimierung Eingang finden. Froh bin ich, dass wir in diesen gut 15 Minuten mit der Graphik auch inhaltlich noch etwas Wichtiges ergänzt haben. Meinem Kollegen überlasse ich die Bühne für die Fortsetzung. Dabei wird klar, dass das wesentliche Schülerinteresse der Klärung der Hausaufgaben und der unmittelbar bevorstehenden Mathematikprobe gilt. Erfahrungsgemäss interessieren Rückmeldungen auf derartige Feedbackbogen nicht sonderlich. Ich werde mich in Zukunft noch kürzer fassen und stärker auf ein paar wenige wesentliche Punkte beschränken.

5.6 Didaktische Interpretation: Methodentrias

Exemplarisch

Wie selten bei einer Thematik kennen wir bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung den Moment der Geburtsstunde. Anhand der beiden einfach fassbaren Spiele des Chevalier de Méré lassen sich die fundamentalen Gesetze des Zufalls erschliessen. Wir tauchen ein in die Welt der Salons des 17. Jahrhunderts, in die Zeit der beginnenden rationalen Erfassung des Kosmos. Das überraschende Phänomen steht mit den beiden Spielen des de Méré im Zentrum. Das proportionale Denken versagt, wir verstehen die Welt nicht mehr. „Es muss eine Gesetzmässigkeit geben, die wir noch nicht begriffen haben.“ Der Wunsch treibt uns an, unser untaugliches intuitives Verständnis zu überwinden, diese Spiele wirklich zu verstehen und womöglich sogar das Schicksal bestimmen zu können. Diese beiden einfachen, ja klassischen Beispiele für mehrstufige Zufallsversuche sind nicht trivial, aber von drei Seiten her gut erschliessbar: Wir legen die 36 möglichen Würfelpaare aus, zeichnen illustrative Bäume, welche uns die Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten begründen, und erstellen eine Graphik im Koordinatensystem zur Verdeutlichung des Unterschieds zwischen dem additiven und dem multiplikativen Ansatz. So findet ein Paradigmenwechsel statt vom intuitiven Erfassen der Situation zur rationalen Durchdringung des Problems. Mit der gewonnenen Einsicht stehen wir auf einer neuen Hochebene. Hier kann jetzt die „Mathematik des Zufalls“ Fuss fassen, sich weiter entwickeln und sich in alle Richtungen ausdehnen. Die Baumdarstellung ist dazu als starkes Instrument dienlich und hilft, die gewonnenen Erkenntnisse auf andere Spiele und in andere Lebensbereiche zu übertragen. Und schliesslich staunen wir, dass überhaupt eine „Mathematik des Zufalls“, eine rationale Erfassung des Unvorhersagbaren möglich ist. Bertrand Russel formulierte es einmal provokativ: „Wie können wir nur von den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit sprechen? Ist Wahrscheinlichkeit nicht die Antithese zu jeglichem Gesetz?“

Die thematische Landkarte zeigt einige der Bezüge auf:



Genetisch

Das Spielen mit Würfeln und die Hoffnung, daraus etwas über die Zukunft ablesen zu können, sind fast so alt wie die Menschheit. Aber erst im 17. Jahrhundert ist die Zeit reif, diese Spiele zu analysieren und sie der Erkenntnis zuzuführen. Anhand der klassischen Spielprobleme des Chevalier de Méré erleben wir authentisch die Problemstellung und ringen mit Pascal um deren Lösung. Leider sind die Briefe von Pascal, in denen er um die Mathematik des Zufalls ringt, nicht erhalten. Dafür erleben wir selbst, wie unser proportionales Denken, dem auch de Méré unterlag, in die Irre führt. Im intensiven Prozess entwickeln wir neue Darstellungsmethoden und Denkweisen, vollziehen heute denselben Paradigmenwechsel wie de Méré damals und erklimmen dabei den Weg auf eine neue Hochebene der Erkenntnis, die Pascal als erster errungen hat. Selten ist es möglich wie an diesem Beispiel, die Geburtsstunde eines Wissenschaftszweiges so konzentriert und klar nachzuvollziehen.

Dramaturgisch

In diesem kurzen Lehrstück von etwa 8 Lektionen geht es ausschliesslich um das Würfelspiel. Insbesondere die beiden Spiele des de Méré sind permanenter Bezugspunkt des Lehrstücks. Als Akteure lernen wir den Chevalier de Méré und Blaise Pascal kennen. Bei de Méré entzündet sich das Problem, mit ihm erleben wir das erste Spiel und seine Variation, welche zur Krise des Verstehens führt. Im verzweifelten Brief an Pascal wird das Problem auf den Punkt gebracht. Damit gelangen wir in die rationale Auseinandersetzung mit dem Phänomen. Von verschiedensten Seiten wird aus Sicht von Pascal die Situation analysiert und mehr und mehr entsteht die Kenntnis über den wahren Sachverhalt. Der Antwortbrief soll die Lösung in verdichteter Form festhalten. Zurück bei de Méré entscheidet sich, ob die neue Hochebene wirklich erreicht ist und die entwickelten Kletterkünste taugen, um derartige Spiele zu verstehen und neue zu entwickeln. Im brieflich verknüpften Hin und Her von de Méré zu Pascal und wieder zu de Méré entwickelt sich dynamisch der Fortschritt der Erkenntnis. Und sollte es nicht genügen, ist ein weiteres Hin und Her möglich. Erst ganz am Schluss wird die strenge Einheit aufgebrochen, werden Perspektiven geöffnet: Einerseits die Übertragung in andere Lebensbereiche und andererseits weg von den regelmässigen Würfeln zu den unregelmässigen Astragali, Thema für ein noch zu entwickelndes späteres Lehrstück.

5.7 Das Lehrstück in der Fachschaft

Dieses Lehrstück wurde bislang in der Fachschaft nicht präsentiert. Dafür habe ich es schon zweimal in der Klasse eines Kollegen inszeniert. Anschliessend an die in diesem Kapitel beschriebene zweite „Gastinszenierung“ des Lehrstücks in der Klasse 1A gab mir Herr Rohner auf dem gleichen Fragebogen, den ich den Schülerinnen und Schülern unterbreitet hatte, die folgende ausführliche Rückmeldung:

Ouvertüre: Guter Einstieg ins Thema (motivierend, da alltagsbezogen; interessant, die jahrhundertealte Tradition von Wahrscheinlichkeit und Schicksal zu sehen).

I. Akt: De Mérés Frage: Gut, dass verschiedene Kanäle angesprochen werden. Etwas problematisch, was den Stichprobenumfang betrifft → evtl. überlegen, ob eine anschauliche, verständlich programmierte Computersimulation beigezogen werden könnte. Briefe Schreiben ist gut, da die beobachteten Probleme sauber formuliert werden müssen und die historische Dimension sichtbar wird.

2. Akt: Pascals Antwort – Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Briefbesprechung gut; ev. detailliertere Besprechung der Briefe wünschenswert (was ist gemeinsam, welche Unterschiede gibt es?) Sehr gute Darstellung mit den Doppelwürfen und der Markierung der günstigen Position mit dem Mäppchen. Gute Verallgemeinerung auf grössere Dimensionen. Evtl. hätte das Multiplikationsprinzip der Wahrscheinlichkeiten direkter (bzw. schneller) abgeleitet werden können: m. E. kann es aus der „Haus“-Darstellung ziemlich direkt gesehen werden.

Die graphische Darstellung der Spiele: Sehr gut als Verständnishilfe und „Erlösung“ von den Diskussionen, in denen noch zu wenige schlagende Argumente vorhanden waren. Evtl. hätte der Tipp, die Bäume der einzelnen Schritte untereinander (statt nebeneinander) zu zeichnen, früher abgegeben werden können.

III. Akt: De Méré und die Antwortbriefe: Gut als Vertiefung (Kompetenz, Gelerntes [und hoffentlich Verstandenes] auf neue Situation zu adaptieren. Vorteil für die Schüler, dass sie sehen, ob sie das Prinzip der Bäume und der günstigen und möglichen Fälle begriffen haben oder ob sie noch einmal über die Bücher gehen müssen. Schade, dass nur ein Teil der Schüler aktiv die von Pascal vorgeschlagenen und selber entwickelte Spiele untersucht hat. Am Freitag: gute Repetition → Das Prinzip der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten und der Begriff der Wahrscheinlichkeit wird klar. Schade, dass nur wenige neue Spiele von Schülerseite da waren.

Finale mit Rückblick und Ausblick: Guter Bogen zum Einstieg → eignet sich gut, eine „Zwischenbilanz“ zu ziehen. Aus dem Text wird deutlich, was eine Wahrscheinlichkeit überhaupt ist (Grad der Gewissheit). Vermutlich kann diese Idee von den Schülern noch nicht gänzlich „verdaut“ werden, aber es ist sicher gut, dies schon hier einmal zu erwähnen.

Das Lehrstück im Überblick: Insgesamt sehr gut geeigneter Einstieg ins Thema, da sehr viele Aspekte berücksichtigt werden (kombinatorische, logische, argumentative, historische, philosophische). Das Lehrstück legt eine sehr gute Grundlage, um darauf basierend die Grundideen der Wahrscheinlichkeitsrechnung herauszukristallisieren. Der Zeitaufwand ist angemessen (die „klassische“ Einführung der Konzepte und Begriffe würde wohl etwa gleich lange dauern). Zu überlegen wäre der Einsatz von Computerprogrammen zur Simulation von Spielen als empirischer Zugang. Möglicherweise könnten in einer ersten Phase intuitive Argumente der Schüler (z. B. Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten) zunächst ohne grosse Begründung akzeptiert und später darauf zurückgekommen werden.

Kommentar: Diese ausführliche Rückmeldung zeigt, dass Herr Rohner vom Lehrstück und vom Unterrichtsexperiment begeistert ist. Bemerkenswert ist seine Ansicht, dass es nicht mehr Zeit braucht als eine konventionelle Einführung in das Thema. Wie sich der Einsatz einer, m. E. möglichst diskret zu haltenden Computersimulation auswirken wird, muss allenfalls in nächsten Inszenierungen herausgefunden werden. Die Briefe an Pascal lohnt es zu vergleichen, wenn man die formalen sprachlichen Unterschiede genauer betrachten will. Der mathematische Gehalt ist hier zweitrangig. Mit der Baumdarstellung werde ich nächstes Mal zügiger vorgehen, wenn sie nicht von Schülerseite eingebracht wird. Ich werde sie vielleicht ohne Kommentar an die Tafel zeichnen und hören, was die Schülerinnen und Schüler damit anfangen können. Offen bleibt, wie die Jugendlichen zu mehr Variationen der Spiele motiviert werden können. Insgesamt war es ein gelungenes Unterrichtsexperiment. Ich bin neugierig, in welcher Form Herr Rohner künftig seinen Unterricht zur Wahrscheinlichkeitsrechnung beginnen wird.

Nachdem ich das Lehrstück Ende November 2002 zusammen mit Herrn Stalder ähnlich wie oben beschrieben unterrichtet hatte, führte er das Lehrstück im Dezember 2002 mit seiner Parallelklasse selbständig durch. Auch diesen Dezember nahm er das Stück wieder auf. Zu dieser neusten Erfahrung folgt ein Bericht:

Lektionen 1/2

Das Zimmer ist mit vier Tischen und einem Stuhlkreis in der Mitte als Spielsalon eingerichtet. Historische Illustrationen hängen zeitlich geordnet an der Wand. Die Würfelvielfalt ist auf dem Boden ausgebreitet. Herr Stalder gibt eine kurze Darstellung der Geschichte der Würfel (Astragali, Orakel, Problem von de Méré, heutige Spielwürfel). Dann erfüllt Musik von Lully den Raum. Herr Stalder, leicht verkleidet als de Méré, führt ein ins 17. Jahrhundert, in die Zeit von Louis XIV. De Méré stellt das erste Spiel vor und zeigt wie es gespielt wird, damit allen die Regeln bekannt sind. Es werden die Rollen der de Mérés, der Protokollführenden und Spielenden verteilt und das erste Spiel kann an den verschiedenen Tischen beginnen. Schon bald entsteht das Bedürfnis nach spannenderen Spielen und es folgen Vorschläge. Diese werden vorerst nur gesammelt. Nach rund 20 Minuten werden die Resultate an der Tafel in einer Tabelle zusammengestellt, die Spaltensummen gebildet und Gewinnverhältnisse für die Beteiligten bestimmt. Ein Schüler stellt fest: Es gibt grosse Unterschiede zwischen den einzelnen „Tischen“. Ein anderer Schüler bringt die Idee, alle Ergebnisse zusammenzufassen. Die Resultate entsprechen den Erfahrungen von de Méré. Es zeigt sich ein geringer Gewinnvorteil für ihn.

Spielprotokoll für das erste Spiel:

Gesamtzahl der Spiele	Gewinn de Méré	Gewinn Mitspieler
35	18	17
27	20	7
17	6	11
30	14	6
109	58	51
	58/109	51/ 109

Dann werden Spielregeln für Doppelwürfe gesucht und die Überlegungen von de Méré mit den 24 Würfen erläutert. Auch dieses zweite Spiel wird etwa 20 Minuten lang gespielt, die Resultate wieder in einer Tabelle zusammengestellt.

Spielprotokoll für das zweite Spiel:

Gesamtzahl der Spiele	Gewinn de Méré	Gewinn Mitspieler
15	7	8
39	18	21
28	14	14
19	8	11
101	47	54
	47/101	54/101

Wiederum folgt eine kurze Diskussion der Daten. Im Vergleich zum ersten Spiel lassen sich Schlussfolgerungen ziehen. Ein Schüler kritisiert allerdings, dass die Stichproben nicht zuverlässig seien, da viel zu klein. Die Resultate seien daher eher zufällig. Es zeichnet sich das gleiche Resultat ab wie bei de Méré: Er verliert! Als Hausaufgabe werden die Bittbriefe von de Méré an Pascal verfasst.

Lektionen 3/4

Für die zweite Doppelstunde ist das Unterrichtszimmer wiederum als Spielsalon hergerichtet. Die Briefe werden von ihren Verfassern vorgelesen. Da von 36 Möglichkeiten die Rede ist, werden die Würfel ausgelegt. Eine Erklärung für die Resultate ergibt sich nicht. Herr Stalder stellt Blaise Pascal, den Adressaten der Briefe, vor. Darauf sollen die Schüler in Gruppen diskutieren, was sich wohl Pascal überlegt hat. Die Meinungen werden später gesammelt, ausgetauscht und diskutiert, ohne dass schliesslich eine klare Lösung vorliegt. Zum Schluss der Stunde verteilt Herr Stalder einen von Pascal kommenden Antwortbrief, der viele der geäusserten Meinungen beinhaltet. Er entspricht etwa dem Brief von S…, aber ohne die weiteren Spielvorschläge. Die Hausaufgabe besteht darin, den Inhalt des Briefes zu verstehen, ihn mit den Argumenten der Stunde zu vergleichen und eine graphische Darstellung zu finden.

Lektionen 5/6

Der ausgeteilte Brief wird diskutiert. Da keine brauchbare graphische Darstellung gebracht wird, stellt Herr Stalder die Baumdarstellung vor. Die Interpretation des Spiels mit dem Baum ist bald klar. De Méré schickt jetzt einen zweiten Brief an Pascal mit der Bitte um ein paar weitere Spielvorschläge. Die Schüler und Schülerinnen werden aufgefordert, innert zweier Tage zuhause die Antwortbriefe von Pascal an de Méré zu verfassen und abzugeben. Herr Stalder kopiert diese Briefe und verteilt sie wieder. Jeder Schüler erhält drei Briefe zum Studium auf die nächste Doppelstunde.

Lektionen 7/8

Die verschiedenen Briefe mit den neuen Spielvorschlägen werden analysiert. Es müssen dabei exponentielle Ungleichungen und kombinatorische Fragen geklärt werden. Zudem bringt Herr Stalder die in der ersten Doppelstunde geäusserten Spielvorschläge der Schülerinnen zur Bearbeitung ein. So werden alle hängigen Fragen geklärt und das Ziel, eigene Glücksspiele zu entwerfen und zu analysieren, ist schliesslich erreicht. Ein Ausblick auf Versuche mit unregelmässigen Würfeln und auf das Axiomensystem von Kolmogorow rundet das Lehrstück ab.

Kommentar: Das Lehrstück hält sich stark an die anderen Durchführungen. Die Grundstruktur bestätigt sich und bewährt sich im Doppelstundentakt. Die graphische Darstellung muss offenbar meistens von der Lehrkraft eingebracht werden, selbst wenn sie in der Kombinatorik vor mehr als einem Jahr bereits verwendet wurde. Dadurch, dass die Antwortbriefe auf die

Spiele von de Méré nicht geschrieben werden, weicht Herr Stalder von der stärker am historischen Hintergrund orientierten bisherigen Fassung ab. Dafür führt er einen zusätzlichen Briefwechsel ein, der neue Spielvorschläge beinhaltet. Der bisherige Verlauf gefällt mir bezüglich Inhalt und Dramaturgie besser, denn der zentrale Prozess ist das Verstehen der Spiele von de Méré. Dieses Verständnis klar und für de Méré nachvollziehbar in einem Brief auszudrücken ist die grosse Herausforderung. Der Transfer eines Lehrstücks von Kollege zu Kollege ist aber gut gelungen. In diesem Ausmass bleibt er vorläufig ein Einzelfall.

Da Herr Stalder dieses Lehrstück einmal mit mir zusammen und inzwischen bereits zweimal alleine durchgeführt hat, fragte ich ihn kürzlich, was ihn an diesem Lehrstück fasziniere. Es sind die Spielsituationen, die Einbettung der Thematik in den kulturellen Horizont samt dem breiten Bildmaterial. Dies führe zu einem ganzheitlicheren Erleben. Er hat erfahren, dass er im Anschluss an das Lehrstück immer wieder auf das Behandelte zurückgreifen kann. Zudem schätzt er sehr, dass das ganze Material in einem Koffer und einer Mappe bereit steht. Er meint, ohne die erste gemeinsame Veranstaltung würde er dieses Lehrstück allerdings heute nicht selbständig unterrichten.

Rolf Schudel, Vorreiter des Lehrstücks zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, traf ich Mitte Dezember im Seminar Zürich-Unterstrass, wo er seit Jahren Mathematik unterrichtet. Er äusserte grosse Sympathie für kürzere, bündigere Lehrstücke. Seine Fassung der Wahrscheinlichkeit empfindet er als zu lang für den Schulalltag. Es sei schwierig, den Spannungsbogen vom Anfang bis zum Schluss durchzuhalten. Für eine Studienwoche möge es sich durchaus eignen. Nach meiner Ansicht hatte er, wie ich beim Entwerfen des Lehrstücks zum Pythagoras oder zur Stereometrie, am Anfang die ganze Unterrichtseinheit zur Wahrscheinlichkeit im Kopf und dann versucht, alles in ein Lehrstück zu packen. Besser ist es wohl, wenn wir uns auf das Kernproblem konzentrieren und beschränken, wie bei der Wahrscheinlichkeit die Spiele des de Méré. Da lohnt es sich, intensiv zu verweilen und das Zentrale herausschälen, in unserem Beispiel die Nicht-Proportionalität bei mehrstufigen Versuchen und ihre Begründung durch den Baum. Wir waren uns einig, dass ein weiteres kurzes Lehrstück zur statistischen Wahrscheinlichkeit mit Jacob Bernoulli das hier vorliegende Lehrstück ideal ergänzen würde.

5.8 Die Ideengeschichte im Lehrstück

Im Zentrum dieses Lehrstücks steht die Grundidee [10]. Es geht um die Erfahrung, dass man über ungewisse Ausgänge wie das Werfen von Würfeln durchaus mathematische Aussagen machen kann. Zwar wissen wir nicht, was uns der nächste Wurf bringt, aber wir können über die Chancen, dass wir eine Sechs werfen oder dass morgen schönes Wetter vorherrscht, eine Aussage machen. Diese Chancen oder eben Wahrscheinlichkeiten lassen sich sogar miteinander verknüpfen und damit ergibt sich für wesentlich komplexere Ereignisse ein Mass von Gewissheit. So ist es zwar nicht möglich vorauszusagen, ob ich das nächste Spiel gewinnen werde, aber ich kann ein grosses Mass an Gewissheit gewinnen darüber, ob ich auf die Dauer bei einem Spiel erfolgreich sein werde oder nicht. Immer wieder spielen bei den Überlegungen Annäherungen und Grenzprozesse eine Rolle [9]. Gerungen wird lange Zeit um ein zutreffendes Modell [3] für das Spiel mit mehreren Würfeln. Dies ist der Knackpunkt. Erst nach erfolgreicher Überwindung dieser Klippe gilt, was Freudenthal (1973 Bd. II, S. 528) schreibt: „… man kann die Wahrscheinlichkeitsrechnung fast so direkt wie das elementare Rechnen auf die Wirklichkeit anwenden, d. h. mittels Modellen, die jeder ohne weiteres verstehen kann. ... Um jemandem zu erzählen, was Mathematik ist, und was sie vermag, wählt man seine Beispiele am überzeugendsten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.“ Welches ist die

Wahrscheinlichkeit, dass mit zwei Würfeln eine 5 und eine 6 geworfen wird? Warum werden Wahrscheinlichkeiten bei mehrmaligem Werfen miteinander multipliziert und nicht addiert? Diese Multiplikation lässt sich am Baum hervorragend begründen und führt auf funktionelle Abhängigkeiten [7] exponentieller Art.
Intensives Mathematisieren führt auf eine neue Theorie, ein neues mathematisches Denkgebäude [1], die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Freudenthal (1973 Bd. II, S. 536) formuliert: „Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, recht verstanden, die schönste Gelegenheit, Schüler erfahren zu lassen, wie man mathematisiert – sie ist nicht nur die schönste, sondern vielleicht nach dem elementaren Rechnen, die erste und letzte Gelegenheit, nachdem schlecht begriffene Deduktivität andere Zweige der Mathematik überwuchert hat.“ Bei unseren Überlegungen rund um das Würfeln gehen wir immer wieder von idealen Würfeln [2] aus, obwohl unsere Würfel des Alltags nur annähernd diesem Ideal entsprechen. Auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik werden viele Bereiche des Alltags von Zahlen [4] durchdrungen. Auch im Lehrstück werden Daten erfasst, zusammengestellt und ansatzweise interpretiert. Bei der Wahrscheinlichkeit ist der Vorgang des Messens [5] weniger ersichtlich. Es geht darum, ein Mass für die Gewissheit zu finden, wobei der absoluten Gewissheit die Zahl 1 zugeordnet wird.

Im Überblick fasst die Tabelle die Repräsentanz der zentralen Ideen in diesem Lehrstück zusammen:

Grundidee	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**	**[6]**	**[7]**	**[8]**	**[9]**	**[10]**
Repräsentanz	● ● ●	●	● ● ●	●	●		● ● ●		● ●	● ● ●

III. Zusammenfassung und Erkenntnisse

In diesem dritten Kapitel der Dissertation werde ich die Schülerfeedbacks, die didaktischen Interpretationen, die Reaktionen der Fachkollegen und die Repräsentanz der Ideengeschichte in den Lehrstücken zusammenfassen, um dann abschliessend eine Bilanz bezüglich der Leitfrage zu ziehen und einige Ausblicke zu geben.

1. Meine fünf Lehrstücke der Mathematik (Zehnzeiler)

Um die fünf Lehrstücke nochmals gleichzeitig vor Augen zu führen, sind sie hier in der zwischenzeitlich bewährten Form der Zehnzeiler eingefügt. Für ihre Positionierung im Curriculum der Mathematik mag ein Blick in Tabelle 3, S. 19 dienen.

(1) Quadrate vereinen – Quadrate entzweien (Pythagoras)

Wer hat nicht schon Quadrate zerschnitten und die Teile wieder zusammengesetzt. Wer hätte gedacht, dass diese Tätigkeit zum bekanntesten mathematischen Satz, dem Satz des Pythagoras, führen kann und Grundlage für einen Beweis liefert, der uns garantiert, dass dieser Satz überall und für immer gültige Wahrheit besitzt? Wie die Pythagoräer vor 2500 Jahren sind wir herausgefordert zu den fundamental mathematischen Aktivitäten des Argumentierens, Begründens, Beweisens und wir üben an einer bunten Vielfalt verschiedenartiger Beweise dieses Satzes. Mit dem vor 2300 Jahren verfassten Beweis in Euklids „Elementen" lernen wir das dauerhafteste wissenschaftliche Buch kennen, in dem diese Beweiskultur und der damit verbundene strenge strukturelle Aufbau einer Wissenschaft erstmals in überzeugender Art präsentiert wird. Definitionen, Axiome und Postulate bilden das Fundament, aus dem sich mit logischen Argumenten die ganze Euklidische Geometrie entwickelt hat. Dieser Aufbau diente immer wieder als Modell für andere Gebiete der Mathematik, aber auch für andere Wissenszweige.

(2) Primzahlen – multiplikative Bausteine

Die Primzahlen faszinieren als kleinste, unteilbare Bausteine der Zahlentheorie, die sich jeder Regelmässigkeit zu widersetzen scheinen. Wir kennen sie von den Teilbarkeitsregeln, der Primzahlzerlegung und vom Bruchrechnen. Auf dem Zahlenstrahl fällt ihre Unregelmässigkeit auf. Suchen wir sie in einer Zahlentabelle, so entsteht fast automatisch das „Sieb des Eratosthenes" als Methode zum Finden dieser Primbausteine. Und es zeigt sich, dass deren Dichte mit wachsender Grösse der Zahlen abnimmt. Unweigerlich entstehen die Fragen: „Wie geht es weiter? Gibt es eine grösste Primzahl? Gibt es unendlich viele Primzahlen?" Immer wieder höre ich als Antwort: „Das kann man nicht wissen." – Und doch, schon die Griechen vor 2300 Jahren wussten es! Ob da wohl eine Formel weiterhelfen kann? Eine Lösung scheint in Sicht, wenn wir unsere endlich vielen Primzahlen multiplizieren und 1 addieren, doch Beispiele zeigen, dass diese neue Zahl keine Primzahl sein muss. Die Enttäuschung ist gross. Selbst Variationen des Ansatzes führen zum selben „Scheitern". Erst beim genaueren Hinschauen gelingt der überraschende Durchbruch. Wir sehen ein, dass wir unseren endlich vielen Primzahlen mindestens eine neue hinzufügen können und der Vorgang lässt sich unendlich oft wiederholen! Einfachstes, aber gründliches mathematisches Denken erlaubt eine Aussage über die Unendlichkeit einer Menge! Und wie viele Primzahlzwillinge (5,7 / 11,13 / 17,19) gibt es wohl? Eine einfache Frage, aber die Antwort kennen wir bis heute nicht! Werden wir sie je kennen?

(3) Vom Würfel zur Kugel mit Archimedes

Geometrische Formen und mathematische Formeln – wie stehen sie in Beziehung zueinander? Der Methode von Archimedes folgend, verbinden wir Praxis mit Theorie. Aus Ton geformte Körper werden zueinander in Beziehung gestellt. Im „Eckenland“ herrschen geradlinig begrenzte Körper, in den entstehenden Formeln überwiegen natürliche Zahlen. Für den Übergang vom Geradlinigen zum Runden steigen wir mit Archimedes hinunter ins Zweidimensionale und erleben die geniale Idee der Intervallschachtelung zur Bestimmung von π, der Archimedischen Zahl. Diese begleitet uns beim Aufstieg ins dreidimensionale „Rundland“ zu Zylinder und Kegel. Der Unterschied der mathematischen Kurzform in der Formel gegenüber einer verbalen Beschreibung wird deutlich. Wir staunen über Archimedes’ (bis in die Integralrechnung) wegweisenden Umgang mit dem unendlich Kleinen bei der Bewältigung der Kugel und über die klaren Beziehungen, welche sich zwischen den mit der irrationalen Zahl π versehenen Formeln im Rundland ergeben. So führt das Formelknobeln über einfache räumliche Formen zur einleuchtenden Formelsammlung.

(4) Achilles und die Schildkröte

Die bald zweieinhalb Jahrtausende alte Paradoxie „Achilles und die Schildkröte“ des griechischen Philosophen Zenon führt uns mitten in folgende Problematik hinein: Wann immer Achilles beim Wettlauf mit der Schildkröte seinen vorigen Rückstand wettgemacht hat, ist die Schildkröte ein Stück weiter. Zwar kommt Achilles der Schildkröte immer näher, aber es wird klar, dass Achilles die Schildkröte nie einholen wird. Die Darlegung überzeugt, unsere Erfahrung widerspricht, die Verwirrung ist perfekt. In der Auseinandersetzung mit nicht abbrechenden Prozessen wie im erwähnten Wettlauf, oder beim Leeren einer Tasse durch fortgesetztes Halbieren des Inhalts, begegnen wir einer neuen Denkweise. *Gedanklich* können wir sehr wohl Raum und Zeit in unendlichem Prozess bis ins Feinste unterteilen, aber wenn wir diese unendlich vielen positiven Grössen addieren, so muss die Summe nicht notwendigerweise unendlich gross werden. Das Unendliche wird im Endlichen denk- und greifbar. Langsam gelingt es uns, diese Überlegungen in Einklang mit unseren Erfahrungen des Alltags zu bringen und wir erleben, dass ganz unterschiedliche Betrachtungsweisen eines Vorgangs zu ein und demselben Ergebnis führen können.

(5) Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Pascal

Spielsteine faszinieren seit Urzeiten. Zeigen sie mein Schicksal? Bringen sie mir Glück? Um 1650 geschieht dem Chevalier de Méré bei seinen Glücksspielen Unerwartetes. Nachdem er lange mit Erfolg ein Würfelspiel angeboten hat, ändert er gezielt das Spiel. Wider Erwarten verliert er jetzt aber auf die Dauer. Diese Erfahrung kann er nicht mit seinem proportionalen Denken erklären. „Die Mathematik stimmt nicht mit dem praktischen Leben überein!“, ist sein verzweifelter Hilferuf an Blaise Pascal. An dessen Stelle beschäftigen wir uns nun intensiv mit dem Problem. Es gelingt uns, das in die Irre führende proportionale Denken zu überwinden und wie Pascal die Gesetzmässigkeit der Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten zu entdecken. Wir haben die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachvollzogen.

Lehrstücke im Umfang von 10 bis 15 % in den Unterricht zu integrieren, das ist machbar trotz der Einwände, die immer wieder hörbar werden. Eine Umfrage bei meinen Fachkollegen bezüglich deren Zeiteinteilung musste leider rudimentär bleiben, da bislang keiner von ihnen gemäss dem ab 1997 stufenweise eingeführten neuen Schullehrplan durchgehend eine Klasse unterrichtet hat. Die Auszüge und die direkten mündlichen Äusserungen zeigen aber, dass keine grossen Unterschiede bestehen. Einzig in der Quarta reicht es mir nicht, quadratische Gleichungen zu behandeln. Dies lässt sich in der Tertia problemlos nachholen, da diejenigen Klassen, die erst mit der Tertia bei uns beginnen, einige Wochen für das Eingewöhnen benötigen. Zurzeit unterrichte ich zwei Sekunden, die vier Lehrstücke erlebt haben und bin, gemessen am Lehrplan, ebenso weit wie mein Kollege mit der Parallelklasse. Natürlich spielt meine langjährige Erfahrung eine grosse Rolle. Mein Unterricht verläuft wesentlich gezielter und konzentrierter als früher, was dazu führt, dass ich die zur Verfügung stehenden Lektionen besser nutzen kann.

Von mir gibt es inzwischen die sechs Lehrstücke: „Quadrate vereinen – Quadrate entzweien", „Primzahlen – Bausteine der Multiplikation", „Vom Würfel zur Kugel", „Achilles und die Schildkröte", „Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung" sowie „Irrationalität von Wurzel 2" für den gymnasialen Mathematikunterricht des 9. bis 12. Schuljahres. Daneben gibt es bemerkenswerte mathematische Lehrstücke wie „Platonische Körper, nach Wyss" und „Kreisberechnung nach Archimedes" von Beate E. Nölle, „Tonraumzahlen" von Cornelia Ritter und „Veg Thor" von Simon Friedrich-Raabe. Themen für weitere bedeutende Lehrstücke sind die Tangentenproblematik (Ableitung mit Leibniz und Newton), die Flächenproblematik (Integralrechnung), die statistische Wahrscheinlichkeit (Jakob Bernoulli), die Trigonometrie, die Kegelschnitte, die Fuzzy Logik. Allerdings lässt uns der Lehrplan nicht allzu viel weiteren Spielraum. Deshalb bin ich überzeugt, dass die Zukunft bei eher kürzeren Lehrstücken von 6 bis 10 Lektionen liegt.

2. Feedback der Schülerinnen und Schüler zu den Lehrstücken

Die Feedbacks der Schülerinnen und Schüler dienen der nochmaligen Reflexion des Lehrstücks und des Lernprozesses. Sie sagen uns etwas über die Befindlichkeit der Adressaten der Lehrstücke und geben Hinweise auf Stärken und Schwächen im Hinblick auf die Optimierung der Lehrstücke.

Diese folgende Zusammenfassung der Schülerfeedbacks unterteile ich nach verschiedenen Lehrstückphasen, welche in den meisten Lehrstücken mehr oder weniger ausgeprägt vorhanden sind: Einstiegsphase/Ouvertüre, Problemexposition und -bewältigung, Urheber, Vertiefung und Ausweitung, Übungsphase, Finale, Schlussbemerkungen.
Die Rückmeldungen sind gemäss der bisherigen Lehrstückreihenfolge geordnet:

(1) „Quadrate vereinen und entzweien" (Pythagoras)
(2) Primzahlen – Bausteine der Multiplikation
(3) Vom Würfel zur Kugel mit Archimedes
(4) Achilles und die Schildkröte
(5) Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Pascal

Einstiegsphase/Ouvertüre

(1) Beim Pythagoras steigen wir direkt in die Problemstellung; das Fehlen einer sanften Einführung wird nicht bemängelt.
(2) Bei den Primzahlen erleben wir einen sanften Einstieg. In einer längeren Phase der Auseinandersetzung mit den Primzahlen wird der Boden vorbereitet, aus dem sich die Fragestellung erheben kann. Dies wird geschätzt und weckt Interesse. Die Veranschaulichung mit den durchlöcherten Papierstreifen wird besonders herausgehoben. Das Entwickeln der Primzahltabelle durch Abstreichen wird einerseits als spannend, anderseits als langweilig und mühsam (insbesondere bei grösseren Zahlen) bezeichnet.
(3) Am zwei Lektionen umfassenden Einstieg gefällt besonders das praktische Gestalten. Es wirkt unterhaltend und lehrreich. Die Körpernamen und das Zeichnen der Körperfamilie werden kaum erwähnt.
(4) Die kurze Einführung in die frühere Zeit mit Zenon und Achilles wird als spannender, interessanter und informativer Einstieg geschätzt.
(5) Der historisch orientierte informative Einstieg wird interessiert wahrgenommen. Ebenso die Angaben zu de Méré und seiner Zeit.

Fazit: Der Einstieg in die Lehrstücke wird überwiegend positiv beurteilt. Er scheint Interesse zu wecken und angemessen dosiert zu sein.

Problemexposition und -bewältigung

(1) Mit dem „Quadrate Vereinen“ sind wir sofort mitten im Problem. Das praktische Vorgehen, das Basteln, hilft der Vorstellung. Erwähnt wird der Stolz, dass wir es schliesslich geschafft haben. Kritische Stimmen finden den Prozess zu lang, zu zeitraubend, mühsam. Gewünscht wird mehr Hilfe und damit eine Verkürzung des Prozesses.

(2) Mit der Präsenz der Primzahlen und der tabellarischen Übersicht liegt die zentrale Frage nahe: Gibt es eine letzte Primzahl? Das Ringen um die Antwort ist langwierig, mühsam, für einige schwer durchzuhalten. Mit der Motivation geht es auf und ab. Die einen geben bald auf, andere lassen sich nicht beirren trotz mehrmaligen Scheiterns. Der Durchbruch zur Erkenntnis wirkt umso mehr als Erlösung.

(3) Die Formelsammlung wird als zu früh und zu schwierig eingestuft; ihr Sinn im Gesamtzusammenhang offenbar zu wenig erkannt. Vereinzelt wird sie als Standortbestimmung für den Prozess erkannt. Das Ringen um die Formeln schreitet gemäss der gefundenen Struktur etappenweise voran. Im Eckenland sind die Unterschiede enorm: Was für die einen einfach und bekannt ist, erleben andere als sehr schwierig. Die Annäherung an π, die Sätze von Archimedes und die Verhältnisse im Rundland werden als interessant, aber eher schwierig eingestuft. Die Beziehung zwischen Rundland und Eckenland wird erkannt und mehrfach erwähnt. Der Übergang zum Kugelvolumen ist der anspruchsvollste Teil des Lehrstücks.

(4) Die Geschichte von Zenon schuf die nötige Verwirrung und erfüllte damit das Anfangsziel. Das wortlose Darstellen wird als harte Konfrontation, ja als Überforderung, anderseits aber als sinnvollste Weise, das Problem anzugehen, bezeichnet. Interessant ist zu verfolgen, wie sich die „Lösung“ des Problems langsam abzeichnet, bei den einen schneller, bei den andern langsamer. Dem einen hilft besonders das Gläserexperiment, der andern die graphische Darstellung oder die Zahlentabelle. Der Übergang zur Verallgemeinerung geschieht mit sehr unterschiedlicher Leichtigkeit.

(5) Der Zugang zur Problematik über das Spiel wird positiv beurteilt. Dass das Würfelergebnis nicht unbedingt mit dem Langzeitergebnis übereinstimmt, ist ein heikler Punkt dieses Spiels und wird zu Recht kritisiert. Das Verfassen des Briefes wird kontrovers beurteilt. Bedeutung und Auswertung des ersten Briefes müssen neu überdacht werden. Die Anregungen zum Mitdenken werden geschätzt, aber die längere Plenumsrunde am Ende des Vormittags ist für mehrere Schüler zu viel. Die graphische Darstellung mit den „Bäumen“ wird überwiegend als gut und aufschlussreich bezeichnet. Der Antwortbrief von Pascal ist bedeutungsvoll und zentral im Prozess und wird kaum kritisiert.

Fazit: Die Konfrontation mit dem Phänomen, mit dem Schlüsselproblem kommt gut an. Es gehört dazu, dass anfänglich Gefühle der Verwirrung, der Hilflosigkeit und der Überforderung auftreten. Die längere anspruchsvolle Phase der Problemlösung, des mühsamen Ringens wird naturgemäss als kontrovers erlebt: Einerseits als willkommene Herausforderung zum Mitdenken und Entdecken, anderseits als wirre, langfädige und unproduktive Zeit, die besser genutzt werden könnte. Dies ist sicher die anspruchvollste Phase auch für die Lehrkraft. Es gilt, immer wieder das Interesse und die Spannung möglichst für alle Schüler aufrecht zu erhalten, weder zu viel noch zu wenig zu lenken und den unterschiedlichen Lernprozessen gerecht zu werden. Ein wichtiges Mittel ist sicher der gezielte, wohldosierte Wechsel von Plenums-, Gruppen- und Einzelarbeit.

Urheber

(1) Der Auftritt des Pythagorasanhängers wird als Bereicherung, Abwechslung, aber auch als lehrreich und interessant bezeichnet. Spätere Nachfragen ergeben allerdings, dass der Auftritt

in lebhafter Erinnerung bleibt, inhaltlich aber kaum mehr etwas vorhanden ist. Daran ändert auch das verteilte Informationsblatt nichts.
(2) Autoren sind ansatzweise präsent: Euklid und Wagenschein mit ihren Texten. Sie werden nur am Rande wahrgenommen.
(3) Der Auftritt von Archimedes beeindruckt sehr und wird zwischen „amüsant“ und „lehrreich“ eingestuft. Einzig die anspruchsvolle Herleitung des Kugelvolumens kommt da und dort nicht gut an. Nur wer sich die Mühe nimmt, das Vorgehen Schritt für Schritt durchzudenken, gelangt zur Einsicht.
(4) Die Auftritte von Zenon, welche hier primär der Präsentation der Paradoxien dienen, finden Anklang.
(5) Auf die Biographie wird kaum reagiert: Eine Zusammenarbeit mit dem Französischunterricht ist angesagt!
Fazit: Der Auftritt des Urhebers als Person wirkt belebend und wesentlich stärker und (mindestens als Bild) nachhaltiger als eine biographische Erläuterung. Dies darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass dabei nur wenig Inhalt vermittelt wird.

Vertiefung und Ausweitung
(1) Die Beweisvielfalt beim Pythagoras erweckt Staunen über die unterschiedlichen Ansätze und die „Vielfalt der Geometrie“. Allerdings wird eine gewisse Verwirrung durch die vielen Beweise erwähnt. Die Arbeit in Gruppen und die Herausforderung zur Präsentation wird geschätzt. Das Individuum wird stärker gefordert. Beweis 9 samt dem Einblick in die „euklidische Geometrie“ wird von einigen als interessante Bereicherung erwähnt. Die Ausweitungen gegen den Schluss werden als spannend und hilfreich bezeichnet. Deren Sinn ist aber nicht allen klar geworden, kann er wohl auch nicht vollständig an dieser Stelle.
(2) Das Aufgabenblatt zur Vertiefung und Ausweitung wird kaum erwähnt, obwohl während dem Unterricht viel Interesse dafür vorhanden war.
(3) Die verschiedenen überraschenden Zusammenhänge bleiben haften, insbesondere wenn sie bildlich dargestellt werden können wie mit den Gläsern. Der Wissenszuwachs im Bereich der Formelsammlung wird mehrfach hervorgehoben, die gedruckte Formeltabelle durchwegs begrüsst.
(4) Im Lehrstück von Achilles und Schildkröte ist dies eine vielseitige und intensive Phase. Die Auseinandersetzung mit diesen verschiedensten Situationen wird, insbesondere als Gegenpol zur vorangegangenen Theorie, fast durchwegs begrüsst. Insbesondere werden die andere Arbeitsweise und die bildlichen Darstellungen hervorgehoben.
(5) Die erste Erweiterung auf neue Spiele wird als gute Idee bezeichnet, sie führt aber nicht zum Handeln. Die Ausweitung auf andere Problemsituationen erfolgt erst nach Abschluss des Lehrstücks.
Fazit: Die Ausweitung wird gegrüsst, manchmal sogar gefordert. Besonders geschätzt werden bildliche Darstellungsweisen und andere Arbeitsformen wie Gruppenarbeit und Schülerpräsentationen.

Übungsphase
(1) Das freie Üben an den Aufgaben wird geschätzt, es liefert Vertrauen und Sicherheit.
(2) Übungen gab es zur Ausweitung nur im Nachgang. Gewünscht werden Aufgaben in früheren Phasen des Lehrstücks. Diese würden allerdings quer zum Prozess liegen.
(3) Übungsphasen mit Übungsblättern gab es zum Eckenland, zur Kreiszahl π und zum Rundland. Vereinzelt werden zusätzliche Aufgaben gewünscht.
(4) Die Übungsaufgaben der Theorieblätter werden nicht erwähnt. Einen wesentlichen und geschätzten Übungsbereich bilden die individuellen Ausweitungsprobleme, welche in abwechselnden Phasen bearbeitet werden.

(5) In diesem kurzen Lehrstück gibt es keine spezielle Übungsphase.
Fazit: Auch wenn in verschiedenen Erarbeitungsphasen viele Übungsmomente vorhanden sind, werden immer wieder Übungsphasen und Übungsblätter gefordert. Sie dienen der Festigung und zur Standortbestimmung des Gelernten.

Finale
(1) Der Bogen vom Schluss zum Anfang und das Schlussbild mit dem Überblick kommen gut an. Erkannt wird, „wie alles irgendwie zusammenhängt".
(2) Das Formulieren der Erkenntnis im Brief schafft da und dort Ordnung im Kopf. Die Briefe von Euklid und Wagenschein werden kaum beachtet.
(3) Der abschliessende Überblick wird gelobt. Er zeigt, was man alles gelernt hat und gibt ein „positives Gefühl".
(4) Mehrere Schüler bezeichnen das Verfassen des Briefes als nützlich oder hilfreich. Nicht zu übersehen ist die Tatsache, dass von allen Schülern und Schülerinnen Briefe vorlagen und dass all diese gehört werden wollten.
(5) Der abschliessende Überblick samt Bezug zu unserer Alltagssprache kommt gut an.
Fazit: Üblicherweise wird dem Abschluss einer Unterrichtseinheit zu wenig Beachtung geschenkt. Die Schülerinnen und Schüler schätzen einen abschliessenden Überblick, eine Zusammenfassung, eine individuelle und gemeinsame Schlussbilanz über Lernfortschritt und Lernprozess.

Schlussbemerkungen
(1) Positiv erwähnt werden das Basteln und die Bilder, die Tatsache, dass die Schüler allein oder in Gruppen entdecken, erklären und präsentieren können. Geschätzt werden die Themenseiten (Pythagoras, Euklid) und die Übungsblätter. Die Dreierblöcke werden mehrfach kritisiert. Eine Klasse von 20 Schülerinnen und Schülern während dreier Lektionen bei einer Problematik zusammenzuhalten, kann nicht immer gelingen.
(2) Das Lernen wie in diesem Lehrstück wird mehrheitlich begrüsst, insbesondere das Vertiefen, das Arbeiten in Gruppen und das selber Herausfinden der Formeln. Deutlich erwähnt werden allerdings auch das zeitweilige Durcheinander und die mühsamen Phasen.
(3) Es erfolgen sehr viele positive Rückmeldungen; im Speziellen bezüglich Gestaltung des Lehrstücks, Ton und Trichter sowie Besuch von Archimedes. Kritisiert wurden Stofffülle, Formelvielfalt, Unterrichtstempo und die Ausführlichkeit der Bearbeitung von π. Als zentrale Erkenntnis werden mehrfach die einfachen und einsichtigen Zusammenhänge zwischen Eckenland, π und Rundland betont. Damit ist ein wesentliches Lernziel erreicht!
(4) Neben vielen positiven Äusserungen hören wir deutliche Kritik an den Plenumsgesprächen: sie seien schwerfällig und zeitaufwändig. Vereinzelt wird der Wunsch nach mehr Hilfe, nach Verkürzung des Prozesses geäussert.
(5) Wir vernehmen zurückhaltend positive Beurteilung. Das spielerische Lernen und die bildliche Darstellung werden positiv erwähnt. Der z. T. mühsame und langwierige Suchprozess behagt nicht allen. Eine Aufteilung in Doppelstunden wird vorgeschlagen statt des z. T. als lang erlebten Blockhalbtags.
Fazit: Die Schlussbemerkungen gelten dem Gesamteindruck und betonen üblicherweise nochmals die Hauptanliegen. Die Arbeit mit Lehrstücken wird grundsätzlich sehr positiv beurteilt. Insbesondere gefallen die Gestaltung der Lehrstücke, die vielfältige Eigenaktivität, die Möglichkeit der Vertiefung und die Beleuchtung eines Themas von verschiedensten Seiten. Besonders geschätzt werden Auftritte von Persönlichkeiten und das Hantieren mit den unterschiedlichsten Materialien. Kritisiert werden immer wieder die als mühsam, langfädig und zum Teil verwirrend empfundenen Plenumsgespräche. Der Bogen darf nicht überspannt werden. Mehr als zwei Lektionen am selben Tag sind für einige Schüler zu viel, selbst wenn in-

nerhalb des Themas stark variiert wird. Besser wäre wohl eine tägliche Doppelstunde, wie dies in gewissen Privatschulen im Epochenunterricht praktiziert wird.

3. Didaktische Interpretation

Die didaktische Interpretation nach der Methodentrias „Exemplarisch: genetisch–dramaturgisch“ mag uns vergegenwärtigen, inwiefern in diesen fünf Unterrichtseinheiten Lehrstücke vorliegen und welche konkreten Aspekte der Lehrkunst lebendig werden.

Exemplarisch

(1) Ausgangspunkt ist die Herausforderung, Quadrate zu vereinen, was in intensivem Prozess zum Satz des Pythagoras führt, der Schlüssel zur Vereinigung zweier Quadrate. Dieser Satz verlangt nach einer Begründung, nach einem Beweis. Dieses Beweisen wird zum zentralen Anliegen und kann nur verstanden werden im Zusammenhang mit dem Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten, exemplarisch verdeutlicht am Beispiel der euklidischen Geometrie. Erreicht wird ein hohes Mass an Gewissheit, das in den verschiedensten Wissenschaften angestrebt wird. Zum tieferen Verständnis des Satzes von Pythagoras gehört ein Blick auf nichtrechtwinklige Dreiecke sowie auf das Quadraturproblem, zum Erfassen der euklidischen Geometrie eine Ahnung von nichteuklidischer Geometrie.

(2) Als Phänomen tauchen die Primzahlen auf, als besonders widerspenstige der natürlichen Zahlen. Sie scheinen immer seltener zu werden, aber ob sie jemals versiegen? Diese uralte Fragestellung neu aufzugreifen und durch mathematisches Denken zu lösen, ist die lockende Herausforderung. Ihre Bewältigung gibt uns die Erfahrung, dass es mit unserem Denken möglich ist, bis in unendliche Weiten schlüssige Antworten zu finden. Das Nachdenken über Endlichkeit und Unendlichkeit ist ein grundmenschliches Anliegen, das weit über die Mathematik hinausgeht. An verwandten Fragestellungen erfahren wir aber auch, dass unser Denken weder allmächtig noch ohnmächtig ist.

(3) Im Zentrum stehen die verschiedenen einfachen mathematischen Körper, ihre Beziehungen zueinander und mathematische Formeln, mit denen sie erfasst werden können. Formeln (und später Funktionen) als Kurzschrift begleiten uns durch das Leben, mit ihnen wollen wir Zusammenhänge erfassen, ja die ganze Welt beschreiben. Zur Sternstunde gehören π als Vermittler vom Eckenland ins Rundland und die einfachen Beziehungen der Körper zueinander.

(4) Provozierend steht Zenons kurze Geschichte von Achilles und der Schildkröte am Ausgangspunkt. Sie zwingt uns zur Schärfung des Blicks für das unendlich Kleine. Das Denken einer unendlichen Teilung von Raum und Zeit, auch wenn weder faktisch noch grundsätzlich vollziehbar, dient als Grundlage äusserst hilfreicher und praktischer mathematischer Gebiete.

(5) Einfache Würfelspiele fordern heraus und führen uns zur Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das rationale Durchdringen des Problems erweitert unser bisheriges proportionales Denken und wir legen die Fundamente zum Verständnis von Wahrscheinlichkeit und damit eines gewichtigen Teils unseres Weltverständnisses.

Fazit: In jedem der fünf Lehrstücke fordert uns ein zentrales Menschheitsproblem heraus, das durch das ganze Lehrstück hindurch präsent ist. Das Ringen um die Klärung stärkt die Kräfte und führt auf eine neue Hochebene der Erkenntnis. Die vertikalen Vertiefungen und die horizontalen Ausweitungen sind deutlich in den thematischen Landkarten aufgezeigt.

Genetisch

(1) Über die klassische Quadraturfrage gelangen wir zum Satz des Pythagoras und damit in diejenige Epoche, in der die Notwendigkeit der Begründung, ja des Beweisens mathematischer Sätze erkannt und bis Euklid perfektioniert wurde. In lebendigem Ringen gelingen uns die Lösung des Rätsels und der Durchbruch zur dahinter liegenden tieferen Erkenntnis. Mit

verschiedensten Mitteln und von mehreren Seiten wird der Satz errungen und immer wieder neu beleuchtet.
(2) Die sich aufdrängende Frage nach dem Abbrechen der Primzahlfolge ist eine sehr alte. Wir durchleben und durchleiden den Weg zur Erkenntnis, erfahren die Kraft mathematischen Denkens und werden damit zum Altmeister Euklid geleitet.
(3) Wir folgen ein Stück dem Weg der Erschliessung der mathematischen Körper, unterstützt von Euklid und geleitet von Archimedes. Mit verschiedenen Mitteln erschaffen und erkunden wir die Körper. Über das Formen und das Formulieren gelangen wir zu den Formeln und zum Staunen über die einfachen Zusammenhänge, die uns Archimedes als Quintessenz seines Lebens präsentiert.
(4) Die Geschichten von Zenon führen uns genetisch echt in die Verwirrung und daraus in die Auseinandersetzung mit dem unendlich Kleinen. Mit allen Sinnen versuchen wir den Sachverhalt erst darzustellen und dann zu klären. In der Auseinandersetzung mit verschiedenen Variationen des Themas gewinnt die Erkenntnis die nötige Reife.
(5) Am Ausgangspunkt stehen überlieferte Glücksspiele des 17. Jahrhunderts, welche zur ersten Ausgestaltung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Pascal führten. In der Auseinandersetzung mit diesen fundamentalen Spielsituationen zeigen sich Widersprüche unseres bisherigen Denkens, die in längerem Prozess bereinigt werden. Wie Pascal damals, wird jeder Schüler für sich zum Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Fazit: In jedem Lehrstück sind wir mit einer genetisch echten Fragestellung konfrontiert, in der sich eine tiefere Problematik kristallisiert, sich ein mathematischer Quantensprung bereits ankündigt. Wie die Menschheit damals, so ringen wir heute. Mit all unseren Kräften und Mitteln sind wir gefordert. Schliesslich vollziehen auch wir individuell den Paradigmenwechsel beziehungsweise den Sprung zur neuen Erkenntnis.

Dramaturgisch
(1) Beim Lehrstück zum Pythagoras stehen die Quadrate durchgehend im Zentrum. Sie wollen zu Beginn vereinigt sein und führen uns damit zum Satz des Pythagoras. Diese Vereinigung will bewiesen und auf vielfältige Weise gezeigt sein. Ihr Auftreten bei Euklid führt in die Tiefen der Geometrie. Als Quadratwurzel begleitet uns das Quadrat in die Algebra. Im Quadraturproblem ergibt sich ein weiterer Höhepunkt und mit der Quadratschnecke finden wir den Weg zum Ausgangsproblem. So verändert sich die Rolle des Quadrats von Akt zu Akt und öffnet uns jedes Mal neue Horizonte. Mit 22 Lektionen umfasst das Lehrstück die ganze Unterrichtseinheit zur Satzgruppe des Pythagoras.
(2) Die Primzahlen wollen erst ins Blickfeld geholt, in einer Tabelle sichtbar gemacht werden, bevor sich die zentrale Frage nach dem Abbrechen der Primzahlfolge aufdrängt. Diese Kernfrage führt zu dramatischem Ringen bis schliesslich die erlösende Argumentation die Antwort liefert. In einem Brief wird sie gebündelt, bevor wir uns zur Abrundung weiteren Aspekten der Primzahlen zuwenden. In diesen 12 Lektionen begegnen wir den Primzahlen von verschiedensten Seiten und erfahren dabei die Kraft mathematischen Denkens.
(3) Archimedes und die Körperfamilie begleiten uns im Ringen um die Formeln. Der Anfang weist uns den Weg, in jedem Akt findet ein Ringen auf neuer Ebene statt bis zum Schluss, nach gut 20 Lektionen die einleuchtende Formelsammlung und die überraschend einfachen Beziehungen zwischen den Körpern zum Geniessen vor uns liegen.
(4) Kaum sind die Hauptakteure Zenon, Achilles und die Schildkröte bekannt, erschüttert uns die provokative Darstellung des Wettlaufs. In der wortlosen Darstellung werden Ratlosigkeit und Verwirrung gesteigert. In langem Ringen mit verschiedenen Ansätzen gelingt es nach und nach, von irrigen Vorstellungen Abschied zu nehmen und neue Einsichten zu gewinnen. Die Fülle von verwandten Problemen hilft, die neue Erkenntnis zu festigen und sie in einem abschliessenden Brief zu verdichten. Dieses Lehrstück mit seinen ca. 18 Lektionen ist ganz dem

Blick auf das unendlich Kleine, auf die fortgesetzte Teilung anhand von geometrischen Folgen gerichtet.
(5) Pascal und de Méré begleiten uns mit ihren Würfelspielen durch das Lehrstück. Das Scheitern unseres linearen Denkens führt uns mitten in die Problematik. In den wechselnden Positionen von de Méré, Pascal und wieder de Méré erleben und bearbeiten wir diese. So gelangen wir zu einer neuen Denkweise, die sich vorerst in verschiedenen Spielvariationen bewähren soll. Dieses nur 8 Lektionen beanspruchende Lehrstück legt das Fundament für Auseinandersetzung mit der Wahrscheinlichkeit. Theoretische Fundierung und Ausweitungsbeispiele folgen im Nachgang.
Fazit: Jedes der fünf Lehrstücke lebt vom gestellten Problem. Wo möglich wird ihm der Urheber als Akteur zur Seite gestellt. Das vielseitige Beleuchten der Problematik, das oft dramatische Ringen um die Lösung und die Sicherung der neuen Erkenntnis bestimmen den Gang durch das Lehrstück und damit die Akte. Die Abrundung wirft einen Blick zurück auf Lernschritt und Lernprozess.

Schlussbemerkungen
Diese fünf dargestellten Unterrichtseinheiten beinhalten stark die exemplarischen, genetischen und dramaturgischen Elemente der Methodentrias und dürfen deshalb mit Recht als Lehrstücke bezeichnet werden.

All diese Lehrstücke haben sich in den Berner Lehrkunstwerkstätten vom Menschheitsrätsel über die acht Gestaltungsschritte zu ihrer heutigen, mehrfach bewährten Form entwickelt. Exemplarisch ist dieser Prozess dargestellt am Beispiel der Primzahlen auf den Seiten 105ff.

Zu ergänzen ist die Dimension funktionaler Kräftebildung, wie sie in der didaktischen Analyse nach Klafkis Kategorialbildungskonzeption am Beispiel des Lehrstücks zum Satz des Pythagoras (S. 66 ff) aufgezeigt wird. In jedem der besprochenen Lehrstücke gibt es – mehr oder weniger intensive – Problemlösungsphasen, in denen die Lernenden wichtige methodische Erfahrungen zum Lösen von Problemen machen. Zu hoffen ist, dass diese Erfahrungen zum Lösen künftiger Probleme verschiedenster Art beitragen können.

Die vorgestellten fünf Lehrstücke besitzen sehr unterschiedliche Längen und auch verschiedene Bedeutung innerhalb des Curriculums. Während die Lehrstücke zum Satz des Pythagoras und zur Körperberechnung etwa bisherige Unterrichtseinheiten abdecken, ist die Thematisierung der Primzahlen im Lehrplan nicht vorgesehen. Das Lehrstück „Achilles und die Schildkröte“ umfasst die geometrischen Folgen und Reihen, bedarf aber einer Ergänzung durch andere Folgen und durch Beispiele aus der Finanzmathematik. Die „Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ legt konzentriert die Basis für den Unterricht über die Wahrscheinlichkeit.

4. Die Lehrstücke in der Fachschaft
Gemäss meiner Erfahrung ist das Interesse nach Unterrichtsberichten und nach Erfahrungsaustausch vorhanden. Rund zwei Drittel meiner Fachkollegen nahmen sich die Zeit und besuchten freiwillig mindestens eine meiner Präsentationen. Einige Kollegen kamen mehrfach, da und dort scheiterte der Besuch an anderen Verpflichtungen. Die Übernahme von Lehrstücken in den eigenen Unterricht ist bekanntlich schwierig. Einerseits ist der Aufwand gross, sich ein Lehrstück anzueignen, anderseits muss man erst mit der Lehrstückphilosophie vertraut werden. Es braucht intensive Begleitung, am besten über längere Zeit.

Was ich in der Fachschaft als Form schulinterner Weiterbildung begonnen habe, ist eine fachbezogene Exempelrunde, die bislang auf Lehrstücke beschränkt war. Schon lange hoffe ich auf andere Themen durch Beiträge von Kollegen. Geplant sind ein Erfahrungsbericht mit einem graphikfähigen Taschenrechner (TI 89) und die Präsentation eines bewährten interdisziplinären Projekts über Kostenfunktionen. Führt uns die Methodenvielfalt zur entsprechenden Exempelvielfalt? Es braucht offenbar viel, bis es Lehrkräfte wagen und sich die Zeit nehmen, aus dem eigenen Unterricht etwas vorzustellen. Die Ängste sind gross, vielleicht bei uns noch grösser, da wir drei Schulen im gleichen Gebäude sind und untereinander bislang wenig Kontakt pflegten. Ich denke aber, als Protagonist bin ich jetzt vorangegangen, andere werden folgen. Auch bezogen auf die bevorstehende Fusion der drei Gymnasien im Sommer 2005 sind wichtige Schritte gemacht. Noch haben wir allerdings nicht über die fundamentalen Ziele unseres Mathematikunterrichts diskutiert und von einem Exempelrepertoire sind wir noch weit entfernt.

5. Die Ideengeschichte der Mathematik im Unterricht

In der Einleitung habe ich festgehalten, dass die Ideengeschichte der Mathematik, wie sie im Rahmenlehrplan gefordert ist, im Unterricht erfahrungsgemäss viel zu selten lebendig wird. Die aufgestellte These besagt, dass sich Lehrstücke besonders eignen, um diesen Mangel zu beseitigen. Inwieweit kann die Lehrkunst mit ihren Lehrstücken die angesprochene dritte Blickrichtung des Rahmenlehrplans, die Ideengeschichte der Mathematik, in den Unterricht bringen? Um diese Prüffrage zu beantworten, habe ich zehn bildungsrelevante Grundideen der Mathematik formuliert, fünf Lehrstücke meines Unterrichts ausführlich dargestellt und diese Lehrstücke bezüglich der darin repräsentierten Grundideen untersucht. Im Anschluss fasse ich die Repräsentanz jeder einzelnen Grundidee in der bisherigen Reihenfolge der Lehrstücke zusammen, wie sie auch im tabellarischen Zusammenzug (S. 271) übersichtlich zum Ausdruck kommt. Zur Vervollständigung der Repräsentanz der Grundideen in meinen üblichen Unterrichtslehrstücken schliesse ich unter Nummer {6} das in dieser Arbeit nicht ausführlich beschriebene Lehrstück zu $\sqrt{2}$ in die Beurteilung ein.

Grundidee [1]: Denkgebäude

Erfahren, dass Mathematik ein Denkgebäude auf klar definierten Grundlagen ist, bei dem man die Sätze begründen und voneinander ableiten kann, und dass dadurch ein höchstes Mass an Gewissheit erreicht wird.

Grundsätzlich ist das logische Denken beim Mathematisieren immer gegenwärtig. Aber nicht immer sind wir uns bewusst, dass ein streng logisches Gebäude vorliegt, in dem ein sehr hohes Mass an Gewissheit vorhanden ist, wie wir es in anderen Bereichen nicht finden.

(1) Ins Zentrum der Betrachtung gerückt wird die Mathematik als Denkgebäude beim Beweis des Satzes von Pythagoras, den wir in den „Elementen“ des Euklid nachlesen. Wir lernen das wohl einflussreichste Buch der ganzen Mathematikgeschichte kennen. Hier erfahren wir, wie ein Beweis geführt wird, wie Sätze auf frühere Sätze abgestützt werden, welche wiederum auf früheren Sätzen ruhen, bis wir schliesslich zu den Definitionen sowie Axiomen und Postulaten als Basis der ganzen Geometrie ankommen. Wir staunen, dass das Ändern eines kleinen Grundbausteins, des Parallelenpostulates, eine völlig andere Geometrie zur Folge hat.

(2) Bei den Primzahlen und den zusammengesetzten Zahlen erleben wir ein ganz anderes mathematisches Gebäude, dasjenige der natürlichen Zahlen. Es wird strukturiert durch die Grundoperationen. Die Primzahlen erweisen sich als besonders herausfordernde Elemente. Wir lernen uns bewegen in diesem logischen System und können schliesslich beweisen, was unerreichbar schien: Es gibt mehr als endlich viele Primzahlen. Eine Perle der Mathematik

liegt vor uns, die von den alten Griechen bereits entdeckt wurde. Wir hören auch, dass es in diesem Gebäude noch unbekanntes und unerschlossenes Gebiet gibt.
(3) Bei den mathematischen Körpern werden Zusammenhänge sichtbar. Entsprechend lassen sich die Formeln systematisch herleiten. Wir vertiefen uns in einem logischen Denkgebäude. Es ist nichts anderes als ein weiterer Teil der euklidischen Geometrie.
(4) Beim Lehrstück des Achilles wird diese Grundidee nicht thematisiert.
(5) Im Lehrstück zur Wahrscheinlichkeit sind wir beteiligt bei der Entstehung einer neuen mathematischen Disziplin, auch wenn die axiomatischen Grundlagen nicht angesprochen sind.
{6} Bei der Wurzel 2 stösst unser rationaler Ansatz vorerst an Grenzen. Unser Zahlensystem erweist sich als lückenhaft. Erst die Einführung der irrationalen Zahlen vervollständigt die Zahlengerade, das Denkgebäude erfährt eine Erweiterung.

Grundidee [2]: Ideenwelt
Erfahren, dass sich die Mathematik als abstrakte, theoretische Wissenschaft mit den idealen Gegenständen befasst, die als Ideen (Platon) hinter den real existierenden stehen.
Diese Grundidee [2] finden wir in der ganzen Mathematik und damit in jedem Lehrstück. Die mathematischen Sätze und ihre Beweise haben nur Gültigkeit im Bereich der abstrakten Gegenstände. Denn nur in einem idealen System sind absolute Logik und Rationalität möglich.
(1) Die griechische Geometrie, wie wir sie im ersten Lehrstück mit Euklid kennen lernen, konnte nur auf dem Boden dieser Grundidee entstehen. Die euklidische Geometrie stellt einen der grössten Triumphe des menschlichen Intellekts dar. Insbesondere beruht die Diskussion um die Konstruierbarkeit auf dieser Grundidee. Zirkel und Lineal sind zwar einerseits die gebräuchlichen Konstruktionswerkzeuge, anderseits symbolisieren sie Kreis und Gerade im abstrakten Sinne.
(2) Bei den Primzahlen, wie bei den Zahlen überhaupt, geht es um abstrakte, nur im Kopf vorhandene Gebilde. Die Zahlen haben sich längst von den Gegenständen losgelöst, die sie ursprünglich zählten.
(3) Bei Würfel und Kugel ist der ideale Aspekt schon zu Beginn bei der Körperfamilie aktuell. Die unregelmässigen Gegenstände liegen vor Augen, aber wir denken an den idealen Würfel, an die ideale Kugel dahinter. Wir sprechen über die Objekte, wie sie nur im Geiste vorhanden sind. *Künftig muss diese Tatsache unbedingt im Lehrstück thematisiert werden!*
(4) Bei Achilles und der Schildkröte argumentieren wir mit einer unendlichen Teilung, die in der Realität nur allzu bald an die physikalischen Grenzen stösst. Ebenso ist es bei den Fraktalen.
(5) In der Wahrscheinlichkeitsrechnung stehen die Würfel im Zentrum. Wir wissen nie genau, wie nahe der geworfene Würfel unserem gedachten, idealen Würfel kommt, bei dem jede Augenzahl mit gleicher Wahrscheinlichkeit erscheint.
{6} Die Frage nach der Messbarkeit von $\sqrt{2}$ kann nur für die Diagonale im „Quadrat an sich“ gestellt und beantwortet werden.

Grundidee [3]: Modellierung
Erfahren, wie die mathematische Gesetzlichkeit mit der Natur eng korrespondiert und wie deshalb mit geeigneter Modellierung die abstrakte Mathematik über reale Gegenstände und Situationen präzise Aussagen herleiten kann.
(1) Rechte Winkel wie beim Satz des Pythagoras gibt es fast überall in unserer technisierten Welt. Die Übertragung der Sätze über rechtwinklige Dreiecke fällt leicht.
(2) Bei den Primzahlen ist diese Grundidee nicht sichtbar.
(3) In unserem Umfeld begegnen wir vielen einfachen Körpern, welche den idealen Gestalten nahe kommen und damit gut mit den Formeln erfassbar sind.

(4) Spannend ist bei Achilles und der Schildkröte die Frage nach der „richtigen“ Modellierung. Dass schliesslich zwei verschiedene Betrachtungsweisen sich ergänzen und nicht widersprechen, ist besonders eindrücklich. Bei mehreren der Anwendungsaufgaben geht es primär darum, ein zutreffendes Modell zu formulieren.
(5) Beim Würfeln mit zwei Würfeln steht die Frage nach dem richtigen Modell im Zentrum. De Méré versteht die Welt nicht mehr, weil er ein falsches Modell und damit eine falsche Erklärungsweise im Kopf hat. Die mühsam errungene Antwort beinhaltet das Modell für alle weiteren mehrstufigen Zufallsversuche.
{6} Bei der Bestimmung von $\sqrt{2}$ geht es darum, eine möglichst exakte Aussage über die Länge der Diagonale im Quadrat zu finden, wie wir sie kennen von einer babylonischen Tontafel.

Grundidee [4]: Zahl
Erfahren, dass Zahlen einerseits abstrakte Gebilde sind mit algebraischen Strukturen und Gesetzmässigkeiten, sowie vielen Geheimnissen, und dass sie anderseits unsere Alltagskultur durchdringen und mitbestimmen.
(1) Die Zahlen stehen bei Pythagoras und seiner Lehre im Zentrum: „Alles ist Zahl.“ Die natürlichen Zahlen mit ihren mystischen Qualitäten sind präsent in der Geometrie, in der Musik und in der Astronomie. Der Satz des Pythagoras erlaubt aber auch viele Bereiche des heutigen Alltags zahlenmässig zu erschliessen, er steht zudem beispielhaft für das menschliche Bestreben, möglichst alles durch Zahlen zu erfassen. Zudem führt der Satz an die Grenzen der natürlichen Zahlen und ihrer Verhältnisse zueinander, der rationalen Zahlen.
(2) Bei den Primzahlen geht es um die „Königsdisziplin der Mathematik“, um die Zahlentheorie. Die natürlichen Zahlen mit ihren Gesetzmässigkeiten, Strukturen und Geheimnissen werden untersucht. Einige Gesetze können wir ergründen, andere entziehen sich unseren Argumenten.
(3) Bei Archimedes ist es das Ringen um die irrationale Zahl π, der Schlüssel vom Eckenland zum Rundland. Wir verfolgen die Auseinandersetzung um die Zahl π über mehr als drei Jahrtausende. Am Schluss des Lehrstücks sind es die einfachen Zahlenverhältnisse, welche uns Gesetze der Natur und Schönheit der Mathematik näher bringen.
(4) Die Zahlen sollen uns im Wettlauf von Achilles mit der Schildkröte helfen, den Ausgang zu bestimmen. Erst die zahlenmässige Erfassung lässt uns die Aufholvorgänge verstehen. Gleichzeitig erfahren wir ein vertieftes Verständnis über Zahlen: Obwohl wir unendlich viele Zahlen zusammenzählen, kann deren Summe als Grenzwert durchaus endlich sein.
(5) Im Lehrstück zur Wahrscheinlichkeit geht es um das zahlenmässige Erfassen von Ungewissheit, Unsicherheit. Ein Unterfangen, das nicht so paradox ist, wie es auf den ersten Blick scheinen mag. Die entstandene Wahrscheinlichkeitsrechnung und die damit verbundene Statistik erlauben uns heute sehr viele Bereiche des Lebens zahlenmässig zu erfassen.
{6} Bei $\sqrt{2}$ geht es vertieft um die Irrationalität von Zahlen, um die Lücken zwischen den rationalen Zahlen, die geschlossen werden wollen.

Grundidee [5]: Messen
Erfahren, dass wir erst mit dem Messen von Grössen unsere Welt quantitativ erfassen können, dabei aber an fundamentale Grenzen der Messbarkeit stossen.
(1), (2), (4) Das Grundkonzept des Messens, nämlich der Vergleich des zu Messenden mit einer festgelegten Einheit, fehlt in diesen Lehrstücken.
(3) Archimedes versucht den Umfang des Kreises mit dem Radius zu messen, das Runde durch das Gerade. Diese besondere Schwierigkeit meistert er mit einer Einschachtelung, die eine beliebig genaue Bestimmung erlaubt.

(5) Bei der Wahrscheinlichkeit ist der Vorgang des Messens weniger ersichtlich. Es geht darum, ein Mass für die Gewissheit zu finden, wobei der absoluten Gewissheit die Zahl 1 zugeordnet wird.

{6} Bei $\sqrt{2}$ ist Messen das zentrale Thema. Es stellt sich heraus, dass die Diagonale durch die Einheit der Quadratseite nicht messbar ist, d.h. Diagonale und Quadratseite sind inkommensurabel. Wie bei der Zahl π ist auch hier grundsätzlich nur eine beliebig gute Annäherung möglich. Die Zahlen π und $\sqrt{2}$ sind irrational.

Grundidee [6]: Geometrisieren

Erfahren, wie beim Strukturieren des Euklidischen Raumes einfache Formen und ästhetische Prinzipien allgegenwärtig sind, die sich in arithmetisch-algebraischen und in räumlichen Gesetzmässigkeiten ausdrücken.

(1) Bei Pythagoras beschränken wir uns vorerst auf Formen, Ästhetik und Gesetzmässigkeiten im zweidimensionalen Raum. Das Konstruieren ist eine besondere Form, diesen Raum mit seinen Gebilden zu erfassen. Daraus erwachsen Fragen der Verwandelbarkeit. Es entstehen Gruppen von Figuren, die ineinander verwandelt werden können. Immer wieder gilt es, die geometrischen Sätze auf ebene oder räumliche Situationen anzuwenden.

(2) Das Geometrisieren ist nicht thematisiert.

(3) Ganz ausgeprägt um die räumliche Strukturierung geht es beim Lehrstück des Archimedes. Wir schaffen die prägnanten Körper mit unseren Händen und setzen sie zueinander in Beziehung. Es ergeben sich Eckenland und Rundland. Durch das ganze Lehrstück hindurch stehen diese Körper im Zentrum. Sie werden gezeichnet, Netze werden konstruiert, Kegel aus Papier hergestellt und immer wieder entwickeln wir Formeln und stellen konkrete Berechnungen dar. Schliesslich begegnen wir in den Gläsern, mit dem Vollmond am Nachthimmel und in der Quintessenz von Archimedes den einfachstmöglichen Beziehungen im Raum.

(4) Beim Paradoxon von Zenon liegt ein besonderes Problem vor, nämlich die räumliche Unterteilung bis ins unendlich Feine. Dieses Thema wird vertieft mit der Teetasse, den Bildern von Escher, den Spiralen und den Fraktalen.

(5) Das Geometrisieren ist nicht thematisiert.

{6} Bei $\sqrt{2}$ steht das Quadrat im Zentrum. Um das Längenverhältnis von Diagonale zu Quadratseite wird gerungen.

Grundidee [7]: Funktion

Erfahren, wie kraftvoll eine Formel, eine funktionale Abhängigkeit als kristallisierte Form mathematischer Intelligenz sein kann, um innermathematische Sachverhalte auszudrücken, aber auch um Abhängigkeitsbeziehungen aus unserem Alltag aufzuspüren und zu erfassen.

Formeln und funktionale Zusammenhänge sind in den fünf ersten Lehrstücken stark vertreten. Es geht aber nicht primär darum, Formeln anzuwenden und mit Funktionen korrekt umzugehen. Wesentlich ist, dass diese Formeln entdeckt oder entwickelt, dass die Verknüpfungen bewusst nachvollzogen werden. Heymann (1996, S. 178) schreibt dazu: „Die mathematische Formulierung funktionaler Zusammenhänge erweist sich so als ein universelles Mittel, messbare Veränderungen in unserer Welt theoretisch zueinander in Beziehung zu setzen und symbolisch zu bearbeiten.“

(1) Bei Pythagoras erarbeiten wir uns die formelmässige Abhängigkeit der Seiten im rechtwinkligen Dreieck.

(2) Bei den Primzahlen ringen wir um Formeln, die uns neue Primzahlen liefern könnten.

(3) Im Lehrstück „Vom Würfel zur Kugel“ entwickeln wir bei den verschiedensten Körpern Formeln zur Berechnung von Volumen und Oberfläche bis hin zur Formeltabelle. Die „formulierten“ Zusammenhänge äussern sich schliesslich in den einfachsten Zahlenverhältnissen.

(4) Lineare und exponentielle Zusammenhänge streiten sich bei Achilles und Schildkröte, bis sie sich schliesslich ideal ergänzen.
(5) In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird um die zutreffende Verknüpfung der Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Versuchen gerungen: Addition oder Multiplikation, d.h. linearer oder exponentieller funktionaler Zusammenhang.
{6} Bei $\sqrt{2}$ steht nicht die Suche nach einer Formel im Zentrum, auch wenn ein funktionaler Zusammenhang zwischen Diagonale und Seite im Quadrat besteht.

Grundidee [8]: Algorithmus
Erfahren, wie sich ein Algorithmus aufstellen und anwenden lässt, welche Vorteile, aber auch Grenzen ihm im Zusammenhang mit Computern gesetzt sind.
(1) Ein Algorithmus taucht am Rande bei der Wurzelschnecke auf. Auch das Vereinen mehrerer Quadrate liesse sich algorithmisch erfassen.
(2) Das Sieb des Eratosthenes kann als Algorithmus bezeichnet werden und im Beweis für das Nichtabbrechen der Primzahlfolge steckt eine algorithmische Beschreibung zur Erzeugung immer weiterer Primzahlen.
(3) Algorithmen rücken ins Zentrum bei der Berechnung der irrationalen Zahl π.
(4) Die Geschichte von Zenon führt uns ebenfalls direkt zu algorithmischer Beschreibung.
(5) Im Lehrstück zur Wahrscheinlichkeit werden die Algorithmen nicht thematisiert.
{6} Algorithmen sind gefragt bei der Berechnung der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$.

Grundidee [9]: Unendlichkeit
Erfahren, wie das „Unendliche“ und „Grenzprozesse“ im Grossen wie im Kleinen gedanklich fruchtbar werden, in der Natur an Grenzen stossen und trotzdem die Realität beschreiben helfen.
Die Auseinandersetzung mit der Unendlichkeit, eine der spannendsten Angelegenheiten der Mathematik, beschäftigt fast alle Lehrstücke.
(1) Bei Pythagoras ist das Unendliche nur am Rande dabei, wenn Quadrate „pulverisiert“ werden sollen, wenn der Pythagorasbaum sich entfaltet und die Wurzelschnecke wächst.
(2) Bei den Primzahlen geht es um die Unendlichkeit. Was unerreichbar und unbestimmbar schien, wird schliesslich entschieden. Ein Beweis gelingt, der bis in die Unendlichkeit wirkt, während andere Vermutungen über Endlichkeit oder Unendlichkeit bis heute nicht entschieden sind.
(3) Grenzprozesse sind im Spiel, wenn Archimedes die Zahl π oder Kugelvolumen und Kugeloberfläche bestimmt.
(4) Die Geschichte von Achilles und der Schildkröte fordert direkt heraus, sich mit der Unendlichkeit des Aufholvorganges auseinanderzusetzen. Es ist ein unendlicher Prozess, der sich im Endlichen abspielt, obwohl er nicht zu Ende gedacht werden kann. Anwendungen wie die Schenkungssteuer, Escherbilder, Spiralen, Fraktale oder die Überlegungen am Wecker und an der vollen Teetasse nehmen das Thema wieder auf.
(5) Im Lehrstück zur Wahrscheinlichkeit wird die Unendlichkeit nur am Rande angesprochen, wenn wir erwähnen, dass unsere Überlegungen nur auf die Dauer gültig sind oder dass unsere Würfel nur annähernd die ideale Gestalt besitzen.
{6} Bei der Berechnung wie beim geometrischen Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ stossen wir auf einen nicht abbrechenden Grenzprozess. Die Intervallschachtelung selbst, welche zur Beschreibung einer irrationalen Zahl definiert wird, ist ein derartiger Prozess.

Tabelle 6
Hans Brüngger

Zusammenfassung der zentralen Ideen in den Lehrstücken
(von geringer [•] bis hoher [• • •] Repräsentanz)

Grundideen	[1] Mathematik als logisches Denkgebäude auf klar definierten Grundlagen	[2] Die Ideen hinter den realen Gegenständen	[3] Korrespondenz zwischen Mathematik und Natur erlaubt Modellierung	[4] Zahlen sind abstrakte Gebilde und durchdringen unsere Alltagskultur	[5] Messen von Grössen erlaubt quantitative Erfassung der Welt	[6] Formen, Ästhetik und Gesetzmässigkeiten beim räumlichen Strukturieren	[7] Formel und funktionale Abhängigkeit als Kurzschrift mathemat. Intelligenz	[8] Algorithmen zur Beschreibung von Prozessen	[9] Unendlichkeit und Grenzprozesse	[10] Wahrscheinlichkeit: Die Mathematik der Unsicherheit
Pythagoras	• • •	•	• •	• • •		• •	• • •	•	•	
Primzahlen	• • •	•		• • •			• • •	• •	• • •	
Würfel und Kugel	• •	• •	•	• • •	• •	• • •	• • •	• • •	• • •	
Wurzel 2	• •	• •	•	• •	• • •	•	•	• • •	• • •	
Achilles und Schildkröte	•		• • •	• •		• •	• • •	• •	• • •	
Wahrscheinlichkeit	• • •	•	• • •	•	•		• • •		• •	• • •

Grundidee [10]: Wahrscheinlichkeit
Erfahren, dass das Mass der Unsicherheit mathematisch fassbar ist. (Wahrscheinlichkeitsrechnung)
(1), (2), (3), (4), {6} In diesen Lehrstücken ist die Wahrscheinlichkeit kein Thema.
(5) Die geniale Erkenntnis, dass Unsicherheit sich dem mathematischen Denken nicht entziehen muss, sondern fassbar wird, führte zur Entwicklung eines grossartigen mathematischen Gebietes mit weitreichenden Anwendungen, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die obige Zusammenstellung und die Tabelle (vgl. S. 271) zeigen nochmals deutlich, wie konkret und vielfältig die Grundideen in den Lehrstücken vertreten sind. Es offenbaren sich aber auch Defizite. Künftig sollte die Idee hinter den Gegenständen (Grundidee [2]) stärker thematisiert werden. Dem Messen (Grundidee [5]) muss bei $\sqrt{2}$ und bei der Annäherung an π verstärkt Beachtung geschenkt werden. Anzumerken bleibt, dass diese zentralen Ideen immer mit geschichtlichen Wurzeln verknüpft sind. Ideengeschichte wird erfahrbar. Es geht dabei allerdings nicht um die Geschichte als Historie, sondern um die Geschichte als Quelle, welche den Zugang zur Erkenntnis öffnet und den Werdegang einer Idee erschliesst. Wegweisend sind in diesem Zusammenhang die Sätze von Toeplitz (zitiert nach Toeplitz 1949, S. V): „Ich sagte mir: alle diese Gegenstände …, die heute als kanonisierte Requisiten gelehrt werden … und bei denen nirgends die Frage berührt wird: warum so? wie kommt man zu ihnen? alle diese Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals, als sie geschaffen wurden. Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würde der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen.“ … „*Ich* will aus der Historie nur die Motive für *die* Dinge, die sich hernach bewährt haben, heraus greifen und will sie direkt oder indirekt verwerten. Nichts liegt mir ferner, als eine Geschichte der Infinitesimalrechnung zu lesen; ich selbst bin als Student aus einer ähnlichen Vorlesung weggelaufen. Nicht um die *Geschichte* handelt es sich, sondern um die *Genesis* der Probleme, der Tatsachen und Beweise, um die entscheidenden Wendepunkte dieser Genesis.“

Mit diesen zentralen Ideen der Mathematik sind einige der wichtigsten Etappen der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik samt ihrem Bezug zur Kulturgeschichte und zu einigen der einflussreichen Persönlichkeiten des Abendlandes (Pythagoras, Zenon, Euklid, Archimedes, Pascal, am Rande auch Platon und Aristoteles) erfasst. Mit Wittenberg (vgl. Wittenberg 1980, S. 25) wollen wir hoffen, dies möge dazu beitragen, dass Jugendliche ihre Einsichten, Vorbilder und Ideale vermehrt auch bei den unsterblichen Meistern der Menschheit suchen und finden.

Immer wieder beobachte oder höre ich, dass die Ideengeschichte der Mathematik im heutigen Unterricht nicht lebendig wird. Wie die präsentierten Lehrstücke und die Analyse zeigen, sind diese 5 (oder 6) ins Curriculum passenden Lehrstücke in optimaler Art und Weise geeignet, die wesentlichen mathematischen Grundideen samt ihrer geschichtlichen Einbettung im Unterricht erfahrbar zu machen. Mir ist keine Methode bekannt, die das ebenso gut könnte und erst recht keine, die sich dies zum Inhalt setzt. Die Analyse anhand von Funktionszielen oder Grundideen schärft unseren Blick auf das Wesentliche. So werden immer wieder auch in denjenigen Themenbereichen, die nicht lehrkunstmässig bearbeitet werden und in verschiedensten Beispielen und Anwendungen die Hauptideen in gewandelter Gestalt zum Aufleuchten gebracht. Dies trägt wesentlich zur innerfachlichen Kohärenz bei. Mit derart geschärftem Blick für das Wesentliche werden wir uns zusätzlich gegen Ende der gymnasialen (Aus-) Bildungszeit einige Stunden vornehmen, um die Erfahrungen zu sammeln und die Grundideen zusammenzustellen und zu zentrieren. So bilden sich die Schülerinnen und Schüler ein einheitlicheres und fundamentaleres Bild von Mathematik. Sie erfahren, dass Mathematik als Wissenschaft eine grossartige kulturelle Leistung ist. Dieser so vertiefte „Blick in die Ideengeschichte der Mathematik und deren Einbettung in die Kulturgeschichte“ liefert einen wesentlichen Beitrag für den „Blick in die Welt der Mathematik hinein als einer eigenständigen Disziplin“, wie er im Rahmenlehrplan ebenfalls gefordert wird (vgl. S. 5).

Es mag kritisiert werden, die Lehrkunst sei einseitig, nur rückwärtsgewandt, weder auf den Alltag noch auf die Zukunft bezogen. Darauf ist folgendes zu entgegnen: Es ist die Stärke der Lehrkunst, die wesentlichen Entwicklungslinien und die fundamentalen Ideen einer Wissenschaft lebendig werden zu lassen. Diese Grundlagenerfahrungen sind notwendig, aber sicherlich nicht hinreichend, um die brennenden Alltags- und Zukunftsprobleme zu lösen. Die Lehrkunst beansprucht nicht, die einzig richtige Unterrichtsmethode zu sein. Dabei verstehe ich die „Unterrichtsmethode“ wie Wiechmann (2000, S. 9ff) als Planungs- oder Handlungsmuster, das die Gestaltung einer längeren Sequenz betrifft und oft verschiedene Unterrichtselemente enthält. Vielmehr soll die Lehrkunst mit rund 10 % Anteil in einer ausgewogenen Methodenvielfalt einen entscheidenden und bisher schwer vernachlässigten Beitrag leisten (vgl. Tabelle 3, S. 19). Keine der Methoden kann alle gewünschten Aspekte gleichermassen erfüllen. Die Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler zeigen, dass nicht jede Person gleichermassen positiv auf eine bestimmte Unterrichtsmethode anspricht. Zudem gilt (Wiechmann 2000, S. 10), „dass die Leistungsfähigkeit jeder Unterrichtsmethode nachlässt, wenn sie als ausschliessliche Methode über einen längeren Zeitraum als etwa 6 Wochen hinweg verwendet wird.“ Je nach Unterrichtsgegenstand und Zielsetzung, je nach Klasse und Umfeld eignet sich die eine oder andere Methode besser. Wichtig ist deshalb, dass die Lehrperson ein breites Methodenrepertoire beherrscht und die Methodenwahl reflektiert stattfindet.

6. Erkenntnisse aus der vorliegenden Arbeit

Damit ist es jetzt möglich, eine Antwort zu geben auf die im ersten Kapitel (S. 13) gestellte Prüffrage: Inwieweit kann die Lehrkunst mit ihren Lehrstücken den zentralen Punkt der angesprochenen dritten Blickrichtung des Rahmenlehrplans, die Ideengeschichte der Mathematik samt ihrer kulturellen Einbettung, in den Unterricht einbringen?

1. Lehrstücke im Unterricht
Mit einiger Unterrichtserfahrung ist es möglich, im mathematischen Curriculum der oberen gymnasialen Klassen (9. bis 12. Schuljahr) Lehrstücke im Umfang von 10 bis 15% der gesamthaft zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit durchzuführen.

2. Feedback der Schülerinnen und Schüler zum Lehrstück
Von den Schülerinnen und Schülern wird der Lehrstückunterricht mehrheitlich positiv beurteilt. Insbesondere das intensivere Verweilen bei einem Gegenstand und die vielschichtige Bearbeitungsweise werden geschätzt. Besonders zu beachten sind allerdings die Gestaltung der längeren Problemlösephasen und die Einbettung des Lehrstücks in den Schulalltag.

3. Didaktische Interpretation
Die in dieser Dissertation vorgestellten fünf Unterrichtseinheiten sind nach den Prinzipien der Methodentrias komponiert und bereits mehrfach durch den Unterricht gegangen. Sie können als bewährte Lehrstücke bezeichnet werden. Fünf mathematische Sternstunden der Menschheit liegen bereit für die Inszenierung im Unterricht.

4. Die Lehrstücke in der Fachschaft
Das Interesse der Fachkollegen für Lehrstücke ist breit vorhanden, die Übernahme eines Lehrstücks durch Fachkollegen allerdings nicht allzu häufig und mit beträchtlichem Betreuungsaufwand verbunden.

5. Ideengeschichte im Mathematikunterricht
Die Analyse zeigt, dass die dargestellten Lehrstücke auf vielfältige Art und Weise die Ideengeschichte der Mathematik und ihre kulturelle Einbettung im Unterricht lebendig werden lässt. Zur Verdichtung und Vertiefung ist zusätzlich gegen Ende der Gymnasialzeit eine kurze direkte Thematisierung der Grundideen ins Auge zu fassen.

Schlussbilanz:
Damit lässt sich die Prüffrage klar positiv beantworten. Es gibt eine Anzahl bewährter Lehrstücke für die Mathematik der Sekundarstufe II, mit denen es möglich ist, die Ideengeschichte der Mathematik samt ihrer kulturellen Einbettung in den Unterricht zu bringen. Die Akzeptanz bei Schülerinnen und Schülern ist mehrheitlich positiv. Dank dieser Lehrstücke gelingt der Brückenschlag zwischen Rahmenlehrplan und Unterricht. Zudem wird mit den Grundideen die Welt der Mathematik als einer eigenständigen Disziplin (erste Blickrichtung, vgl. S. 11) in eine wesentliche Dimension erschlossen und vertieft.

7. Blick in die Zukunft
Im Folgenden möchte ich ein paar Gedanken über die Weiterentwicklung mit der Lehrkunst anfügen.

Zu hoffen bleibt, dass auch andere Fachschaften beginnen, die zentralen Ideen ihres Faches zu eruieren und Exempel hervorzuheben oder zu entwickeln, welche diese Grundideen im Verlaufe des gymnasialen Lehrganges im Unterricht lebendig werden lassen. In einem nächsten Schritt könnte innerhalb der Schule eine Fächer übergreifende Exempelrunde anlaufen, in der anhand von besonderen Unterrichtsbeispielen das Charakteristische eines jeden Faches ins Blickfeld gerückt würde. Bausteine einer allgemeinen Bildung würden bereitgestellt. Schliesslich ergäbe sich daraus der Blick für das Ganze der gymnasialen Bildung. Die Schule könnte sich vermehrt an den wirklichen Bildungszielen orientieren, an innerer Kohärenz gewinnen und mit Profil nach aussen wirken.

Lehrstücke haben sich mehrfach im Unterricht bewährt, haben neue Standards gesetzt und bisher verhüllte Horizonte eröffnet. Viele Lehrkräfte sind fasziniert und interessiert, aber die Übernahme ist nicht einfach. Gelbe Lehrkunstbücher und Berichte wie die hier vorliegenden sind wichtig und anregend, sie genügen aber offenbar nicht, um ein Lehrstück im eigenen Unterricht erfolgreich durchführen zu können. Dank mehrerer Lehrkunstwerkstätten mit starker Beteiligung von Lehrkräften der Gymnasien Bern-Neufeld hat sich die Lehrkunst an dieser Schule verankert. Lehrstücke aus unterschiedlichsten Fächern sind entwickelt, mehrfach erprobt und werden an unserer Schule regelmässig im Unterricht inszeniert. Die Aneignung eines Lehrstücks ist ein längerer aufwändiger Prozess. Im Einzelfall erlebt eine Lehrkraft, die grundsätzlich schon offen ist für lehrkunstgemässes Unterrichten, vorerst bei einer Lehrkunst erfahrenen Lehrperson eine Inszenierung mit, liest sich zusätzlich in die Lehrkunstdidaktik ein und führt anschliessend unter Betreuung das Lehrstück selbst durch. Im Regelfall besucht die Lehrkraft eine der Lehrkunstwerkstätten, in denen Lehrstücke in gegenseitigem Austausch erarbeitet, präsentiert und anhand der Theorie analysiert werden. Dieser intensive Prozess dauert üblicherweise gut zwei Jahre. Im Februar 2004 startete an der Kantonsschule Trogen, Schweiz, ein einjähriges Pilotprojekt mit dem Ziel, dass sich die beteiligten Lehrkräfte (11 Personen, das sind etwa 20% des Lehrkörpers!) innerhalb eines Jahres die Grundlagen der Lehrkunst und ein Lehrstück des eigenen Faches aneignen.

Denkbar ist auch die Durchführung eines fachspezifischen Kurses unter der Obhut der WBZ (Schweizerische Weiterbildungszentrale für Lehrkräfte der Sekundarstufe II, → www.wbz-cps.ch). Im Gegensatz zu den bisherigen Lehrkunstwerkstätten würden nur Mathematiklehrer angesprochen. Der bisherige Querblick in verschiedenste Fächer würde zu Gunsten einer konzentrierteren Fachorientierung aufgegeben. Die Ausschreibung könnte folgendermassen lauten:

Grundideen der Mathematik im Unterricht

Der Rahmenlehrplan für die Maturitätsschulen der Schweiz (S. 97) erwähnt die Ideengeschichte der Mathematik als eine der drei Blickrichtungen des Unterrichts. Geringe Bedeutung wird aber den zentralen Ideen und deren Geschichte im heutigen Mathematikunterricht eingeräumt. Wie lässt sich dies ändern? Es hat sich erwiesen, dass Lehrstücke, wie sie seit bald zwanzig Jahren von Prof. Hans Christoph Berg in seinen Lehrkunstwerkstätten entwickelt werden, vortrefflich geeignet sind, die zentralen Ideen der Mathematik samt ihrer geschichtlichen Einbettung lebendig werden zu lassen. Lehrstücke sind bewährte, nach genetisch-dramaturgischer Methode gestaltete Unterrichtseinheiten, d. h. dass sie die Unterrichtsgegenstände in ihrem Werdeprozess entfalten (= genetisch), und zwar mit all ihren Überraschungen, Spannungen und Widersprüchen (= dramaturgisch). In einem konzentrierten einjährigen Kurs ist es möglich, einige mathematische Lehrstücke und damit auch die dahinter stehende Lehrkunstdidaktik kennen zu lernen. Zwei der Lehrstücke sollen in Ihrem eigenen Unterricht erprobt werden und schliesslich zur Erweiterung Ihres Methodenrepertoires beitragen.

Die folgenden drei Lehrstücke werden im Zentrum stehen:
Vom Würfel zur Kugel mit Archimedes (Stereometrie, ca. 9. Schuljahr)
Achilles und die Schildkröte (Grenzprozesse / geometrische Reihen, ca. 11. Schuljahr)
Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Pascal (10. – 12. Schuljahr)
Im Wechsel von Prozess und Bericht lernen Sie die Lehrstücke kennen. Gemeinsam werden diese Unterrichtseinheiten analysiert und dabei der lehrkunstdidaktische Hintergrund erarbeitet. Nach guter Vorbereitung erproben Sie das eine oder andere Lehrstück im eigenen Unterricht. Die Erfahrungen werden in den späteren Veranstaltungen ausgetauscht, künftige Inszenierungen dadurch optimiert.

Zeitdauer: Insgesamt 5 Tage verteilt über ein Jahr.

Die erste Veranstaltung findet zweitägig, die übrigen eintägig statt.
Leitung: Hans Brüngger / Prof. Dr. Hans Christoph Berg

8. Persönlicher Schluss

Mit der Entwicklung dieser fünf Lehrstücke und ihrer Positionierung als Bildungspfeiler meines Unterrichts habe ich meinen Blick für die Methodenvielfalt und für die Grundideen der Mathematik geschärft. Bewusster werde ich in Zukunft meine Methodenwahl treffen und gezielter im Unterricht da und dort und immer wieder die Grundideen der Mathematik ins

Zentrum stellen. So ist mein Unterricht in einem stetigen lebendigen Optimierungsprozess grundsätzlicher und wesentlicher geworden. Die rund zehn Jahre dauernde Auseinandersetzung mit der Lehrkunst war eine grosse Bereicherung. Sie hat neue Dimensionen in meinen Unterricht und in meinen Alltag gebracht. Neue Kontakte entstanden, auch über fachliche und nationale Grenzen hinweg. Es war aber auch ein langer, aufwändiger Weg, der ohne reduziertes Unterrichtspensum, ohne Unterstützung von der Schulleitung und von zuhause nicht möglich geworden wäre. Gleichzeitig mussten notgedrungen verschiedene andere fachliche und ausserfachliche Entwicklungsbereiche vernachlässigt werden.

Mit dieser Arbeit trage ich fünf Lehrstücke auf den Marktplatz, in der Hoffnung, dass sie von Fachkolleginnen und Fachkollegen begutachtet, angeeignet, praktisch erprobt und weiter optimiert werden. Vielleicht findet sogar das eine oder andere von ihnen als bewährtes Lehrstück eine grössere Verbreitung.

Z A H L R E I C H


Das große
Einmal-
Eins
Rote
Zahlen
SIEHE
endlich
unendlich
Vier

Z A H L R E I C H

„Zahlreich“ heisst dieses Bild des Künstlers Ueli Hofer aus Trimstein, Schweiz. Seit Jahren kenne ich ihn und seine Scherenschnitte, Collagen, Installationen und Eisenskulpturen. Da er sich für Zahlen interessiert und mit dieser Thematik bereits Bilder (Hofer 2002, S. 97, 110, 117, 121) geschaffen hatte, setzte ich mich mit ihm zusammen und bat ihn, einige meiner mathematischen Themen aufzunehmen und umzusetzen. Gespannt wartete ich auf das Bild. Entstanden ist dieses in rot-schwarz-weiss gehaltene Kunstwerk, das inzwischen in meiner Wohnstube hängt. Es fasziniert als Gesamtbild und enthüllt beim genaueren Hinsehen zahlreiche Beziehungen zu den verschiedenen Lehrstücken in der vorliegenden Dissertation.

Im Zentrum finden wir das kleinste der magischen Quadrate, ein Kreuzworträtsel der Mathematiker, das Hexeneinmaleins. Die ersten 9 der natürlichen Zahlen sind hier quadratisch vereint unter dem Diktat der Summe 15. Die 5, die Zahl der Elemente, beherrscht das Zentrum, die geraden Zahlen positionieren sich in den Ecken. Symmetrien erlauben uns 8 verschiedene Möglichkeiten. Im alten Ägypten nutzten die Priester magische Quadrate zur Vorhersage der Zukunft. In Griechenland führten die Pythagoräer diese Tradition fort. Sie waren überzeugt, dass alle Dinge durch Zahlen determiniert sind, dass sich alles durch einfache Zahlenverhältnisse ausdrücken lässt.

Eingefasst ist dieses magische Quadrat durch 14 antike Dominosteine, die Hälfte eines Spiels. Angefertigt sind sie aus Knochenplättchen, auf Holz montiert. Vor über 300 Jahren von den Chinesen erfunden und erst um die Mitte des 18. Jahrhunderts nach Europa gelangt, ist das Domino noch heute als beliebtes Zahlenspiel weit verbreitet. Es ist kein reines Glücksspiel. Genaue Berechnung und schnelles Denken sind gefragt.

Auf gewissen Dominosteinen finden wir die Leere, eine Leerstelle, wie bei den Zahlen der alten Babylonier, aber erst die Inder haben diese Leerstelle etwa zur Lebenszeit von Archimedes mit einer neuen Ziffer besetzt, der Null. Damit konnte sich unser heutiges Positionssystem entwickeln. Erst über ein Jahrtausend später gelangte die Null über die Araber nach Europa, wo sie lange Zeit als „teuflisches Zeichen der Araber“ abgelehnt wurde. Links oben beginnt unser Bild mit der Null. Alleine zwar ein Nichts, aber mit der 1 zusammen bestimmt sie die Welt der Computer.

Um das Zentrum herum sind 80 kleine Quadrate angeordnet. Sie sind alle den Zahlen gewidmet. Die von den Indern entwickelten „arabischen“ Ziffern 0 bis 9 finden wir verteilt über das ganze Bild. Durch die Grundoperationen gelangen wir zum grossen Einmal-Eins. Der Ausschnitt aus einer Multiplikationstafel zeigt uns einen Weg. Im Hintergrund der Zahlen finden wir alte Schriftzüge mit Zahlen oder gedruckte Zahlentabellen. Sie führen in den praktischen Alltag, zu den roten und den schwarzen Zahlen.

Für Pythagoras standen die natürlichen Zahlen im Zentrum. Wir denken ans rechtwinklige Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5, an die einfachen Zahlenverhältnisse bei der pythagoräischen Stimmung. Jede Zahl hat ihre Qualität, ihre Bedeutung. Es fällt uns die Tetraktis auf, die vollkommene und heiligste aller Zahlen, die Summe der ersten vier natürlichen Zahlen, darstellbar durch Punkte mit einem gleichseitigen Dreieck. Wurzelausdrücke, Formeln mit Wurzeln und Summen von Quadraten deuten auf die Anwendungen des Satzes von Pythagoras hin. Wir finden verschiedene Quadrate, aber auch den Kreis, der nicht quadrierbar ist. Die Möndchen erinnern uns an gewisse krummlinig begrenzte Figuren, die erstaunlicherweise wieder in ein Quadrat verwandelt werden können. Die Diagonale im Quadrat und das halbe

Quadrat im Quadrat verweisen auf die grosse Krise, welche die Pythagoräer gespalten hat: Die Tatsache, dass nicht jedes Verhältnis rational ist. Die Zifferblätter lenken auf unsere Zeiteinteilung und damit auf die Babylonier mit ihrem 60-er System. Sie haben eine erstaunlich genaue Angabe für die Länge der Diagonale im Quadrat berechnet und uns diese auf einer Tontafel überliefert. Bei Euklid schliesslich finden wir den klaren Beweis, dass die Wurzel 2 nicht rational ist.

Überall im Bild, auch mit den 89 kleinen Quadraten, begegnen uns Primzahlen und damit die Frage: Endlich oder unendlich? Drehen wir eine 8, so entsteht das Zeichen für unendlich, ursprünglich vermutlich entstanden aus einem m für mille (Tausend), gespiegelt an der Schreiblinie. Zu den Besonderheiten der Zahlen gehören Primzahlzwillinge wie 17 und 19 sowie die vollkommenen Zahlen. Die kleinste unter ihnen ist 6, denn 1 + 2 + 3 = 6. Ferner finden wir leicht zu zerlegende zusammengesetzte Zahlen wie 68, 288 und 384, Quadratzahlen und Kubikzahlen.

An Archimedes erinnern uns nicht nur Quadrat und Kreis, Würfel und Kugel, nein auch das Zeichen π und die archimedische Zahl 22/7, eine Jahrhunderte lang gebrauchte Annäherung der irrationalen Zahl π. Eine alte Handschrift weist auf die Bestimmung von π durch regelmässige Vielecke im Kreis. Die goldene Scheibe, das π-fache des goldenen Quadrats, umfasst als Mondscheibe ein Viertel der Mondoberfläche.

Zu Achilles und Schildkröte gehört die Frage: „Ist der Weg endlich oder unendlich?“ Die Unendlichkeit im Endlichen begegnet uns im unendlichen Regress der Spiralen und in der Zahl $0.\overline{9}$. In der Doppelspirale mit ihren zwei Strudelpunkten erblicken wir ein Bild von Escher. Zifferblatt und Zeiger erinnern an das Problem der beiden sich bewegenden Zeiger, der grosse, der den kleinen einholt, wie Achilles die Schildkröte.

Würfel und Knöchel (Astragalus), die wir in der untersten Zeile finden, gehören zu den ältesten Gegenständen für Spiel und Orakel. Sie sind Urgegenstände der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie die Strichliste Urform ist beim Zählen von Gegenständen. Würfel bringen Spannung und Freude beim Spiel, allenfalls Verderben bei Spielsucht. Sie können aber auch wesentliche Erkenntnis vermitteln und verhalfen sogar, dank Blaise Pascal, zur Geburt einer ganzen Wissenschaft. Als Kuriosum aus der Moderne erscheint ein Würfel in Kugelform, ein „Kugelwürfel“.

Ganz rechts unten, gegenüber der verteufelten Zahl 0 offenbart sich ein Abschluss. Elementare Zahlen (4, 5, 6, 8) im Glas, die Büchse der Pandora, mit allen Übeln dieser Welt. Diese Zahlen helfen aber auch, und dies nicht erst seit Pythagoras, unsere Welt zu ergründen und zu verstehen.

Und immer wieder begegnen wir dem Auge oder der zeigenden Hand: „Siehe!“, „Schau hin!“, „Hast du gesehen!“. Es gibt in diesem Reich der Zahlen wie in der Mathematik überhaupt noch viel Verborgenes, Unentdecktes und Unerkanntes, das entschlüsselt werden will.

Literaturliste

Aczel Amir D.: Die Natur der Unendlichkeit. science sachbuch. Rowohlt, Hamburg 2002
Archimedes: Abhandlungen. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften (Band 201), Harri Deutsch, Thun 1996
Archimedes: Kugel und Cylinder/Kreismessung. J. G. Cotta, Tübingen 1798
Aulbach Carsten: Der antike Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2. Hausarbeit an der Philipps-Universität Marburg, Mai 2000
Baptist Peter: Pythagoras und kein Ende? Klett, Leipzig 1998
Baptist Peter: Mathematikunterricht im Wandel. Buchners, Bamberg 2000
Becker Oskar: Das Mathematische Denken der Antike. Vanderhoeck & Ruprecht, Göttingen 1957
Berg/Schulze (Hrsg.): Lehrkunst. Lehrbuch der Didaktik. Luchterhand, Neuwied 1995
Berg/Schulze (Hrsg.): Lehrkunstwerkstatt I. Luchterhand, Neuwied 1997
Berg/Schulze (Hrsg.): Lehrkunstwerkstatt II. Luchterhand Neuwied 1998
Bonati Peter in Berg Hans Christoph: Bildung und Lehrkunst in der Unterrichtsentwicklung. Schulmanagement Handbuch 106. Oldenburg, München 2003
Cohn Ruth C.: „Zu wenig geben ist Diebstahl, zu viel geben ist Mord!“ betrifft:erziehung Januar 1981
De Crescenzo Luciano: Geschichte der griechischen Philosophie. Diogenes, Zürich 1990
DMK/DPK: Formeln und Tafeln. Orell Füssli, Zürich 9. Aufl. 2001
Dunham William: Mathematik von A bis Z. Birkhäuser, Basel 1996
Ernst Bruno: Der Zauberspiegel des M. C. Escher, in Unmögliche Welten (4 in 1). TASCHEN GmbH, Köln 2002
Erziehungsdirektion des Kantons Bern: Gymnasialer Unterricht im 9. Schuljahr. Bern 1996
Euklid: Die Elemente. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften (Band 235), Harri Deutsch, Thun 1997
Fachgruppe Mathematik: Formelsammlung Mathematik. Neue Kantonsschule, 5000 Aarau
Falletta Nicholas: Paradoxon. Fischer Taschenbuch, Frankfurt am Main 1988
Freudenthal Hans: Mathematik als pädagogische Aufgabe (Bd. I/II) Klett, Stuttgart 1973
Gardner Martin: Spektrum der Wissenschaft, November 1998
Goethe Johann Wolfgang von: Farbenlehre. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1980
Grumbach Ernst (Hrsg.): Aristoteles Werke. Physikvorlesung (Band 11). Wissenschaftl. Buchgesellschaft, Darmstadt 1967
Gymnasien Bern-Neufeld: Die Maturitätsausbildung. 3012 Bern 1998
Haber Heinz (Hrsg.): Das Mathematische Kabinett. Folge 2. dtv, München 1974
Heymann Hans Werner: Allgemeinbildung und Mathematik. Beltz, Weinheim 1996
Hofer Ueli: Geschnittenes Papier und Collagen. Paul Haupt, Bern 2002
Ineichen Robert: Würfel und Wahrscheinlichkeit. Spektrum, Heidelberg 1996
Jung Jochen (Hrsg.): Die Welten des M. C. Escher. Pawlak, Herrsching 1971
Kamber David: Neues zu Würfel und Kugel, in Berner Lehrkunstwerkstatt: Lehrstücke der Gruppe III, ZS LLFB, Bern 2001
Klafki Wolfgang: Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Beltz, Weinheim 1959
Klippert Heinz: Methodentraining. BELTZ Praxis, Beltz, Weinheim, 1994
Leuders Timo: Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Cornelsen, Berlin 2001
Loeffel Hans: Blaise Pascal. Vita Mathematica. Birkhäuser, Basel 1987
Loomis Elisha Scott: The Pythagorean Proposition, NCTM, Washington 2. Aufl. 1972
Meschkowski Herbert: Problemgeschichte der Mathematik. Bd.I-Bd.III, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 2. Aufl. 1981-1986
Müller Fritz: Am Anfang war die Zahl. Büchergilde Gutenberg, Zürich 1953

Nölle Beate: Dreiecksquadrate. In Berg/Schulze (Hrsg.): Lehrkunstwerkstatt I, Luchterhand, Neuwied 1997
Pascal Blaise: Gedanken. Reclam, Stuttgart 2002
Pauli Petra: Der antike Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 - ein Lehrstück nach Martin Wagenschein, Hausarbeit an der Philipps-Universität Marburg 1998
Peter Rozsa: Das Spiel mit dem Unendlichen. Harri Deutsch, Thun 1984
Rényi Alfréd: Briefe über die Wahrscheinlichkeit. VEB 1969
Ritter Cornelia: TonraumZahlen. Ein Weg zu den Logarithmen. In Berner Lehrkunstwerkstatt: Lehrstücke der Gruppe III, ZS LLFB, Bern 2001
Russell Bertrand: Philosophie des Abendlandes. Europaverlag, München 9. Aufl. 2000
Schudel Rolf/Krzensk Barbara: Wahrscheinlichkeitsrechnung. In Berner Lehrkunstwerkstatt: Lehrstücke der Gruppe II, ZS LLFB Bern 2001
Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren EDK (Hrsg.): Rahmenlehrplan für die Maturitätsschulen. EDK, 3001 Bern 1994
Scriba Christoph J./Schreiber Peter: 5000 Jahre Geometrie. Springer, Berlin 2001
Toeplitz Otto: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Springer, Berlin 1949
van der Waerden B. L.: Erwachende Wissenschaft. Birkhäuser, Basel 1966
Wagenschein Martin: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken. Bd. I/II. Klett, Stuttgart 1965/70
Wagenschein Martin: Naturphänomene sehen und verstehen. Klett, Stuttgart 1980
Wagenschein Martin: Verstehen lehren. Beltz, Weinheim 7. Aufl. 1982
Wagner Peter (Hrsg.): Lehrplan des Wirtschaftsgymnasiums Bern-Neufeld, Bern 1999
Werner Wilhelm: Primzahlen, nach Wagenschein. In Berg/Schulze (Hrsg.): Lehrkunst. Lehrbuch der Didaktik. Luchterhand, Neuwied 1995
Wiechmann Jürgen (Hrsg.): Zwölf Unterrichtsmethoden. Beltz, Weinheim 2. Aufl. 2000
Wittenberg Alexander Israel: Bildung und Mathematik, Klett, Stuttgart 2. Aufl. 1990
Wussing Hans, Arnold Wolfgang: Biographien bedeutender Mathematiker. Volk und Wissen, Berlin 3. Aufl. 1975

Anhang: Rahmenlehrplan und Schullehrplan Mathematik

Verordnung und Rahmenlehrplan (RLP)

Schullehrpläne

«Verordnung über die Anerkennung von gymnasialen Maturitätsausweisen» MAR vom 15. Februar 1995

Art. 5 Bildungsziel

[1] Ziel der Maturitätsschulen ist es, Schülerinnen und Schülern im Hinblick auf ein lebenslanges Lernen grundlegende Kenntnisse zu vermitteln sowie ihre geistige Offenheit und die Fähigkeit zum selbständigen Urteilen zu fördern. Die Schulen streben eine breit gefächerte, ausgewogene und kohärente Bildung an, nicht aber eine fachspezifische oder berufliche Ausbildung. Die Schülerinnen und Schüler gelangen zu jener persönlichen Reife, die Voraussetzung für ein Hochschulstudium ist und die sie auf anspruchsvolle Aufgaben in der Gesellschaft vorbereitet. Die Schulen fördern gleichzeitig die Intelligenz, die Willenskraft, die Sensibilität in ethischen und musischen Belangen sowie die physischen Fähigkeiten ihrer Schülerinnen und Schüler.

[2] Maturandinnen und Maturanden sind fähig, sich den Zugang zu neuem Wissen zu erschliessen, ihre Neugier, ihre Vorstellungskraft und ihre Kommunikationsfähigkeit zu entfalten sowie allein und in Gruppen zu arbeiten. Sie sind nicht nur gewohnt, logisch zu denken und zu abstrahieren, sondern haben auch Übung im intuitiven, analogen und vernetzten Denken. Sie haben somit Einsicht in die Methodik wissenschaftlicher Arbeit.

[3] Maturandinnen und Maturanden beherrschen eine Landessprache und erwerben sich grundlegende Kenntnisse in anderen nationalen und fremden Sprachen. Sie sind fähig, sich klar, treffend und einfühlsam zu äussern, und lernen, Reichtum und Besonderheit der mit einer Sprache verbundenen Kultur zu erkennen.

[4] Maturandinnen und Maturanden finden sich in ihrer natürlichen, technischen, gesellschaftlichen und kulturellen Umwelt zurecht, und dies in bezug auf die Gegenwart und die Vergangenheit, auf schweizerischer und internationaler Ebene. Sie sind bereit, Verantwortung gegenüber sich selbst, den Mitmenschen, der Gesellschaft und der Natur wahrzunehmen.

Der RLP und die Anerkennung der Maturitätszeugnisse

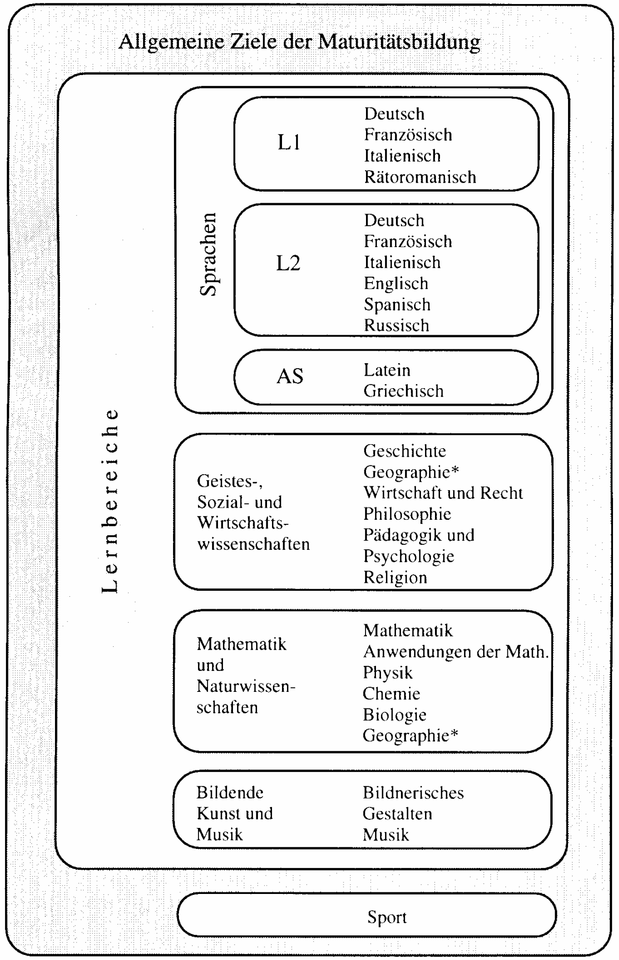
Der RLP hat zwei Funktionen:

a) wie oben beschrieben, eine eigenständige Funktion: als Empfehlung der EDK an die Kantone, ihre gymnasialen Lehrpläne danach auszurichten oder gymnasiale Lehrpläne auf dieser Basis neu zu schaffen.

b) als Referenzdokument für die Anerkennung der Maturitätsausweise.
Dieser Beschluss kann erst erfolgen, wenn das gegenwärtig in Ausarbeitung befindliche Abkommen zwischen dem Bund und den Kantonen steht. Die vorliegende RLP-Fassung berücksichtigt in hohem Masse den Stand der Entwicklung bei der Neugestaltung der Anerkennungsbedingungen vom Frühjahr 1994.

Rahmenlehrplan (RLP) für die Maturitätsschulen EDK, Bern 1994, S. 9/10

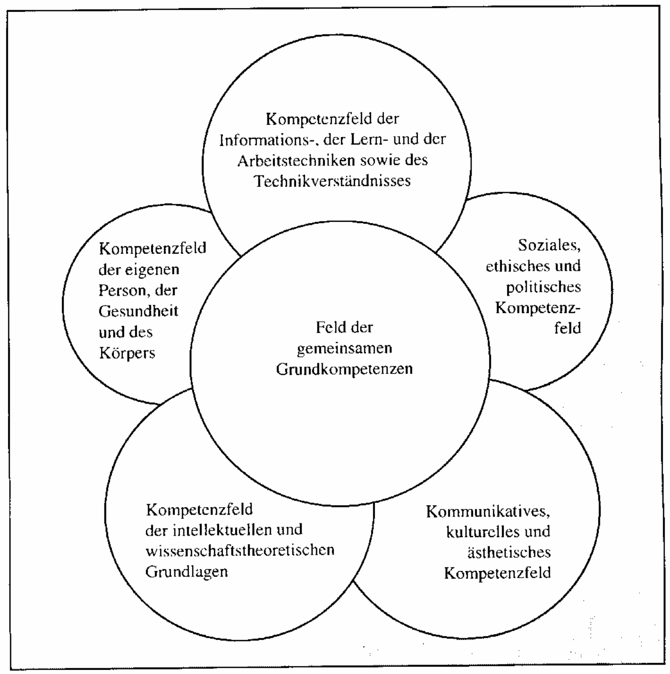
Aufbau des Rahmenlehrplans



L1 = Erstsprachen, L2 = Zweitsprachen, AS = Alte Sprachen
* Zuordnung je nach Kanton

Die allgemeinen Ziele der Maturitätsbildung

Bildungsprofil



Rahmenlehrplan (RLP) für die Maturitätsschulen EDK, Bern 1994, S. 11

Die „allgemeinen Ziele der Maturitätsbildung" bezwecken, die Ziele und gemeinsamen Aspekte der einzelnen Fächer an Maturitätsschulen in einem erzieherischen Gesamtrahmen aufzuzeigen. Diese Bildungsgrundlagen für Jugendliche der Sekundarstufe II lassen sich in fünf Kompetenzbereiche einteilen:

- Kompetenzen im sozialen, ethischen und politischen Bereich;
- Kompetenzen im intellektuellen, wissenschaftlichen und erkenntnistheoretischen Bereich;
- Kompetenzen im kommunikativen, kulturellen und ästhetischen Bereich;
- Kompetenzen in den Bereichen der Persönlichkeitsentwicklung und der Gesundheit;
- Kompetenzen in den Bereichen der persönlichen Lern- und Arbeitstechniken, der Wissensbeschaffung und der Informationstechnologien.

In jedem der fünf Bereiche wird zwischen den für alle Jugendlichen verbindlichen Grundkompetenzen und den speziell für Gymnasiastinnen und Gymnasiasten vorgesehenen ergänzenden Kompetenzen unterschieden. Die aufgeführten Bildungsziele ergänzen somit die Rahmenlehrpläne der einzelnen Fächer. Sie sollen einen fächerübergreifenden Zugang zu den Fach-Rahmenlehrplänen aufzeigen.

Die allgemeinen Bildungsziele wurden als Bildungsprofil für Jugendliche konzipiert, die ein Hochschulstudium absolvieren oder eine andere höhere Ausbildung beginnen wollen. Zentraler Ausgangspunkt der Überlegungen war dabei immer die Eigenverantwortlichkeit der Jugendlichen für ihre Bildung. Die allgemeinen Bildungsziele dürfen deshalb nicht als Vorwand für zusätzlichen Lehrstoff in einzelnen Fächern dienen; sie sollen vielmehr dazu ermutigen, sich auf das Wesentliche zu konzentrieren.

Zum besseren Verständnis werden jeweils anschliessend an die einzelnen Kompetenzfelder unter dem Titel „Transdisziplinärer Zugang" Beispiele aus einzelnen Fach-Rahmenlehrplänen zitiert, die diesem Kompetenzfeld zugeordnet werden können.

Rahmenlehrplan (RLP) für die Maturitätsschulen EDK, Bern 1994, S. 97-99

MATHEMATIK

A Allgemeines Bildungsziel

Der Mathematikunterricht vermittelt ein intellektuelles Instrumentarium, ohne das - trotz Intuition und Erfindungsgeist - kein vertieftes Verständnis der Mathematik, ihrer Anwendungen und der wissenschaftlichen Modellbildung überhaupt möglich ist.

Bei den Lernenden stehen folgende drei Blickrichtungen im Vordergrund:

- der Blick in die Welt der Mathematik hinein als einer eigenständigen Disziplin;
- der Blick aus der Mathematik hinaus in ihre Anwendungen, die Modellbildungen und deren Bezüge auf die uns umgebende Wirklichkeit;
- der Blick in die Ideengeschichte der Mathematik und deren Einbettung in die Kulturgeschichte und die Entwicklung von Wissenschaft und Technik.

Als Beitrag zur Allgemeinbildung schult der Mathematikunterricht das exakte Denken, das folgerichtige Schliessen und Deduzieren, einen präzisen Sprachgebrauch und den Sinn für die Ästhetik mathematischer Strukturen, Modelle und Prozesse. Er fördert das Vertrauen in das eigene Denken und bietet andererseits mit modularen Problemlösestrategien mannigfaltige Chancen, Einzelleistungen im Rahmen von Gruppenarbeiten zu integrieren.

Der Mathematikunterricht bereitet die allgemeinen Grundlagen, Fertigkeiten und Haltungen für die akademischen Berufe vor, in denen Mathematik eine Rolle spielt. Er fördert das Interesse und das Verständnis für die Berufe aus Naturwissenschaft und Technik, in denen mathematische Denkweisen und Werkzeuge eingesetzt werden.

B Begründungen und Erläuterungen

Damit der Mathematikunterricht einer breiten Schülerschaft positive Erfahrungen und Erfolgserlebnisse zu vermitteln vermag, ist Zeit, Geduld und Musse erforderlich. Insbesondere gilt dies für die Entwicklung von Problemlösestrategien, bei denen Entdecken und Erfinden, logisches Argumentieren und Schliessen zentral sind.

In weitreichendem Masse liefert die Mathematik eine formale Sprache zur Beschreibung naturwissenschaftlicher Modelle, zur Erfassung technischer Prozesse und zunehmend auch für wirtschafts-, human- und sozialwissenschaftliche Methodologien. Somit ist Mathematik zum Einsatz im fächerübergreifenden Unterricht besonders geeignet.

Erfolgserlebnisse in der Mathematik setzen Interesse, Geduld, Ausdauer, Konzentrationsfähigkeit, Durchhaltevermögen und geistige Beweglichkeit voraus. Jugendliche sind durchaus bereit, die Herausforderungen des Faches anzunehmen, wenn sie fachlich und persönlich kompetent begleitet werden und wenn genügend Raum für den Ablauf der Erfahrungs- und Lernprozesse zur Verfügung steht.

MATHEMATIK

C Richtziele

Grundkenntnisse

- Die mathematischen Grundbegriffe, Ergebnisse und Arbeitsmethoden der elementaren Algebra, Analysis, Geometrie und Stochastik kennen
- Die wichtigsten Etappen der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik und ihre heutige Bedeutung kennen
- Heuristische, induktive und deduktive Methoden kennen

Grundfertigkeiten

- Mathematische Objekte und Beziehungen erkennen und einordnen
- In der Schule behandelte oder selbst erarbeitete mathematische Sachverhalte mündlich und schriftlich korrekt darstellen
- Analogien erkennen und auswerten
- Probleme erfassen und mathematisieren, mathematische Modelle beurteilen und entwickeln sowie die Möglichkeiten und Grenzen dieser Modelle erkennen
- Mathematische Modelle in anderen Schulfächern (Physik, Chemie, Biologie) nutzen und anwenden
- Geometrische Situationen erfassen, darstellen, konstruieren und abbilden
- Elementare Beweismethoden anwenden
- Mit der Arbeitsmethode der modularen Problemlösung vertraut sein
- Die Fach- und Formelsprache sowie die wichtigsten Rechentechniken beherrschen
- (Informatik-)Hilfsmittel und Fachliteratur zweckmässig anwenden

Grundhaltungen

- Der Mathematik positiv begegnen, ihre Stärken und Grenzen kennen
- Offen sein für die spielerische und ästhetische Komponente mathematischen Tuns
- Selbständig, sowohl allein als auch in der Gruppe, arbeiten
- Technische Hilfsmittel kritisch einsetzen
- Offen sein für Verbindungen zu anderen Fachbereichen, in denen mathematische Begriffsbildungen und Methoden nützlich sind
- Bereit sein, mathematische Probleme zu erkennen und die verfügbaren Kräfte und Mittel für Lösungen einzusetzen

Mathematiklehrplan 9. Schuljahr

Version spezielle Sekundarklassen bzw. Quarta
(Zusammenfassung)

Systematisierfähigkeit:
Sachverhalte strukturieren, Beziehungen erkennen, den mathematischen Gehalt zum Darstellen, Bearbeiten und Interpretieren nutzen. Analogien erkennen und auswerten. Mathematische Formen in Sprache und Figuren umsetzen. Aus Sachverhalten Daten entnehmen und verarbeiten, grafische Darstellungen lesen und interpretieren. Die Bedeutung der Genauigkeit erfahren und beachten. Die Bedeutung und Herkunft von mathematischen Erkenntnissen erfahren.

Problemlöseverhalten:
In ungewohnten und neuartigen Situationen systematisch und kreativ Lösungsansätze entwickeln. Allein und im Team Lösungswege planen und umsetzen; Lösungen kritisch überprüfen. Überlegungen zum systematischen Vorgehen anstellen, Strukturen von Lösungswegen erkennen und darstellen. Lösungs- und Spielstrategien entwickeln, erproben und verbessern.
Problemstellungen aus verschiedenen Gebieten mit mathematischen Modellen bearbeiten.

Grobziele	**Lerninhalte**
Arithmetik / Algebra:	
- Sich im Raum der ganzen und gebrochenen Zahlen orientieren und die entsprechenden Begriffe verstehen. Den Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Zahlen erfassen.	- Ganze Zahlen (Z) und rationale Zahlen (Q). Schreibweise kleiner und grosser Zahlen mit Zehnerpotenzen. Umgang mit Potenzen ganzzahliger Exponenten. Rationale und irrationale Zahlen.
- Bruchterme umformen und auswerten. Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen aus Sachzusammenhängen gewinnen und lösen. Verhältnis- und Bruchgleichungen gewinnen und lösen.	- Bruchterme mit Monomen, Binomen und Trinomen; erweitern, kürzen, operieren, auswerten. Doppelbrüche Einfache Gleichungen 2. Grades durch Faktorzerlegung und mit Formel lösen.
- Gleichungs- und Ungleichungssysteme mit zwei Variablen gewinnen und lösen.	- Algebraische Lösungsmethoden für lineare Gleichungssysteme 1. Grades mit zwei Variablen (Addition, Einsetzen).
- Die Bedeutung von Formeln erfassen; Formeln gewinnen, deuten, anwenden und umformen.	- Formeln gewinnen und deuten. Umkehrprobleme durch Umformen der Grundformel lösen.
- Die Bedeutung von Funktionen erfahren. Ausgewählte Funktionen gewinnen, graphisch darstellen und deuten.	- Funktionen und ihre Graphen: Funktion als Zuordnung, Bedeutung der Funktion. Konstante Funktion; Proportionalität, allgemeine Funktion 1. Grades, Gerade.
Geometrie:	
- Ähnlichkeit von Figuren und Körpern erkennen, Streckung als Abbildung verstehen. Eigenschaften der Streckung kennen und beim Zeichnen, Konstruieren und Berechnen anwenden. Verhältnisse an ebenen Figuren und Körpern feststellen und anwenden. In Figuren und Körpern bedeutsame Beziehungen erkennen.	- Zentrische Streckung: Eigenschaften, Konstruktion, Ähnlichkeitsabbildungen. Kongruenzsätze und Ähnlichkeitsbedingungen bei Dreiecken. Proportionalsätze: Berechnungen, Konstruktionen; Streckenteilung.
- Ausgewählte geometrische Sätze.	- Satzgruppe des Pythagoras in Konstruktionen und Berechnungen.
- Pyramide, Kegel und Kugel untersuchen, darstellen und berechnen.	- Pyramide, Kegel und Kugel: Eigenschaften; Oberfläche und Volumen berechnen.

Allgemeine Bildungsziele

Als Beitrag zur Allgemeinbildung soll der Mathematikunterricht das exakte Denken, folgerichtiges Schliessen, einen präzisen Sprachgebrauch sowie den Sinn für die Ästhetik und die vielseitige Anwendbarkeit mathematischer Strukturen, Modelle und Prozesse fördern. Er soll die Grundlagen, Fertigkeiten und Haltungen für die akademischen Berufe aus Natur- und Sozialwissenschaften, Technik und Wirtschaft, in denen mathematische Denkweisen und Werkzeuge eingesetzt werden, vorbereiten.

Richtziele

Die Gymnasiastinnen und Gymnasiasten sollen modulare und rein individuelle Problemlösungsstrategien entwickeln und Mathematik als Kulturgut der Vergangenheit und der Gegenwart erleben und erkennen lernen sowie im Mathematikunterricht Vertrauen in ihr eigenes Denken gewinnen.

Grobziele und Themenschwerpunkte

Grobziele	**Lerninhalte**
Tertia	
Algebra: – lineare und verwandte Gleichungssysteme gewinnen und Lösungsmethoden verstehen und beherrschen	Lineare Gleichungssysteme mit zwei oder mehr Variablen: – Additions- und Einsetzungsmethode – Substitution
– die Bedeutung von Funktionen in der Mathematik und in anderen Wissenschaften erleben und die verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen kennen – die graphischen Eigenschaften quadratischer Funktionen kennen und anwenden – quadratische und verwandte Gleichungen gewinnen und lösen	Funktionen: – Begriff der Funktion – graphische Darstellungen von Funktionen – Inversion und Verkettung von Funktionen – quadratische Funktionen und Gleichungen – Extremalwertprobleme
– Terme mit rationalen oder reellen Exponenten auswerten und sicher umformen	Potenzen: – Potenzen mit rationalen Exponenten – Wurzelrechnen – Potenzen mit reellen Exponenten
Geometrie: – die Notwendigkeit und den Nutzen der trigonometrischen Funktionen erkennen und erleben – Berechnungsmöglichkeiten in beliebigen Dreiecken verstehen und beherrschen	Trigonometrie: – Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck – Trigonometrie im allgemeinen Dreieck – Sinus- und Cosinussatz – Trigonometrische Funktionen und ihre Graphen
– Vektoren als wichtiges Hilfs- und Anschauungsmittel für den zwei- und dreidimensionalen Raum erkennen – die elementaren Operationen mit Vektoren im ebenen und räumlichen kartesischen Koordinatensystem beherrschen und die algebraische Lösbarkeit geometrischer Probleme wieder entdecken	Vektorgeometrie: – Einführung in die Vektorgeometrie – Komponentenschreibweise und Koordinatendarstellung von Vektoren – Skalarprodukt

Grobziele	**Lerninhalte**
Stochastik: – die wichtigsten Methoden des Zählens verstehen und anwenden	Kombinatorik: – elementare Zählprinzipien wie Multiplikations-, Additions- und Äquivalenzklassenprinzip – elementare Zählformeln wie Permutation, Variation und Kombination
Sekunda	
Algebra: – den Einsatz von Wachstums- und Zerfallsfunktionen in den Naturwissenschaften kennen lernen und die entsprechenden mathematischen Methoden verstehen und beherrschen	Exponential- und Logarithmusfunktionen: – Eigenschaften der Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre graphische Darstellung – Logarithmusgesetze – Exponentialgleichungen, logarithmische Gleichungen
Analysis: – die Neuartigkeit und Genialität der Idee des Grenzprozesses erleben – den Umgang mit abstrakten Begriffen und das analytische Vorgehen bei mathematischen und angewandten Problemen schulen	Differenzialrechnung: – Begriff des Grenzwerts und der Ableitung – Ableitungsregeln, Ableitung elementarer Funktionen – Begriff der Stammfunktion – Extremalwertprobleme
Prima	
– die Bedeutung des Integrals für mathematische und angewandte Probleme erkennen – die Leistungsfähigkeit des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung erleben	Integralrechnung: – unbestimmtes Integral – bestimmtes Integral, der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung – Integrationsregeln – Flächenberechnungen
Stochastik: – die Problematik der Begriffe des Zufalls und der Wahrscheinlichkeit kennen – die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Modell für den mathematischen Umgang mit dem Zufall kennen lernen, verstehen und anwenden – Beschreibungsmodelle für den Zufall kennen und beurteilen können	Wahrscheinlichkeitsrechnung: – Laplace-Modell – Grundbegriffe – Additionssatz – abhängige und unabhängige Zufallsversuche – Binomialverteilung – Grundlagen der beschreibenden Statistik

E r k l ä r u n g

Ich erkläre, dass ich die Dissertation unter Verwendung keiner anderen als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.